

一种六自由度机械手奇异回避算法

崔洪新 李焕良 韩金华 李沛

解放军理工大学野战工程学院,南京,210007

摘要:针对传统机械手奇异回避算法存在的计算量大、实时性差的问题,提出了基于“奇异分离+指数级阻尼倒数”的奇异回避算法。首先,在对机械手运动学建模分析的基础上,通过 Jacobian 矩阵计算将导致奇异的参数分离出来;然后,介绍了指数级阻尼倒数算法的原理,并对采用指数级阻尼倒数进行奇异回避导致的误差进行了研究。仿真与实验结果表明,该算法可实现关节角速度在奇异域的平稳光滑过渡,且仅牺牲了机械臂末端在部分方向上的精度,由此算法的有效性和实用性得到验证。

关键词:六自由度机械手;奇异回避;奇异分离;指数级阻尼倒数

中图分类号:TP242.2

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2017.11.010

A Novel Avoid Singularity Algorithm for 6-DOF Manipulators

CUI Hongxin LI Huanliang HAN Jinhua LI Pei

College of Field Engineering, PLA University of Science and Technology, Nanjing, 210007

Abstract: Aiming at the problems of the heavier calculation burden and worse real-time of traditional singularity avoidance algorithms, a novel approach (named “singularity separation plus exponential order damped reciprocal” algorithm) was proposed for 6-DOF manipulators. Firstly, the singularity configurations were analyzed and the singularity parameters were separated based on the kinematics calculation. Then, the principle of exponential order damped reciprocal algorithm was introduced and error coefficient caused by the exponential order damped reciprocal algorithm was analyzed. The simulation and experimental results show that the proposed algorithm may achieve smooth transition of joint angular velocities and only part velocities accuracy of the end-effector are sacrificed, the effectiveness and practicability of the proposed algorithm are proved.

Key words: 6-DOF manipulator; singularity avoidance; singularity separation; exponential order damped reciprocal

0 引言

奇异性是关节型机器人的固有特性,当机械臂运动到奇异位形附近时,雅可比矩阵的逆是病态的且趋于无穷大,从而需要无穷大的关节角速度和角加速度,这会导致机械臂在运动过程中出现振动,严重影响机器人的轨迹跟踪精度。因此,回避奇异的轨迹规划和控制策略研究一直是机器人研究的热点^[1]。

常用的奇异回避算法是阻尼最小方差法^[2-3],虽然该算法保证了关节角速度在奇异位形附近的连续性和有限性,但存在机械臂末端在各个方向上的跟踪精度较差的问题;文献^[4]通过将阻尼系数只加在最小奇异值上,对阻尼最小方差法的轨迹跟踪性能进行了改进。文献^[5]针对研磨机器人的特点,提出了以可操作性为准则^[6]的奇异回避方法,提高了机器人的研磨精度。文献^[7-8]针对 PUMA 类型机械臂的结构特点,分别提出了“奇异分离+紧密二次型规划”法和“奇异分离+

阻尼倒数法”的 PUMA 机器人奇异回避算法。其他的奇异回避方法还有约束平面法^[9]、几何代数法^[10]、虚拟驱动法^[11]和变速度控制法^[12]等。但采用上述方法进行奇异回避计算时,需要对 Jacobian 矩阵进行实时的奇异值分解,或者需要实时估计 Jacobian 矩阵的最小奇异值,运算量较大。

本文针对六自由度机械手有三个关节的轴线相交于一点的特点,将机械臂分成前臂和腕部两个部分。首先建立了机械臂的运动学模型,进而推导出了以腕部为参考点的雅可比矩阵,并将六自由度的奇异回避问题分解为两个三自由度的奇异回避子问题;然后,将机械臂的奇异分成内部奇异、边界奇异和腕部奇异,并计算出相应的奇异影响因子,采用指数级阻尼倒数代替一般倒数的方法进行奇异回避;最后,通过数值仿真和实验对提出的“奇异分离+指数级阻尼倒数”的奇异回避算法进行了验证。

1 运动学与雅可比矩阵建模

1.1 运动学正解

采用 D-H 坐标系法建立的六自由度机械手

各连杆坐标系如图 1 所示,相应的连杆结构参数如表 1 所示。其中, a_i 为沿 X_i 轴从 Z_i 轴移动到 Z_{i+1} 轴的距离; α_i 为绕 X_i 轴从 Z_i 轴旋转到 Z_{i+1} 轴的角度; d_i 为沿 Z_i 轴从 X_{i-1} 轴移动到 X_i 轴的距离; θ_i 为绕 Z_i 轴从 X_{i-1} 轴旋转到 X_i 轴的角度。

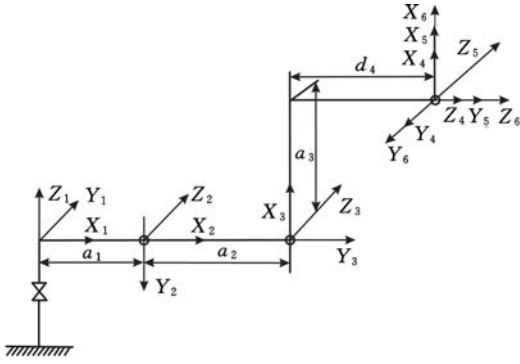


图 1 机械手 D-H 坐标系及参数

Fig.1 D-H coordinate system and parameters

表 1 机械手 D-H 参数表

Tab.1 D-H parameters of robot

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	$-\pi/2$	a_1	0	θ_2
3	0	a_2	0	θ_3
4	$-\pi/2$	a_3	d_4	θ_4
5	$\pi/2$	0	0	θ_5
6	$-\pi/2$	0	0	θ_6

由 D-H 法建模原理知,相邻连杆坐标系间的齐次变换矩阵 ${}^{i-1}\mathbf{T}$ 的计算公式:

$${}^{i-1}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i \cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -d_i \sin\alpha_{i-1} \\ \sin\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & d_i \cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

将表 1 中的参数代入式(1),并逐次相乘得到机械臂末端到全局坐标系的齐次变换矩阵为

$${}^0\mathbf{T} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & P_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & P_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} r_{11} &= s_1(c_4s_6 + s_4c_5c_6) - c_1[c_6s_{23}s_5 + c_{23}(s_4s_6 - c_4c_5c_6)] \\ r_{12} &= s_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6) + c_1[s_{23}s_5s_6 - c_{23}(s_4c_6 + c_4c_5s_6)] \\ r_{13} &= -s_1s_4s_5 - c_1(s_{23}c_5 + c_{23}c_4s_5) \\ r_{21} &= s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] - c_1(c_4s_6 + s_4c_5c_6) \\ r_{22} &= s_1[s_{23}s_5s_6 - c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6)] - c_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6) \\ r_{23} &= -s_1(s_{23}c_5 + c_{23}c_4s_5) + c_1s_4s_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{31} &= s_{23}(s_4s_6 - c_4c_5c_6) - c_{23}s_5c_6 \\ r_{32} &= s_{23}(s_4c_6 + c_4c_5s_6) + c_{23}s_5s_6 \\ r_{33} &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \\ s_i &= \sin\theta_i \quad s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j) \\ c_j &= \cos\theta_j \quad c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j) \end{aligned}$$

机械臂末端在全局坐标系中的坐标分量为

$$\left. \begin{aligned} P_x &= c_1(a_1 + a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}) \\ P_y &= s_1(a_1 + a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}) \\ P_z &= -a_2s_2 - a_3s_{23} - d_4c_{23} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

机械臂末端的姿态角为

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \arctan 2(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}) \\ \alpha &= \arctan 2\left(\frac{r_{21}}{\cos\beta}, \frac{r_{11}}{\cos\beta}\right) \\ \gamma &= \arctan 2\left(\frac{r_{32}}{\cos\beta}, \frac{r_{33}}{\cos\beta}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

1.2 运动学逆解

根据六自由度机械手运动学逆解的存在性判断条件,即机械臂后 3 个关节的轴线相交于一点则必存在逆运动学解,可得运动学逆解计算公式为

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \arctan 2(P_y, P_x) \\ \theta_3 &= \arctan 2(a_3, d_4) - \arctan 2(L_1, \pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - L_1^2}) \\ \theta_{23} &= \arctan 2(L_2, L_3) \\ \theta_2 &= \theta_{23} - \theta_3 \\ \theta_4 &= \arctan 2(-s_1r_{13} + c_1r_{23}, -c_1c_{23}r_{13} - s_1c_{23}r_{23} + s_{23}r_{33}) \\ \theta_5 &= \arctan 2(s_5, c_5) \\ \theta_6 &= \arctan 2(s_6, c_6) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$L_1 = [P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_4^2 - 2a_1(c_1P_x + s_1P_y)] / (2a_2)$$

$$L_2 = (a_2s_3 - d_4)(c_1P_x + s_1P_y - a_1) - (a_3 + a_2c_3)P_z$$

$$L_3 = (a_2c_3 - a_3)(c_1P_x + s_1P_y - a_1) - (d_4 - a_2s_3)P_z$$

$$s_5 = -r_{13}(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4) - r_{23}(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4) + r_{33}s_{23}c_4$$

$$c_5 = -r_{13}c_1s_{23} - r_{23}s_1s_{23} - r_{33}c_{23}$$

$$s_6 = -r_{11}(c_1c_{23}s_4 - s_1c_4) - r_{21}(s_1c_{23}s_4 + c_1c_4) + r_{31}s_{23}s_4$$

$$c_6 = r_{11}[(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4)c_5 - c_1s_{23}s_5] - r_{31}(s_{23}c_4c_5 + c_{23}s_5) + r_{21}[(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4)c_5 - s_1s_{23}s_5]$$

六自由度机械手运动学逆解计算方程组有多个解,在实际运动规划过程中基于各关节的运动范围约束和角度变化量最小的原则取出最优解。

1.3 雅可比矩阵建模

机械手雅可比矩阵反映了机械臂末端在笛卡儿空间的运动速度与关节角速度的线性变换关系。笛卡儿空间的速度是由线速度 \mathbf{v} 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 组成的 6 维列向量;雅可比矩阵的前 3 行表示线

速度的传递比,后 3 行表示角速度的传递比;第 i 列表示关节速度 $\dot{\theta}_i$ 对机械臂末端的传递比,即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1n} \\ J_{a1} & J_{a2} & \cdots & J_{an} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中, J_{1i} 和 J_{ai} 分别表示第 i 关节的线速度和角速度传递比。机械手的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}_1(\theta) = \begin{bmatrix} J_{1x} \\ J_{1y} \\ J_{1z} \\ s_{23}(s_4s_6 - c_4c_5c_6) - c_{23}s_5c_6 \\ s_{23}(s_4c_6 + c_4c_5s_6) + c_{23}s_5s_6 \\ s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_2(\theta) = \begin{bmatrix} J_{2x} \\ J_{2y} \\ J_{2z} \\ -s_4c_5c_6 - c_4s_6 \\ s_4c_5s_6 - c_4c_6 \\ s_4s_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_3(\theta) = \begin{bmatrix} J_{3x} \\ J_{3y} \\ J_{3z} \\ -s_4c_5c_6 - c_4s_6 \\ s_4c_5s_6 - c_4c_6 \\ s_4s_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_4(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s_5c_6 \\ -s_5s_6 \\ c_5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_5(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -s_6 \\ -c_6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_6(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J_{1x} = -(c_4s_6 + s_4c_5c_6)(a_1 + a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23})$$

$$J_{1y} = -(c_4c_6 - s_4c_5s_6)(a_1 + a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23})$$

$$J_{1z} = s_4s_5(a_1 + a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23})$$

$$J_{2x} = a_2[s_3(c_4c_5c_6 - s_4s_6) + c_3s_5c_6] + a_3s_5c_6 - d_4(c_4c_5c_6 - s_4s_6)$$

$$J_{2y} = -a_2[s_3(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_3s_5s_6] - a_3s_5s_6 + d_4(c_4c_5s_6 + s_4c_6)$$

$$J_{2z} = a_2(c_3c_5 - s_3c_4s_5) + a_3c_5 + c_4s_5d_4$$

$$J_{3x} = d_4(s_4s_6 - c_4c_5c_6) + a_3s_5c_6$$

$$J_{3y} = d_4(c_4c_5s_6 + s_4c_6) - a_3s_5s_6$$

$$J_{3z} = a_3c_5 + d_4c_4s_5$$

2 奇异位形分析

由于机械臂后三个关节的轴线相交于一点,因此将机械臂分成前臂和腕部,采用奇异分离法进行奇异位形分析。

2.1 奇异位形分析

由于机械臂末端和腕部的位置相对固定,因此建立以腕部为参考点的雅可比矩阵 \mathbf{J}_w ,其计算公式为

$$\mathbf{J}_{iw} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \times (\mathbf{P}_w - \mathbf{P}_i) \\ \mathbf{z}_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中, \mathbf{z}_i 是绕关节 i 转动的单位向量在基坐标系中的表示,其计算公式为

$$\mathbf{z}_i = {}^0\mathbf{R}_1 \cdots {}^{i-1}\mathbf{R}_i \mathbf{z}_0 \quad (8)$$

$$\mathbf{z}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

\mathbf{P}_i 表示基坐标系相对于 $\{i\}$ 坐标原点的位置矢量,其计算公式为

$$\tilde{\mathbf{P}}_i = {}^0\mathbf{T}(\theta_1) \cdots {}^{n-1}\mathbf{T}(\theta_n) \tilde{\mathbf{P}}_0 \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

式中, \mathbf{P}_i 为 $\tilde{\mathbf{P}}_i$ 的前三个元素。

\mathbf{P}_w 表示腕部在基坐标系中的位置矢量,即 $\mathbf{P}_w = \mathbf{P}_4$ 。

由于机械臂后三个关节的轴线相交,所以 $\mathbf{P}_w = \mathbf{P}_{n-1} = \mathbf{P}_{n-2} = \mathbf{P}_{n-3}$ 。因此 \mathbf{J}_{nw} 、 $\mathbf{J}_{(n-1)w}$ 和 $\mathbf{J}_{(n-2)w}$ 全为零矢量。

最终,可得机械臂腕部雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{P}_w - \mathbf{P}_1) & \cdots & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{z}_1 & \cdots & \mathbf{z}_{n-2} & \mathbf{z}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中, \mathbf{J}_{11} 、 \mathbf{J}_{21} 、 \mathbf{J}_{22} 为腕部雅可比矩阵的分块矩阵,其计算公式如下:

$$\mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} -s_1M & -c_1N & -c_1G \\ c_1M & -s_1N & -s_1G \\ 0 & -a_2c_2 - a_3c_{23} + d_4s_{23} & -a_3c_{23} + d_4s_{23} \end{bmatrix}$$

$$M = a_1 + a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}$$

$$N = a_2s_2 + a_3s_{23} + d_4c_{23}$$

$$G = a_3s_{23} + d_4c_{23}$$

$$\mathbf{J}_{22} = \begin{bmatrix} -c_1s_{23} & c_1c_{23}s_4 - s_1c_4 & -c_1c_{23}c_4s_5 - c_1s_{23}c_5 - s_1s_4s_5 \\ -s_1s_{23} & s_1c_{23}s_4 + c_1c_4 & -s_1c_{23}c_4s_5 - s_1s_{23}c_5 + c_1s_4s_5 \\ -c_{23} & -s_{23}s_4 & s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_u = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3]^T$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_l = [\dot{\theta}_4 \ \dot{\theta}_5 \ \dot{\theta}_6]^T$, 则 $\dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dot{\boldsymbol{\theta}}_u \ \dot{\boldsymbol{\theta}}_l]^T$ 。腕部速度矢量用 $\dot{\mathbf{P}}_w$ 表示,则有

$$\dot{\mathbf{P}}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_w \\ \boldsymbol{\omega}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_u \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_l \end{bmatrix} \quad (11)$$

因此,腕部线速度和角速度可分别表达为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_w &= \mathbf{J}_{11} \dot{\boldsymbol{\theta}}_u \\ \boldsymbol{\omega}_w &= \mathbf{J}_{21} \dot{\boldsymbol{\theta}}_u + \mathbf{J}_{22} \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

进而将运动学逆问题分解为两个问题:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\theta}}_u &= \mathbf{J}_{11}^{-1} \mathbf{v}_w \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 &= \mathbf{J}_{22}^{-1} (\boldsymbol{\omega}_w - \mathbf{J}_{21} \dot{\boldsymbol{\theta}}_u) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

从式(12)和式(13)可以看出: \mathbf{J}_{11} 是关节角速度 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_u$ 和腕部线速度 \mathbf{v}_w 的广义传递比, $\det(\mathbf{J}_{11})=0$ 决定了前臂奇异的条件,称为位置奇异。同理, \mathbf{J}_{22} 是关节角速度 $\dot{\boldsymbol{\theta}}_1$ 与腕部角速度 $\boldsymbol{\omega}_w$ 的广义传递比, $\det(\mathbf{J}_{22})=0$ 决定了腕部奇异的条件,称为姿态奇异。

由腕部雅可比矩阵表达式计算可得

$$\left. \begin{aligned} \det \mathbf{J}_{11} &= a_2(a_3 s_3 + d_4 c_3)(a_1 + a_2 c_2 + a_3 c_{23} - d_4 s_{23}) \\ \det \mathbf{J}_{22} &= -s_5 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(1)当 $a_3 s_3 + d_4 c_3 = 0$, 即 $\theta_3 = \arctan(-d_4/a_3)$ 时奇异位形称为边界奇异;

(2)当 $a_1 + a_2 c_2 + a_3 c_{23} - d_4 s_{23} = 0$ 时, 奇异位形称为内部奇异;

(3)当 $s_5 = 0$, 即 $\theta_5 = 0$ 时奇异位形称为腕部奇异, 此时 Z_4 轴和 Z_6 轴共线。

2.2 前臂奇异分离

由于机械臂末端的线速度与腕部的线速度相同, 为便于分析将腕部在全局坐标系中的线速度转换为坐标系 {3} 中的线速度:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_u = \mathbf{J}_{11}^{-1} \mathbf{v}_w = \mathbf{J}_{11}^{-1} ({}^0 \mathbf{R}_3^3 \mathbf{v}_w) = ({}^3 \mathbf{J}_{11})^{-1} ({}^3 \mathbf{v}_w) \quad (15)$$

将 \mathbf{J}_{11} 转换到坐标系 {3} 中表示的计算公式为 ${}^3 \mathbf{J}_{11} = ({}^0 \mathbf{R}_3)^{-1} \mathbf{J}_{11}$, 因而可得

$${}^3 \mathbf{J}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & a_2 s_3 - d_4 & -d_4 \\ 0 & a_2 c_3 + a_3 & a_3 \\ k_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$({}^3 \mathbf{J}_{11})^{-1} = \begin{bmatrix} k_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & k_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & k_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_3/a_2 & d_4/a_2 & 0 \\ -(a_2 c_3 + a_3)/a_2 & (a_2 s_3 - d_4)/a_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= a_1 + a_2 c_2 + a_3 c_{23} - d_4 s_{23} \\ k_2 &= a_3 s_3 + d_4 c_3 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

当 $k_1 = 0$ 时, 关节 1 的角速度为无穷大; 当 $k_2 = 0$ 时, 关节 2 和关节 3 的角速度为无穷大。 k_1 、 k_2 分别为内部奇异因子和边界奇异因子。

2.3 腕部奇异分离

同理, 将 \mathbf{J}_{22} 转换到坐标系 {5} 中表示的计算公式为 ${}^5 \mathbf{J}_{22} = ({}^0 \mathbf{R}_5)^{-1} \mathbf{J}_{22}$, 可得

$${}^5 \mathbf{J}_{22} = \begin{bmatrix} k_3 & 0 & 0 \\ c_5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$({}^5 \mathbf{J}_{22})^{-1} = \frac{1}{k_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \\ -c_5 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$k_3 = \sin \theta_5$$

式中, k_3 为腕部奇异因子。

将机械臂末端的角速度转换到坐标系 {5} 中的计算公式为

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = (\mathbf{J}_{22})^{-1} (\boldsymbol{\omega}_w - \mathbf{J}_{21} \dot{\boldsymbol{\theta}}_u) = ({}^5 \mathbf{J}_{22})^{-1} ({}^5 \boldsymbol{\omega}_w) \quad (21)$$

$${}^5 \boldsymbol{\omega}_w = {}^5 \mathbf{R} (\boldsymbol{\omega}_w - \mathbf{J}_{21} \dot{\boldsymbol{\theta}}_u)$$

当 $k_3 = 0$ 时, 关节 4 和关节 6 的角速度将为无穷大, 此时称为腕部奇异。

3 奇异回避算法

前文中通过奇异分离将机械手的奇异位形分成内部奇异、边界奇异和腕部奇异三种, 并分别计算了相应的奇异影响因子 k_1 、 k_2 和 k_3 。本节引入指数级阻尼倒数算法进行奇异回避分析。

3.1 指数级阻尼倒数算法原理

定义 对于奇异因子 $k_i (i=1, 2, 3)$, 设阻尼系数 $\lambda_i \geq 0$, 则称 $\frac{k_i}{k_i^2 + e^{-|k_i|} \lambda_i^2}$ 为 k_i 的指数级阻尼倒数。

可得以下关系式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_i}{k_i^2 + e^{-|k_i|} \lambda_i^2} &\approx \frac{1}{k_i} & |k_i| \gg \lambda_i \\ \frac{k_i}{k_i^2 + e^{-|k_i|} \lambda_i^2} &\approx \frac{k_i}{e^{-|k_i|} \lambda_i^2} & |k_i| \ll \lambda_i \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

从式(22)可以看出, 当奇异因子的绝对值 $|k_i|$ 远大于阻尼系数 λ_i 时, 阻尼系数产生的影响可忽略不计; 当奇异因子的绝对值 $|k_i|$ 远小于阻尼系数 λ_i 时, 在奇异位形中阻尼系数起主要作用, 保证关节角速度的连续光滑。

在实际的机械手轨迹规划中, 奇异并不仅发生在奇异因子等于 0 的点, 而是奇异位形附近的一定区域, 因此, 设定阈值 ϵ_i 作为判断奇异的条件, 即当 $|k_i| \leq \epsilon_i$ 时机械臂处于奇异域, 阻尼系数开始作用, 而在奇异域外阻尼系数不起作用。因而得到阻尼系数的计算公式为

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda_0 (1 - |k_i| / \epsilon_i) & |k_i| \leq \epsilon_i \\ 0 & |k_i| > \epsilon_i \end{cases} \quad (23)$$

式中, λ_0 为标准阻尼系数。

根据式(15)、式(17)、式(20)和式(21)可得各关节的角速度计算公式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \frac{k_1}{k_1^2 + e^{-|k_1|} \lambda_1^2} ({}^3v_{wz}) \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{k_2}{k_2^2 + e^{-|k_2|} \lambda_2^2} \left(\frac{a_3}{a_2} {}^3v_{wx} + \frac{d_4}{a_2} {}^3v_{wy} \right) \\ \dot{\theta}_3 &= \frac{k_2}{k_2^2 + e^{-|k_2|} \lambda_2^2} \left(-\frac{a_3 + a_2 c_3}{a_2} {}^3v_{wx} + \frac{a_2 s_3 - d_4}{a_2} {}^3v_{wy} \right) \\ \dot{\theta}_4 &= \frac{k_3}{k_3^2 + e^{-|k_3|} \lambda_3^2} ({}^5\omega_{wx}) \\ \dot{\theta}_5 &= {}^5\omega_{wz} \\ \dot{\theta}_6 &= \frac{k_3}{k_3^2 + e^{-|k_3|} \lambda_3^2} (-c_5 {}^5\omega_{wx}) + {}^5\omega_{wy} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

3.2 奇异误差分析

根据式(16)、式(19)和式(24)可得,基于指数级阻尼倒数的机械臂末端线速度 ${}^3\hat{v}_w$ 和角速度 ${}^5\hat{\omega}_w$ 的分量计算公式为

$$\left. \begin{aligned} {}^3\hat{v}_{wx} &= (a_2 s_3 - d_4) \dot{\theta}_2 - d_4 \dot{\theta}_3 = \frac{k_2^2}{k_2^2 + e^{-|k_2|} \lambda_2^2} ({}^3v_{wx}) \\ {}^3\hat{v}_{wy} &= (a_2 c_3 + a_3) \dot{\theta}_2 + a_3 \dot{\theta}_3 = \frac{k_2^2}{k_2^2 + e^{-|k_2|} \lambda_2^2} ({}^3v_{wy}) \\ {}^3\hat{v}_{wz} &= k_1 \dot{\theta}_1 = \frac{k_1^2}{k_1^2 + e^{-|k_1|} \lambda_1^2} ({}^3v_{wz}) \\ {}^5\hat{\omega}_{wx} &= k_3 \dot{\theta}_4 = \frac{k_3^2}{k_3^2 + e^{-|k_3|} \lambda_3^2} ({}^5\omega_{wx}) \\ {}^5\hat{\omega}_{wy} &= c_5 \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_6 = {}^5\omega_{wy} \\ {}^5\hat{\omega}_{wz} &= \dot{\theta}_5 = {}^5\omega_{wz} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

相应的速度误差为

$$\left. \begin{aligned} {}^3\hat{v}_{wx} - {}^3v_{wx} &= \frac{e^{-|k_2|} \lambda_2^2}{k_2^2 + e^{-|k_2|} \lambda_2^2} ({}^3v_{wx}) \\ {}^3\hat{v}_{wy} - {}^3v_{wy} &= \frac{e^{-|k_2|} \lambda_2^2}{k_2^2 + e^{-|k_2|} \lambda_2^2} ({}^3v_{wy}) \\ {}^3\hat{v}_{wz} - {}^3v_{wz} &= \frac{e^{-|k_1|} \lambda_1^2}{k_1^2 + e^{-|k_1|} \lambda_1^2} ({}^3v_{wz}) \\ {}^5\hat{\omega}_{wx} - {}^5\omega_{wx} &= \frac{e^{-|k_3|} \lambda_3^2}{k_3^2 + e^{-|k_3|} \lambda_3^2} ({}^5\omega_{wx}) \\ {}^5\hat{\omega}_{wy} - {}^5\omega_{wy} &= 0 \\ {}^5\hat{\omega}_{wz} - {}^5\omega_{wz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

由式(26)可知,当 $k_1=0$ 发生内部奇异时,仅腕部线速度在坐标系 $\{3\}$ 中的 z 轴方向精度受到影响;当 $k_2=0$ 发生边界奇异时,腕部线速度在坐标系 $\{3\}$ 中的 x, y 轴方向的精度受到影响;当 $k_3=0$ 发生腕部姿态奇异时,仅有 ${}^5\omega_{wx}$ 受到影响。速度误差是相应速度分量的 $\frac{e^{-|k_i|} \lambda_i^2}{k_i^2 + e^{-|k_i|} \lambda_i^2}$ 倍 ($i=1, 2, 3$)。在奇异域外 $\lambda_i=0$, 误差也为 0。

4 仿真与实验

在对机械手奇异位形和指数级阻尼倒数算法

分析的基础上,通过数值仿真与实验对提出的算法进行验证。

4.1 数值仿真

将本文提出的“奇异分离+指数级阻尼倒数”的奇异回避算法与文献[8]提出的“阻尼倒数法”进行比较。设阻尼倒数为 $\frac{k_i}{k_i^2 + \lambda_i^2}$, 则误差项系数为 $\frac{\lambda_i^2}{k_i^2 + \lambda_i^2}$ ($|k_i| \leq \epsilon_i$)。在变量取值相同的情况下绘制两种算法的误差系数变化曲线,如图 2 所示。由于 $\frac{e^{-|k_i|} \lambda_i^2}{k_i^2 + e^{-|k_i|} \lambda_i^2} \leq \frac{\lambda_i^2}{k_i^2 + \lambda_i^2}$ ($|k_i| \leq \epsilon_i$), 因此在奇异因子等于 0 时,两种算法产生的速度误差系数相等,而在除奇异因子等于 0 点外的奇异域内,本文提出的算法产生的速度误差系数更小,且越远离该点误差系数越小,所以本文提出的算法精度更高。

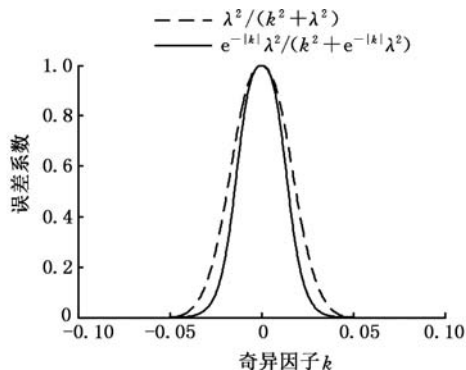


图 2 误差系数变化曲线

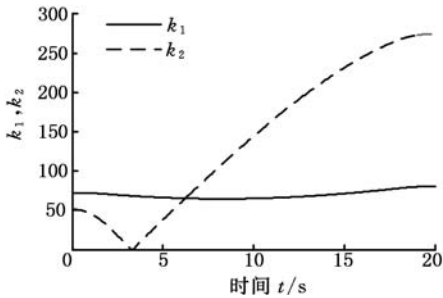
Fig.2 Curve of error coefficient

设 $x = \{\alpha, \beta, \gamma, P_x, P_y, P_z\}$ 表示机械臂末端在位姿空间的坐标,其中 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 表示末端姿态的 $Z-Y-X$ 欧拉角,单位为弧度; $\{P_x, P_y, P_z\}$ 表示末端的位置,单位为 mm。设机械臂末端直线插补的起点 x_0 和终点 x_e 分别为

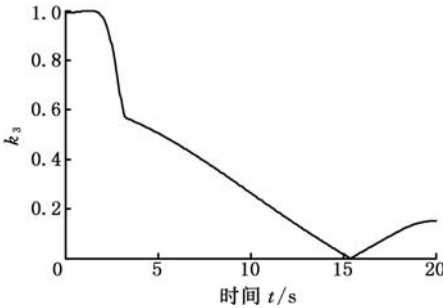
$$\begin{aligned} x_0 &= \{0.51, -0.56, -0.91, 71.67, 10.20, 50.99\} \\ x_e &= \{0.90, -1.13, -1.78, 45.82, -66.29, -33.44\} \end{aligned}$$

采用梯形法规划机械臂末端的运动速度,并设运动总时间 $t_f=20$ s,加速和减速时间相等且 $t_s=2$ s。计算得到前臂奇异因子和腕部奇异因子随时间变化曲线如图 3 所示。从图 3 中可以看出:当 $t_1=3.3$ s 时, $k_2=0$; 当 $t_2=15.4$ s 时, $k_3=0$, 因此机械臂在运动过程中发生边界奇异和腕部奇异。

指数级阻尼倒数相关参数分别设为: $\lambda_0=0.5, \epsilon_2=1.5, \epsilon_3=0.05$ 。分别利用直接求逆法、阻尼倒数法和本文提出的指数级阻尼倒数法计算各关节的角速度。其中第 i 关节用直接求逆法计算



(a) 前臂奇异因子变化曲线



(b) 腕部奇异因子变化曲线

图3 奇异因子值随时间变化曲线

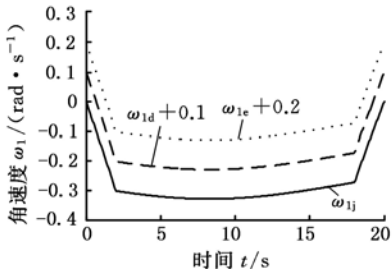
Fig.3 Time-varying curves of singularity factors

的角速度表示为 ω_{ij} , 用阻尼倒数法计算的角速度表示为 ω_{id} , 用指数级阻尼倒数法计算的角速度表示为 ω_{ie} 。各关节角速度变化曲线如图4所示。图中,“ $\omega_{id} + 0.1$ ”表示 ω_{id} 曲线向上平移 0.1 个单位,其他类此。

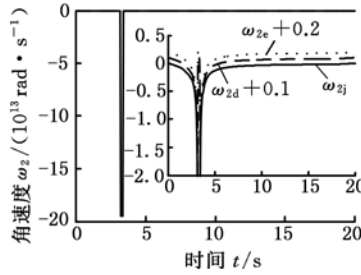
从图4中可以看出:在奇异域外三条曲线重合,角速度值相同;在奇异域,采用直接求逆法计算的部分关节角速度发生奇异突变,即关节2、3、5的角速度在边界奇异域发生突变,关节4和6的角速度在边界奇异和腕部奇异域均发生突变;采用阻尼倒数法和指数级阻尼倒数法计算的各关节角速度变化曲线均能平稳光滑地通过奇异域,计算结果与式(24)计算结果一致,说明这两种方法均能很好地抑制由奇异导致的速度突变。

4.2 实验验证

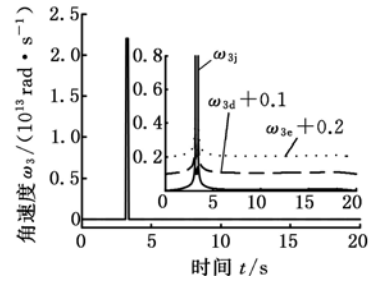
实验系统是一个六自由度 PUMA 型机械手,通过视觉传感系统对机械手末端的运动进行测量以实现闭环控制,实验系统如图5所示。



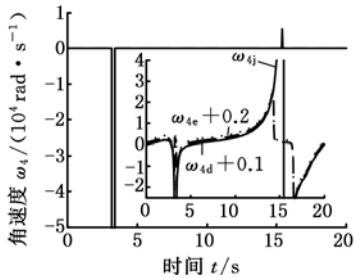
(a) 关节 1



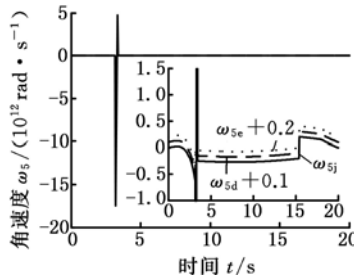
(b) 关节 2



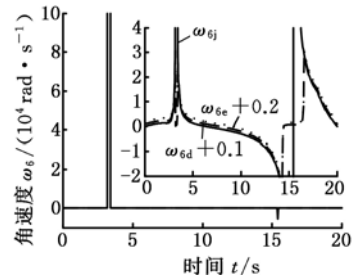
(c) 关节 3



(d) 关节 4



(e) 关节 5



(f) 关节 6

图4 机械臂各关节角速度变化曲线

Fig.4 Angular velocity curves of manipulator joints



图5 实验系统图

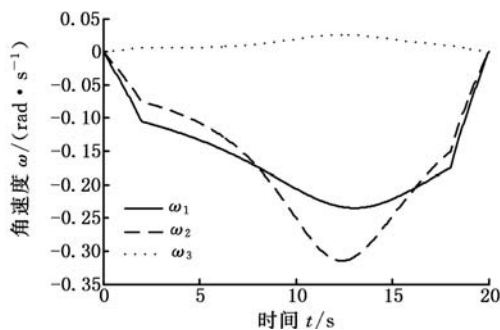
Fig.5 Experimental schematic diagram

利用该实验系统对本文提出的奇异回避方法进行验证,机械臂运动的初始位姿和期望位姿分别设为

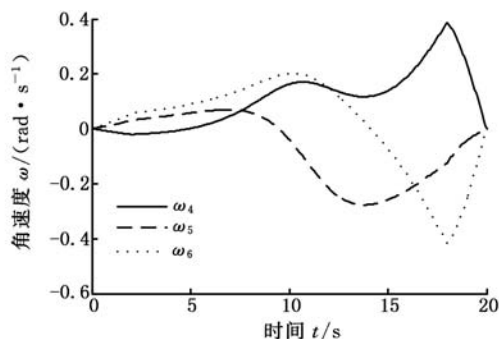
$$x_0 = \{0.35, -0.56, -0.91, 67.44, 0.50, 99\}$$

$$x_e = \{1.92, -1.13, -1.78, 73.28, 0, -331.44\}$$

末端运动速度按照梯形规划法进行规划,运动过程中发生前臂奇异和腕部奇异。实验结果如图6和图7所示,其中,图6为机械臂各关节的实际角速度变化曲线,图7为机械臂末端的位置和



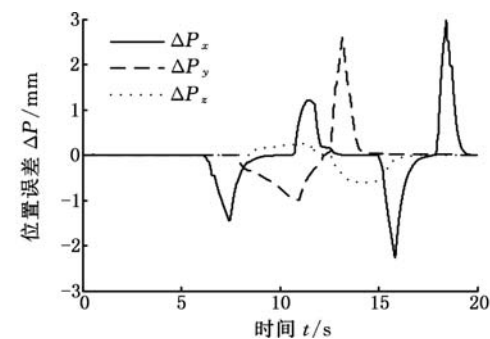
(a) 前臂



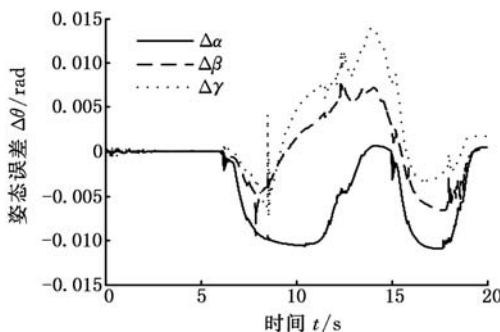
(b) 腕部

图 6 各关节实际运动角速度

Fig.6 Actual angular velocities of manipulator's joints



(a) 位置误差



(b) 姿态误差

图 7 机械臂末端跟踪误差

Fig.7 Tracking errors of end-effector

姿态误差曲线。

从图 6 中可以看出,各关节角速度变化曲线平稳光滑,在奇异位形关节角速度没有发生突变。从图 7 中可以看出机械臂末端的位置和姿态误差均较

小,满足工程应用的要求。因而,该实验结果证明了本文提出的“奇异分离+指数级阻尼倒数法”的有效性和实用性,能够回避奇异位形对速度和加速度带来的影响,高精度地跟踪预定轨迹完成任务。

5 结语

本文研究了六自由度机械手的运动学奇异问题。针对机械臂后三个关节的轴线相交于一点的特点,将六自由度的奇异问题分解成 2 个三自由度的奇异问题,并计算了相应的奇异因子;提出了“奇异分离+指数级阻尼倒数”的奇异域回避算法。该算法不需要对 Jacobian 矩阵进行奇异值分解,也不需要实时估算其最小奇异值;只需将奇异域内的奇异因子倒数换成指数级阻尼倒数即可实现奇异回避。因而运算量小、实时性好,且只牺牲了末端在部分方向上的速度精度。误差分析结果表明,指数级阻尼倒数产生的误差与实际值成比例,当相应的关节速度在奇异域内接近于 0 时,可进一步减小运动误差。数值仿真和实验结果证明了本文所提出的奇异回避算法的可行性和有效性。本文的研究方法也可应用于其他类型机械臂的奇异回避研究中。

参考文献:

- [1] 刘海涛. 工业机器人的高速高精度控制方法研究 [D]. 广州:华南理工大学,2012.
LIU Haitao. Research on High-speed and High-precision Control of Industrial Robots [D]. Guangzhou: South China University of Technology,2012.
- [2] CHIAVERINI S, SICILIANO B, EGELAND O. Review of Damped Least-squares Inverse Kinematics with Experiments on an Industrial Robot Manipulator[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology,1994,2(2):123-134.
- [3] CHENOWETH S K M, SORIA J, OOI A. A Singularity-avoiding Moving Least Squares Scheme for Two-dimensional Unstructured Meshes[J]. Journal of Computational Physics,2009,228(15):5592-5619.
- [4] CHIAVERINI S. Singularity-robust Task-priority Redundancy Resolution for Real-time Kinematic Control of Robot Manipulators[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation,1997,13(3):398-410.
- [5] XIAO Wenlei, JI Huan. Redundancy and Optimization of a 6R Robot for Five-axis Milling Applications: Singularity, Joint Limits and Collision[J]. Production Engineering,2012,6(3):287-296.

(下转第 1325 页)

前景[J].浙江工业大学学报,2006,34(1):69-73.
REN Jianli, ZHONG Yingjie, ZHANG Xuemei. State of Arts and Prospects in the Power Generation from Oceanic Wave[J]. Journal of Zhejiang University of Technology, 2006,34(1):69-73.

[9] 唐友刚,沈国光,刘利琴.海洋工程结构动力学[M].天津:天津大学出版社,2008:266-273.
TANG Yougang, SHEN Guoguang, LIU Liqin. Structural dynamics of ocean engineering[M]. Tianjin: Tianjin University Press, 2008:266-273.

[10] 王树青.海洋工程波浪力学[M].青岛:中国海洋大学出版社,2013:14-21.
WANG Shuqing. Wave Mechanics of Ocean Engineering [M]. Qingdao: China Ocean University Press, 2013:14-21.

[11] 刘胜永,张兴,谢震,等.风力发电系统机械传动机构动态模型研究[J].太阳能学报,2011,32(8):1257-1263.
LIU Shengyong, ZHANG Xing, XIE Zhen, et al. A Study on Dynamic Model of Mechanical Transmission in Wind Power Generation System[J]. Acta Energetica Solaris Sinica,2011,32(8):1257-1263.

[12] 李海龙.弹性储能鸭式波浪能采集转换器的研究[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2015.
LI Hailong. Research on the Elastic Duck Wave Energy Collection Converter[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2015.

[13] PECHER A, KOFOED J P, LARSEN T. Design Specifications for the Hanstholm WEPTOS Wave Energy Converter [J]. Energies, 2012, 5 (12): 1001-1017.

[14] SALTER S H. Numerical and Experimental Modelling of a Modified Version of the Edinburgh Duck Wave Energy Device[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part M, Journal of Engineering for Maritime Environment, 2006, 220 (9):129-147.

[15] 宋保维,丁文俊,毛昭勇.基于波浪能的海洋浮标发电系统[J].机械工程学报,2012,48(12):139-143.
SONG Baowei, DING Wenjun, MAO Zhaoyong. Conversion System of Ocean Buoys Based on Wave Energy[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012,48(12):139-143.

[16] 陈红霞,华锋,袁业立.中国近海及临近海域海浪的季节特征及其时间变化[J].海洋科学进展,2006,24(4):407-415.
CHEN Hongxia, HUA Feng, YUAN Yeli. Seasonal Characteristics and Temporal Variations of Ocean Wave in the Chinese Offshore Waters and Adjacent Sea Areas[J]. Advances in Marine Science, 2006,24(4):407-415. (编辑 王艳丽)

作者简介:王贡献,男,1979年生。武汉理工大学物流工程学院教授、博士。主要研究方向为振动、噪声分析与控制、结构动态特性测试与分析。获中国专利4项。发表论文30余篇。郑春玲(通信作者),女,1992年生。武汉理工大学物流工程学院硕士研究生。E-mail:1053628406@qq.com。陈凯凯,男,1992年生。武汉理工大学物流工程学院硕士研究生。

~~~~~  
(上接第1318页)

[6] 刘玮,常思勤.一种新型并联机器人的奇异性与工作空间研究[J].中国机械工程,2012,23(7):786-789.  
LIU Wei, CHANG Siqin. Study on Singularity and Workspace of a Novel Parallel Manipulator[J]. China Mechanical Engineering, 2012,23(7):786-789.

[7] CHENG F T, HOUR T L, SUN Y Y, et al. Study and Resolution of Singularities for a 6-DOF PUMA Manipulator [J]. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 1997, 27 (2):332-343.

[8] 徐文福,梁斌,刘宇,等.一种新的PUMA类型机器人奇异回避算法[J].自动化学报,2008,34(6):670-675.  
XU Wenfu, LIANG Bin, LIU Yu, et al. A Novel Approach to Avoid Singularities of PUMA-type Manipulators[J]. Acta Automatica Sinica, 2008,34(6):670-675.

[9] PENDAR H, MAHNAMA M, ZOHOOR H. Singularity Analysis of Parallel Manipulators Using Constraint Plane Method[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011,46(1):33-43.

[10] LI Qinchuan, XIANG J, CHAI X, et al. Singularity Analysis of a 3-RPS Parallel Manipulator Using Geometric Algebra[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015,28(6):1204-1212.

[11] PARK J O, IM Y D. Singularity Avoidance of CMGs by Virtual Actuators[J]. International Journal of Control Automation and Systems, 2010, 8 (4):891-895.

[12] MCMAHON J, SCHAUB H. Simplified Singularity Avoidance Using Variable-speed Control Moment Gyroscope Null Motion[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2009, 32 (6): 1938-1943. (编辑 王艳丽)

作者简介:崔洪新,男,1987年生。解放军理工大学野战工程学院博士研究生。主要研究方向为工程装备无人化。发表论文10余篇。E-mail:chx503207@163.com。李焕良,男,1977年生。解放军理工大学野战工程学院副教授。韩金华,男,1989年生。解放军理工大学野战工程学院博士研究生。李 坤,男,1991年生。解放军理工大学野战工程学院博士研究生。