

摆线钢球行星传动自由振动分析

杨荣刚 安子军 段利英

燕山大学,秦皇岛,066004

摘要:为准确反映摆线钢球行星传动的固有特性,建立了平移-扭转耦合动力学模型,求解了载荷作用时各构件相对位移量,并推导出动力学微分方程,获得了自由振动特征方程,得到了系统固有频率及主振型。分析了结构参数对固有频率的影响,并对理论研究进行了验证。结果表明:机构具有系统全振动模态、输出轴静止振动模态与输出轴扭转振动模态,传动比对固有频率的影响具有不确定性,输出轴支承刚度是影响固有频率的重要参数,验证了理论研究的正确性。

关键词:摆线钢球行星传动;自由振动;四点啮合;模态分析;轴向预紧

中图分类号:TH113.1

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2016.14.008

Analysis of Free Vibration of Cycloid Ball Planetary Transmission

Yang Ronggang An Zijun Duan Liying

Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei, 066004

Abstract: In order to reveal the inherent characteristics of cycloid ball planetary transmission accurately, a translational-torsional coupling dynamics model of precision ball transmission was proposed. The relative displacement amount of each component was solved with load. Dynamics of differential equations were deduced, free vibration characteristic equation was given, and the natural frequency and principal modes were obtained. The impacts on the natural frequency of structure parameters was analyzed. Theoretical research was carried out to prove the experiments. The results show that: the mechanism has system-wide vibration mode, the output shaft stationary vibration mode and the output shaft torsional vibration mode; the influence of transmission ratio on natural frequency is uncertain; the output shaft bearing stiffness is a very important parameter of natural frequency that affects the natural frequency; and the correctness of theoretical deduction is verified by experiments.

Key words: cycloid ball planetary transmission; free vibration; four point engagement; modal analysis; axial preload

0 引言

摆线钢球行星传动无侧隙啮合副形成的“无侧隙啮合”,使其成为精密传动中非常重要的高性

能传动机构。该传动机构具有实时无侧隙传动、啮合效率高、噪声低、结构紧凑、结构易于微型化等突出特性,在航空遥感相机位移补偿传动机构及频繁往复抓取工件的机器人伺服传动机构等高精密传动应用领域有着重要价值和发展前景^[1-2]。

文献[3-4]对摆线钢球行星传动进行了较深入的理论研究,并应用于精密机械伺服传动机构。

收稿日期:2015-09-21

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51275440);河北省自然科学基金资助项目(E2013203085)

京:南京航空航天大学,2005.

(编辑 张 洋)

[15] Tomac N, Tannessen K, Rasch F O. Machinability of Particulate Aluminum Matrix Composites[J]. CIRP Annals - Manufacturing Technology, 1992, 41(1):55-58.

[16] 危卫华,徐九华,傅玉灿,等. 置氢钛合金 TC4 的切削加工性研究[J]. 南京航空航天大学学报, 2009, 41(5):633-638.

Wei Weihua, Xu Jiuhua, Fu Yucan, et al. Machinability of Hydrogenating Titanium Alloy TC4[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2009, 41(5): 633-638.

[17] 李亮. 钛合金高速铣削机理及其工艺研究[D].南

作者简介: 宦海祥,男,1981年生。南京航空航天大学机电学院讲师、博士研究生,盐城工学院机械工程学院讲师。主要研究方向为金属基复合材料高效精密加工。发表论文10余篇。徐九华(通信作者),男,1964年生。南京航空航天大学机电学院教授。苏宏华,男,1969年生。南京航空航天大学机电学院教授。傅玉灿,男,1972年生。南京航空航天大学机电学院教授。梁星慧,1987年生。上海航天精密机械研究所工程师。葛英飞,1975年生。南京工程学院机械工程学院副教授。

文献[5]在忽略非传力接触点的基础上,利用超静定方法建立啮合副非线性力学模型,对啮合副进行静力学分析。文献[6]将质量较小的活齿简化为无质量的弹簧,建立平移-扭转耦合动力学模型,揭示了系统的固有特性。摆线钢球行星传动在间隙调节机构轴向预紧力作用下,能够实现啮合副无隙啮合传动(啮合副实时四点接触)。同一啮合点在传力与非传力两种状态间转换,法向力曲线连续且光滑,因此建立四点接触力学模型更符合实际情况。对活齿传动机构进行动力学建模时需考虑活齿^[7-9],忽略活齿将会影响固有频率与主振型计算的结果的精确性。因此,建立考虑啮合副四点接触与活齿的新型力学模型,并重新进行固有频率及主振型的求解有一定的实际意义。

在初始轴向预紧力作用下,通过得到的啮合点静态变形量,求解工作载荷作用下的啮合点相对位移量,建立考虑活齿及啮合副四点接触的摆线钢球行星传动平移-扭转耦合动力学模型,推导微分方程组,求解固有频率与模态向量,分析了参数对固有频率的影响,对理论研究进行了试验验证。

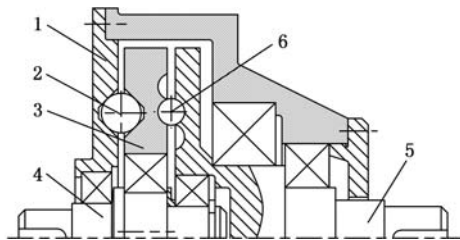
1 耦合动力学模型建立

摆线钢球传动的结构如图 1a 所示。图 1b 所示为等速啮合副环形槽为双圆弧环形槽的结构,该结构能够实现机构的无隙啮合传动。图 1 中, β_1, β_2 分别为环形槽外侧、内侧啮合点法线与盘平面的夹角, r_1, r_2 分别为环形槽外侧、内侧纵切面曲率半径。

中心盘右侧加工有外摆线槽,行星盘左侧加工有内摆线槽,内外摆线槽轴向重合位置处放置减速钢球。行星盘右侧与输出轴左侧加工有相同数量的环形槽,环形槽轴向重合位置处安装等速钢球。运转时,输入轴偏心段带动行星盘平动,行星盘挤压减速钢球。钢球在中心盘摆线槽的限制作用下反推行星盘,使行星盘以较低的转速转动,实现转速的变化。行星盘通过等速钢球将转速等速传递给输出轴,实现转速的等速输出。输出轴受到间隙调节结构预紧作用,轴向微移动 δ_x , 产生一定轴向预紧力,使减速啮合副与等速啮合副实现实时的四点接触。

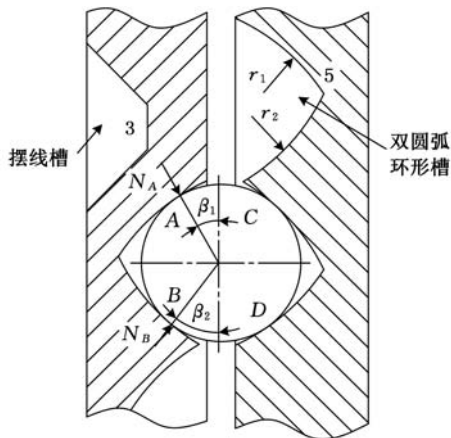
1.1 耦合动力学模型

借鉴行星齿轮传动振动的研究成果^[10-11],建立摆线钢球行星传动减速啮合副与等速啮合副耦合的平移-扭转耦合动力学模型。分析中假设如下:① 忽略运动过程中各构件的轴向振动;② 将



(a) 结构简图

- 1.中心盘 2.减速钢球 3.行星盘 4.输入轴
- 5.输出轴(盘) 6.等速钢球



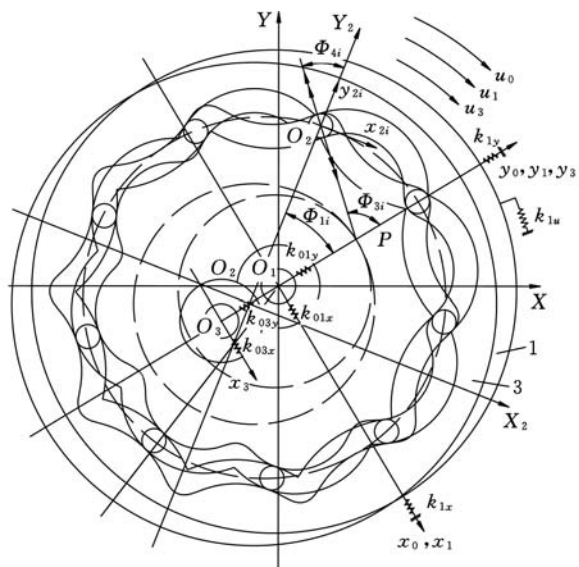
(b) 双圆弧环形槽结构图

图 1 摆线钢球行星传动结构图

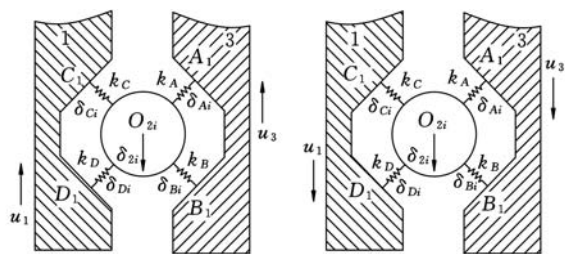
系统简化为集中参数模型,各轴承及啮合副均简化为无质量线弹簧,其余构件简化为刚体;③ 钢球与槽之间的啮合力作用在啮合平面内,平面与轴线平行;④ 不考虑支承轴承对系统施加的外载荷及各构件之间摩擦力的作用,并忽略各处的阻尼。

考虑输入轴、中心盘、行星盘与输出轴的平移、扭转自由度及钢球的平移自由度,建立平移-扭转耦合动力学模型,如图 2、图 3 所示。

图 2、图 3 中, Φ_{1i} 为第 i 个减速钢球绕输入轴坐标系逆时针转过的角度, Φ_{3i} 为第 i 个减速钢球法平面绕输入轴坐标系逆时针转过的角度, Φ_{4i} 为第 i 个减速钢球法平面绕该钢球坐标系逆时针转过的角度, O_1XY 为固定坐标系, $O_2X_2Y_2$ 为与减速钢球系固连的减速钢球坐标系, $O_1x_0y_0$ 为与输入轴固连的输入轴坐标系, $O_3x_3y_3$ 为与行星盘固连的行星盘坐标系。 $O_{2i}x_{2i}y_{2i}$ 为第 i 个减速钢球坐标系, $O_{2i}x_{2i}y_{2i}$ 的两坐标轴与 $O_1X_2Y_2$ 两坐标轴平行。 $O_{4j}x_{4j}y_{4j}$ 为第 j 个等速钢球坐标系, $O_{4j}x_{4j}y_{4j}$ 的两坐标轴与 $O_1x_0y_0$ 两坐标轴平行。 $x_i, y_i (i = 0, 1, 3, 5, 21, 22, \dots, 2(Z_2 - 1), 2Z_2, 41, 42, \dots, 4(Z_4 - 1), 4Z_4)$ 为由于振动构件质心偏离理论位置的线位移, u_0, u_1, u_3, u_5 为由振动产生的角位移。如果不做说明,脚标 0、1、3、



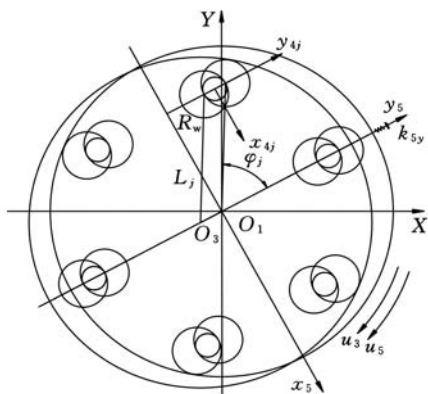
(a) 减速啮合副相对位移图



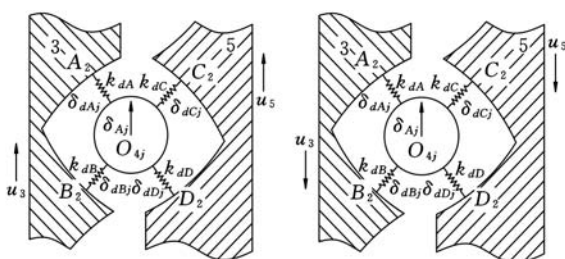
(b) 前半周期相对位移

(c) 后半周期相对位移

图2 减速啮合副动力学模型



(a) 等速啮合副相对位移



(b) 前半周期相对位移

(c) 后半周期相对位移图

图3 等速啮合副动力学模型

5、2*i* 与 4*i* 均分别指中心盘、输入轴、行星盘、输出轴、第 *i* 个减速钢球与第 *i* 个等速钢球。 Z_2 、 Z_4 分别为减速与等速钢球个数。 φ_j 为第 *j* 个等速钢球绕输入轴坐标系 y_5 轴逆时针转过角度。

1.2 啮合点相对位移

间隙调节机构产生初始轴向预紧力(未加载工作载荷)时,使行星盘相对于中心盘轴向微移动 δ_{1x} , 减速啮合副啮合点 A_1 、 B_1 、 C_1 、 D_1 处变形量分别为

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= k_4 \delta_{1x} \sin\beta / (k_1 + k_4) \\ \delta_2 &= k_3 \delta_{1x} \sin\beta / (k_2 + k_3) \\ \delta_3 &= k_2 \delta_{1x} \sin\beta / (k_2 + k_3) \\ \delta_4 &= k_1 \delta_{1x} \sin\beta / (k_1 + k_4) \end{aligned} \right\}$$

式中, k_1 、 k_2 、 k_3 、 k_4 分别为啮合点 A_1 、 B_1 、 C_1 、 D_1 处的啮合刚度; β 为啮合点法线与盘平面夹角。

初始预紧力使输出轴相对于行星盘轴向微移动 δ_{2x} 。等速啮合副中, 啮合点 A_2 与 D_2 、 B_2 与 C_2 变形量相同:

$$\left. \begin{aligned} \delta_A &= \delta_{2x} \sin\beta_1 / 2 \\ \delta_B &= \delta_{2x} \sin\beta_2 / 2 \end{aligned} \right\}$$

由图2中各构件之间的相对位置关系可知, 机构加载工作载荷时, 减速啮合副中第 *i* 个钢球与摆线槽在啮合点 A_1 、 B_1 、 C_1 、 D_1 处的压缩量分别为

$$\begin{aligned} \delta_{A_i} &= \delta_1 - (\delta_{2i} + u_3 Z_3 e \sin\Phi_{3i} + x_3 \sin\Phi_{3i} - y_3 \cos\Phi_{3i}) \cos\beta \\ \delta_{B_i} &= \delta_2 + (\delta_{2i} + u_3 Z_3 e \sin\Phi_{3i} + x_3 \sin\Phi_{3i} - y_3 \cos\Phi_{3i}) \cos\beta \\ \delta_{C_i} &= \delta_3 - (\delta_{2i} + u_1 Z_3 e \sin\Phi_{3i} + x_1 \sin\Phi_{3i} - y_1 \cos\Phi_{3i}) \cos\beta \\ \delta_{D_i} &= \delta_4 + (\delta_{2i} + u_1 Z_3 e \sin\Phi_{3i} + x_1 \sin\Phi_{3i} - y_1 \cos\Phi_{3i}) \cos\beta \\ \delta_{2i} &= -x_{2i} \sin\Phi_4 + y_{2i} \cos\Phi_4 \end{aligned}$$

式中, Z_3 为内摆线槽齿数; e 为输入轴偏心距一半。

加载工作载荷时, 等速啮合副中第 *j* 个钢球与环形槽在 A_2 、 B_2 、 C_2 、 D_2 处的相对位移分别为

$$\begin{aligned} \delta_{dA_j} &= \delta_A + y_{4j} \cos\beta_1 - u_3 R_w \sin\varphi_j \cos\beta_1 - y_3 \cos\beta_1 \\ \delta_{dB_j} &= \delta_B - y_{4j} \cos\beta_2 + u_3 R_w \sin\varphi_j \cos\beta_2 + y_3 \cos\beta_2 \\ \delta_{dC_j} &= \delta_B + y_{4j} \cos\beta_2 - u_5 R_w \sin\varphi_j \cos\beta_2 - y_5 \cos\beta_2 \\ \delta_{dD_j} &= \delta_A - y_{4j} \cos\beta_1 + u_5 R_w \sin\varphi_j \cos\beta_1 + y_5 \cos\beta_1 \end{aligned}$$

式中, R_w 为等速钢球所在圆半径。

输入轴偏心段与行星盘相对位移为

$$\delta_{03x} = x_0 - 2e u_0 - x_3$$

1.3 各构件动力学微分方程

由输入轴与中心盘、行星盘之间的相对位移关系, 建立输入轴动力学微分方程:

$$\left. \begin{aligned} m_0 (\ddot{x}_0 + 2\omega_r \dot{y}_0 - \omega_r^2 x_0) + k_{01x} (x_0 - x_1) + \\ k_{03x} (x_0 - 2u_0 e - x_3) = 0 \\ m_0 (\ddot{y}_0 - 2\omega_r \dot{x}_0 - \omega_r^2 y_0) + k_{01y} (y_0 - y_1) + \\ k_{03y} (y_0 - y_3) = 0 \\ J_0 \ddot{u}_0 - 2ek_{03x} (x_0 - 2u_0 e - x_3) = T_r \end{aligned} \right\} (1)$$

式中, ω_r 为输入轴转速; T_r 输入轴转矩; k_{01x} 、 k_{03x} 分别为中心盘与输入轴、中心盘与行星盘 x 方向支承刚度; k_{01y} 、 k_{03y} 分别为中心盘与输入轴、中心盘与行星盘 y 方向的支承刚度。

由第 i 个减速钢球与中心盘、行星盘之间的相对位移关系, 建立第 i 个减速钢球动力学微分方程:

$$\left. \begin{aligned} m_2 (\ddot{x}_{2i} + 2\omega_2 \dot{y}_{2i} - \omega_2^2 x_{2i}) - (k_D \delta_{Di} + k_B \delta_{Bi} - \\ k_A \delta_{Ai} - k_C \delta_{Ci}) \cos\beta \sin\Phi_{4i} = 0 \\ m_2 (\ddot{y}_{2i} - 2\omega_2 \dot{x}_{2i} - \omega_2^2 y_{2i}) + (k_D \delta_{Di} + k_B \delta_{Bi} - \\ k_A \delta_{Ai} - k_C \delta_{Ci}) \cos\beta \cos\Phi_{4i} = 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

式中, ω_2 为减速钢球转速。

由中心盘与输入轴、减速钢球之间的位移关系, 建立中心盘动力学微分方程:

$$\left. \begin{aligned} m_1 (\ddot{x}_1 + 2\omega_r \dot{y}_1 - \omega_r^2 x_1) + k_{1x} x_1 - k_{01x} (x_0 - x_1) + \\ \beta \sum_{i=1}^{Z_2} (k_D \delta_{Di} - k_C \delta_{Ci}) \sin\Phi_{3i} = 0 \\ J_1 \ddot{u}_1 + k_{1u} u_1 + Z_3 e \cos\beta \sum_{i=1}^{Z_2} (k_D \delta_{Di} - k_C \delta_{Ci}) \sin\Phi_{3i} = 0 \\ m_1 (\ddot{y}_1 - 2\omega_r \dot{x}_1 - \omega_r^2 y_1) + k_{1y} y_1 - k_{01y} (y_0 - y_1) - \\ \beta \sum_{i=1}^{Z_2} (k_D \delta_{Di} - k_C \delta_{Ci}) \cos\Phi_{3i} = 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

式中, k_{1x} 、 k_{1y} 分别为 x 轴、 y 轴方向支承刚度; k_{1u} 为扭转刚度。

由行星盘与输入轴、减速钢球、等速钢球之间的相对位移关系, 建立行星盘动力学微分方程:

$$\left. \begin{aligned} J_3 \ddot{u}_3 + Z_3 e \cos\beta \sum_{i=1}^{Z_2} (k_B \delta_{Bi} - k_A \delta_{Ai}) \sin\Phi_{3i} - \\ R_w \sum_{j=1}^{Z_4} (k_{dA} \delta_{dAj} \cos\beta_1 - k_{dB} \delta_{dBj} \cos\beta_2) \sin\varphi_j = 0 \\ m_3 (\ddot{x}_3 + 2\omega_r \dot{y}_3 - \omega_r^2 x_3) - k_{03x} (x_0 - 2u_0 e - x_3) + \\ \cos\beta \sum_{i=1}^{Z_2} (k_B \delta_{Bi} - k_A \delta_{Ai}) \sin\Phi_{3i} = 0 \\ m_3 (\ddot{y}_3 - 2\omega_r \dot{x}_3 - \omega_r^2 y_3) - \cos\beta \cdot \\ \sum_{i=1}^{Z_2} (k_B \delta_{Bi} - k_A \delta_{Ai}) \cos\Phi_{3i} - k_{03y} (y_0 - y_3) - \\ \sum_{j=1}^{Z_4} (k_{dA} \delta_{dAj} \cos\beta_1 - k_{dB} \delta_{dBj} \cos\beta_2) = 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

由第 j 个等速钢球与输出轴、行星盘之间的相对位移关系, 建立第 j 个等速钢球的动力学微分方程:

$$\left. \begin{aligned} m_4 (\ddot{y}_{4j} - \omega_c^2 y_{4j}) - k_{dB} \delta_{dBj} \cos\beta_2 - k_{dD} \delta_{dDj} \cos\beta_1 + \\ k_{dA} \delta_{dAj} \cos\beta_1 + k_{dC} \delta_{dCj} \cos\beta_2 = 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

由输出盘与等速钢球之间的相对位移关系, 建立输出盘动力学微分方程:

$$\left. \begin{aligned} m_5 (\ddot{y}_5 - 2\omega_r \dot{x}_5 - \omega_r^2 y_5) + k_{5y} y_5 + \\ \sum_{j=1}^{Z_4} (k_{dD} \delta_{dDj} \cos\beta_1 - k_{dC} \delta_{dCj} \cos\beta_2) = 0 \\ J_5 \ddot{u}_5 + R_w \sum_{j=1}^{Z_4} (k_{dD} \delta_{dDj} \cos\beta_1 - \\ k_{dC} \delta_{dCj} \cos\beta_2) \sin\varphi_j = -T_c \end{aligned} \right\} (6)$$

式中, T_c 输出轴转矩; k_{5y} 为 y 轴方向支承刚度。

1.4 系统动力学微分方程

输入轴转速 ω_r 与减速钢球转速 ω_2 较小, 将动力学微分方程中略去与 ω_r 、 ω_2 有关的项, 并由式(1)~式(6)得简化后的动力学微分方程:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (7)$$

$$\mathbf{q} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5]^T$$

$$q_0 = [x_0 \quad y_0 \quad u_0]$$

$$q_1 = [x_1 \quad y_1 \quad u_1]$$

$$q_2 = [q_{21} \quad q_{22} \quad \dots \quad q_{2Z_2}]$$

$$q_{2i} = [x_{2i} \quad y_{2i}]$$

$$i = 1, 2, \dots, 2Z_2$$

$$q_3 = [x_3 \quad y_3 \quad u_3]$$

$$q_4 = [y_{41} \quad y_{42} \quad \dots \quad y_{4Z_4}]$$

$$q_5 = [y_5 \quad u_5]$$

$$\mathbf{M} = \text{diag}[\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4, \mathbf{M}_5]$$

$$\mathbf{M}_0 = \text{diag}(m_0, m_0, J_0) \quad \mathbf{M}_1 = (m_1, m_1, J_1)$$

$$\mathbf{M}_3 = \text{diag}(m_3, m_3, J_3) \quad \mathbf{M}_5 = \text{diag}(m_5, J_5)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & 0 \\ \mathbf{A}_2^T & \mathbf{A}_4 & \mathbf{A}_5 & 0 \\ \mathbf{A}_3^T & \mathbf{A}_5^T & \mathbf{A}_6 & \mathbf{A}_7 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_7^T & \mathbf{A}_8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 =$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & -2ek_{03x} & -k_{01x} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 & 0 & -k_{01y} & 0 \\ -2ek_{03x} & 0 & 4e^2 k_{03x} & 0 & 0 & 0 \\ -k_{01x} & 0 & 0 & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ 0 & -k_{01y} & 0 & K_{45} & K_{55} & K_{56} \\ 0 & 0 & 0 & K_{46} & K_{56} & K_{66} \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = k_{01x} + k_{03x} \quad K_{22} = k_{01y} + k_{03y}$$

$$K_{44} = k_{1x} + k_{01x} + (k_C + k_D) \cos^2\beta \sum_{i=1}^{Z_2} \sin^2\Phi_{3i}$$

$$K_{45} = -(k_C + k_D) \cos^2\beta \sum_{i=1}^{Z_2} \sin\Phi_{3i} \cos\Phi_{3i}$$

$$K_{46} = Z_3 e (k_C + k_D) \cos^2\beta \sum_{i=1}^{Z_2} \sin^2\Phi_{3i}$$

$$K_{55} = k_{1y} + k_{01y} + (k_C + k_D) \cos^2\beta \sum_{i=1}^{Z_2} \cos^2\Phi_{3i}$$

$$K_{56} = -Z_3 e (k_C + k_D) \cos^2\beta \sum_{i=1}^{Z_2} \sin\Phi_{3i} \cos\Phi_{3i}$$

$$K_{66} = k_{1u} + (k_C + k_D) (Z_3 e \cos \beta)^2 \sum_{i=1}^{Z_2} \sin^2 \Phi_{3i}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ K_{4x1} & K_{4y1} & K_{4x2} & K_{4y2} & \cdots & K_{4xZ_2} & K_{4yZ_2} \\ K_{5x1} & K_{5y1} & K_{5x2} & K_{5y2} & \cdots & K_{5xZ_2} & K_{5yZ_2} \\ K_{6x1} & K_{6y1} & K_{6x2} & K_{6y2} & \cdots & K_{6xZ_2} & K_{6yZ_2} \end{bmatrix}$$

$$K_{4xi} = -(k_C + k_D) \cos^2 \beta \sin \Phi_{3i} \sin \Phi_{4i}$$

$$K_{4yi} = (k_C + k_D) \cos^2 \beta \sin \Phi_{3i} \cos \Phi_{4i}$$

$$K_{5xi} = (k_C + k_D) \cos^2 \beta \cos \Phi_{3i} \sin \Phi_{4i}$$

$$K_{5yi} = -(k_C + k_D) \cos^2 \beta \cos \Phi_{3i} \cos \Phi_{4i}$$

$$K_{6xi} = -(k_C + k_D) Z_3 e \cos^2 \beta \sin \Phi_{3i} \sin \Phi_{4i}$$

$$K_{6yi} = (k_C + k_D) Z_3 e \cos^2 \beta \sin \Phi_{3i} \cos \Phi_{4i}$$

$$i = 1, 2, \dots, Z_2$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -k_{03x} & 0 & 2ek_{03x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{03y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{A}_4 = \text{diag}[\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_{Z_2}]$$

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} K_{7xi} & K_{7yi} \\ K_{7yi} & K_{8yi} \end{bmatrix}$$

$$K_{7xi} = (k_A + k_B + k_C + k_D) (\cos \beta \sin \Phi_{4i})^2$$

$$K_{7yi} = -(k_A + k_B + k_C + k_D) \cos^2 \beta \sin \Phi_{4i} \cos \Phi_{4i}$$

$$K_{8yi} = (k_A + k_B + k_C + k_D) (\cos \beta \cos \Phi_{4i})^2$$

$$\mathbf{A}_5 = [\mathbf{K}'_1 \quad \mathbf{K}'_2 \quad \cdots \quad \mathbf{K}'_{Z_2}]^T$$

$$\mathbf{K}'_i = \begin{bmatrix} K_{(2i+5)7} & K_{(2i+5)8} & K_{(2i+5)9} \\ K_{(2i+6)7} & K_{(2i+6)8} & K_{(2i+6)9} \end{bmatrix}$$

$$K_{(2i+5)7} = -(k_A + k_B) \cos^2 \beta \sin \Phi_{4i} \sin \Phi_{3i}$$

$$K_{(2i+5)8} = (k_A + k_B) \cos^2 \beta \sin \Phi_{4i} \cos \Phi_{3i}$$

$$K_{(2i+5)9} = -Z_3 e (k_A + k_B) \cos^2 \beta \sin \Phi_{4i} \sin \Phi_{3i}$$

$$K_{(2i+6)7} = (k_A + k_B) \cos^2 \beta \sin \Phi_{3i} \cos \Phi_{4i}$$

$$K_{(2i+6)8} = -(k_A + k_B) \cos^2 \beta \cos \Phi_{3i} \cos \Phi_{4i}$$

$$K_{(2i+6)9} = Z_3 e (k_A + k_B) \cos^2 \beta \cos \Phi_{4i} \sin \Phi_{3i}$$

$$\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{34} & K_{99} & K_{91} \\ K_{35} & K_{91} & K_{00} \end{bmatrix}$$

$$K_{34} = -(k_A + k_B) \cos^2 \beta \sum_{i=1}^{Z_2} \sin \Phi_{3i} \cos \Phi_{3i}$$

$$K_{35} = Z_3 e (k_A + k_B) \cos^2 \beta \sum_{i=1}^{Z_2} \sin^2 \Phi_{3i}$$

$$K_{99} = k_{03y} + (k_A + k_B) \cos^2 \beta \sum_{i=1}^{Z_2} \cos^2 \Phi_{3i} + \sum_{j=1}^{Z_4} (k_{dA} \cos^2 \beta_1 + k_{dB} \cos^2 \beta_2)$$

$$K_{91} = -Z_3 e (k_A + k_B) \cos^2 \beta \sum_{i=1}^{Z_2} \cos \Phi_{3i} \sin \Phi_{3i} + R_w (k_{dA} \cos^2 \beta_1 + k_{dB} \cos^2 \beta_2) \sum_{j=1}^{Z_4} \sin \varphi_j$$

$$K_{00} = (k_A + k_B) (Z_3 e \cos \beta)^2 \sum_{i=1}^{Z_2} \sin^2 \Phi_{3i} +$$

$$R_w^2 (k_{dA} \cos^2 \beta_1 + k_{dB} \cos^2 \beta_2) \sum_{j=1}^{Z_4} \sin^2 \varphi_j$$

$$K_{33} = k_{03x} + (k_A + k_B) \cos^2 \beta \sum_{i=1}^{Z_2} \sin^2 \Phi_{3i}$$

$$\mathbf{A}_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ K_{y11} & K_{y12} & \cdots & K_{y1Z_4} & 0 & 0 \\ K_{y21} & K_{y22} & \cdots & K_{y2Z_4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{y1t} = -k_{dA} \cos \beta_1^2 - k_{dB} \cos \beta_2^2$$

$$K_{y2t} = -(k_{dA} \cos \beta_1^2 + k_{dB} \cos \beta_2^2) R_w \sin \varphi_t$$

$$t = 1, 2, \dots, Z_4$$

$$\mathbf{A}_8 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{81} & \mathbf{A}_{82} \\ \mathbf{A}_{83} & \mathbf{A}_{84} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{81} = \text{diag}(K_{411}, K_{422}, \dots, K_{4Z_4 Z_4})$$

$$\mathbf{A}_{82}^T = \mathbf{A}_{83} = \begin{bmatrix} K_{y1} & K_{y2} & \cdots & K_{yZ_4} \\ K_{4u1} & K_{4u2} & \cdots & K_{4uZ_4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{84} = \begin{bmatrix} K_{y5} & K_{5u} \\ K_{5u} & K_u \end{bmatrix}$$

$$K_{4jj} = (k_{dA} + k_{dD}) \cos^2 \beta_1 + (k_{dB} + k_{dC}) \cos^2 \beta_2$$

$$K_{yjj} = -(k_{dD} \cos^2 \beta_1 + k_{dC} \cos^2 \beta_2)$$

$$K_{4uj} = -(k_{dD} \cos^2 \beta_1 + k_{dC} \cos^2 \beta_2) R_w \sin \varphi_j$$

$$j = 1, 2, \dots, Z_4$$

$$K_{y5} = k_{5y} + \sum_{j=1}^{Z_4} (k_{dD} \cos^2 \beta_1 + k_{dC} \cos^2 \beta_2)$$

$$K_u = (k_{dD} \cos^2 \beta_1 + k_{dC} \cos^2 \beta_2) R_w^2 \sum_{j=1}^{Z_4} \sin^2 \varphi_j$$

$$K_{5u} = R_w (k_{dD} \cos^2 \beta_1 + k_{dC} \cos^2 \beta_2) \sum_{j=1}^{Z_4} \sin \varphi_j$$

式中, \mathbf{M}_2 为元素是 m_2 的 $2Z_2$ 阶对角阵; \mathbf{M}_4 为元素是 m_4 的 Z_4 阶对角阵。

刚度矩阵 \mathbf{K} 为 $11 + 2Z_2 + Z_4$ 维的对称阵, \mathbf{q} 为系统的广义坐标列阵, 质量矩阵 \mathbf{M} 为对角阵。

动力学方程对应的特征方程为

$$(\mathbf{K} - \omega_h^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi}_h = \mathbf{0} \quad (8)$$

$$h = x_0, y_0, u_0, x_1, y_1, u_1, x_{21}, y_{21}, x_{22}, y_{22}, \dots, x_{2(Z_2-1)}, y_{2(Z_2-1)}, x_{2Z_2}, y_{2Z_2}, x_3, y_3, u_3, x_{41}, y_{41}, x_{42}, y_{42}, \dots, x_{4(Z_4-1)}, y_{4(Z_4-1)}, x_{4Z_4}, y_{4Z_4}, y_5, u_5$$

式中, ω_h 为系统 h 阶固有频率; $\boldsymbol{\varphi}_h$ 为阵型向量。

2 固有特性分析

2.1 结果求解与分析

动力学微分方程中的刚度系数如下: $k_A = 8.15 \times 10^6$ N/m, $k_B = 8.73 \times 10^6$ N/m, $k_C = k_D = k_{dA} = k_{dD} = 7.90 \times 10^6$ N/m, $k_{dB} = k_{dC} = 1.90 \times 10^6$ N/m, $k_{01x} = k_{01y} = k_{1x} = k_{1y} = k_{5y} = 6 \times 10^7$ N/m, $k_{03x} = k_{03y} = 7 \times 10^7$ N/m, $k_{1u} = 6 \times 10^5$ N · m/rad。样机参数取值参见表 1。

表 1 计算参数

参数	输入轴	中心盘	减速钢球	行星盘	等速钢球	输出轴
钢球数			10		6	
$m(g)$	66.4	127	7.64	96.4	8.6	111
$J(kg \cdot mm^2)$	1.20	30.0		10.6	0	10.8
$r(mm)$	2.0	10	1.5	12	2	12

将刚度系数与表 1 中的参数代入式(8),求得各阶固有频率,将各阶固有频率代入式(8),获得模态振型坐标。将获得的固有频率从小到大依次排列,设为 $\omega_1 \sim \omega_{17}$,各阶固有频率如表 2 所示,表中, M 为重根数。机构减速啮合副与等速啮合副部分振动模态分别如图 4、图 5 所示。

表 2 固有频率

模态振型		固有频率(rad/s)	M	
系统全振动模态		$\omega_3 = 13\ 843$	1	
		$\omega_4 = 14\ 452$	1	
		$\omega_5 = 23\ 863$	1	
		$\omega_7 = 35\ 824$	1	
		$\omega_8 = 40\ 139$	1	
		$\omega_9 = 43\ 907$	1	
		$\omega_{11} = 47\ 253$	1	
输出轴静止振动模态		等速钢球直线振动	$\omega_6 = 33\ 679$	4
		减速钢球平移振动	$\omega_{12} = 49\ 176$	8
输出轴扭转振动模态		等速钢球静止振动	$\omega_{17} = 142\ 340$	1
输出轴扭转振动模态		输入轴扭转振动	$\omega_1 = 0$	11
		输出轴扭转振动	$\omega_2 = 8774$	1
			$\omega_{10} = 46721$	1
			$\omega_{13} = 59\ 459$	1
			$\omega_{14} = 65\ 477$	1
			$\omega_{16} = 76\ 583$	1

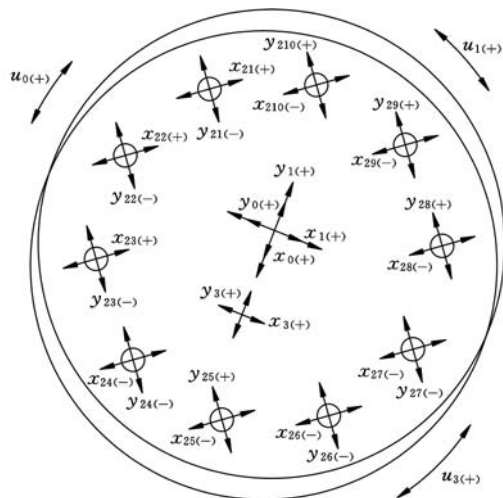
由表 2 及模态振型可以得到如下规律:

(1) 由表 2 可知,自由振动固有频率总数为 37,由 1 个固有频率为 0 的 11 重根、1 个固有频率为 33 679 rad/s 的 4 重根、1 个固有频率为 49 176 rad/s 的 8 重根、14 个单根组成,固有频率为 0 的重根个数与输入轴、中心盘、行星盘及输出轴的自由度个数相等。

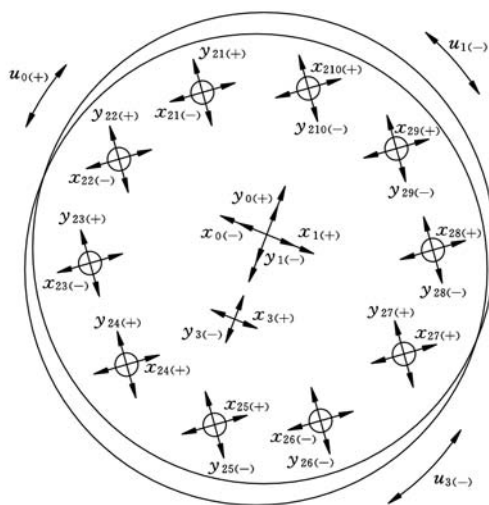
(2) 自由振动主要为三种模态:系统全振动模态、输出轴静止振动模态、输出轴扭转振动模态。输出轴静止振动模态可分为减速钢球平移振动、等速钢球直线振动与等速钢球静止振动。减速钢球平移振动与等速钢球直线振动对应的固有频率均存在重根,重根数分别为 8 和 4。

(3) 每个单根固有频率对应一种振型。在系统全振动模态对应的振型中,输入轴、中心盘、行星盘与输出轴均存在平移和扭转振动,减速钢球为平移振动,等速钢球为直线振动。

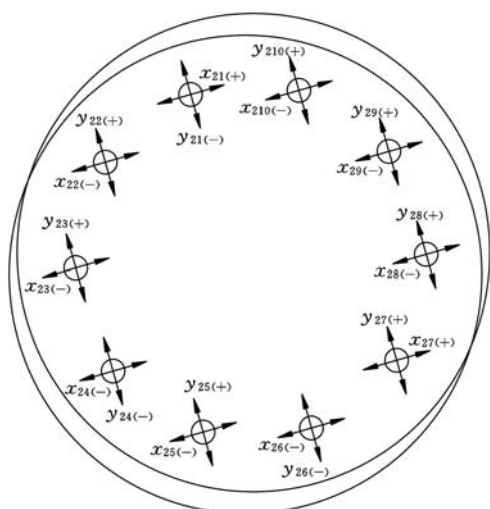
(4) 输出轴扭转振动中,输出轴无直线振动;输入轴扭转振动中,输入轴无平移振动。



(a) $\omega_3 = 13\ 843\ rad/s$

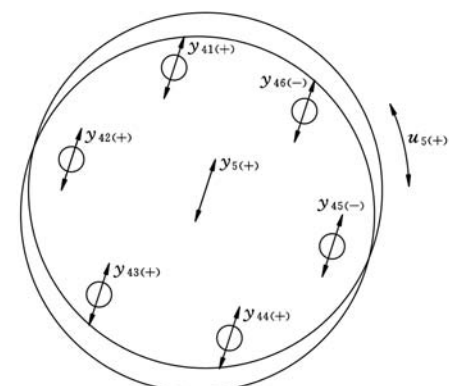


(b) $\omega_{14} = 65\ 477\ rad/s$

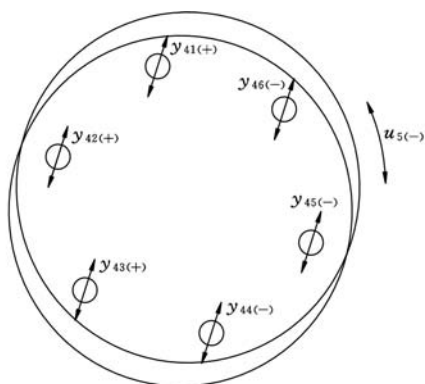


(c) $\omega_6 = 33\ 679\ rad/s$

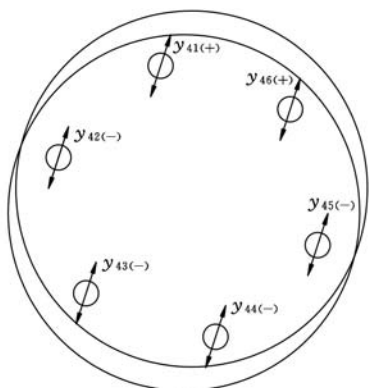
图 4 减速啮合副模态振型



(a) $\omega_3 = 13\ 843\ \text{rad/s}$



(b) $\omega_{14} = 65\ 477\ \text{rad/s}$



(c) $\omega_{12} = 49\ 176\ \text{rad/s}$

图5 等速啮合副模态振型

(5) 减速钢球平移振动模态中,只存在减速钢球平移振动;等速钢球直线振动中,只存在等速钢球直线振动;等速钢球静止振动模态中,等速钢球无振动。

将文献[6]中所建模型称为简化模型,在该模型基础上求解得到的固有频率阶数较少且均为单根,仅存在系统全振动模态。该简化模型与新模型相比,固有频率与主振型的研究结果存在较大差异。

2.2 参数对固有频率的影响分析

改变系统部分参数值,分析参数变化对系统固有频率的影响。对参数进行分析时,选取短幅

系数 K 、滚圆半径 r_0 、行星盘支撑刚度系数 k_{03x} 和 k_{03y} 为自变量,通过数值计算得到固有频率随参数变化的曲线。选取系统全振动模态与输出轴扭转振动模态对应的固有频率进行分析。

系统全振动模态固有频率变化如图6所示。固有频率 ω_3 与 ω_4 随 K 、 r_0 的增大而增加。 $r_0 > 4\ \text{mm}$ 时, ω_3 曲线斜率发生较大变化; $r_0 > 5\ \text{mm}$ 时, ω_4 曲线斜率发生较大变化。 k_{03x} 对 ω_3 与 k_{03y} 对 ω_4 产生较小影响, k_{03x} 对 ω_4 及 k_{03y} 对 ω_3 不产生影响。

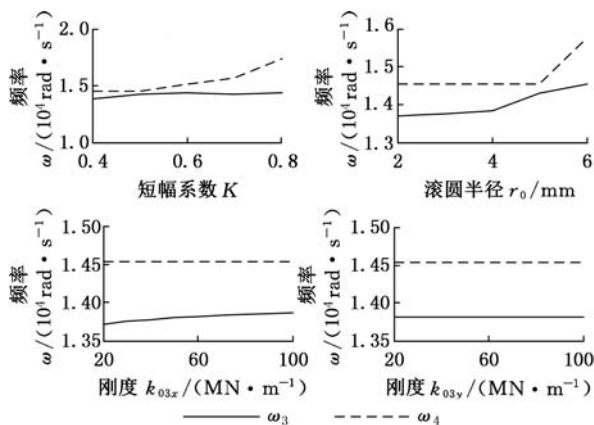


图6 参数对 ω_3 与 ω_4 的影响

输出轴扭转振动模态固有频率变化如图7所示。 ω_{13} 随 K 、 r_0 、 k_{03x} 增加而增大, ω_{14} 随 K 、 k_{03x} 增加而增大。 r_0 增加时, ω_{14} 先减小后增加,存在最小值。 $k_{03y} < 3 \times 10^7\ \text{N/m}$ 时, ω_{14} 随 k_{03y} 增大而增大; $k_{03y} = 3 \times 10^7\ \text{N/m}$ 时,发生模态跃迁; $k_{03y} > 3 \times 10^7\ \text{N/m}$ 时, ω_{14} 为定值。

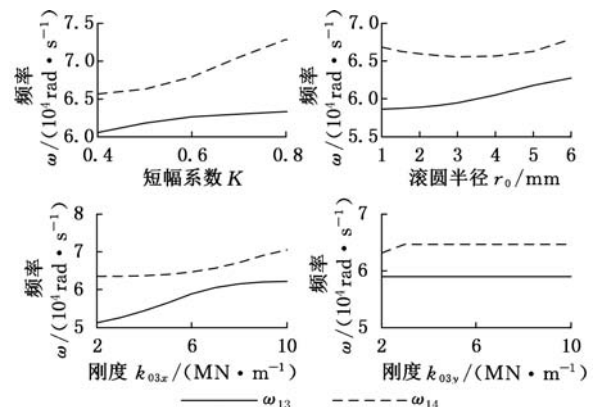


图7 参数对 ω_{13} 与 ω_{14} 的影响

减速钢球数目变化时,系统固有频率单根数与 ω_6 重根数不发生变化, ω_1 与 ω_{12} 重根数发生变化(变化量均与 Z_2 变化量相同)。如图8所示, ω_3 、 ω_4 与 ω_{13} 随 Z_2 增加而增大, ω_{14} 随 Z_2 增加而减小。

短幅系数 K 与支承刚度变大,有助于提高系统的固有频率,使系统远离振动频率产生的影响;

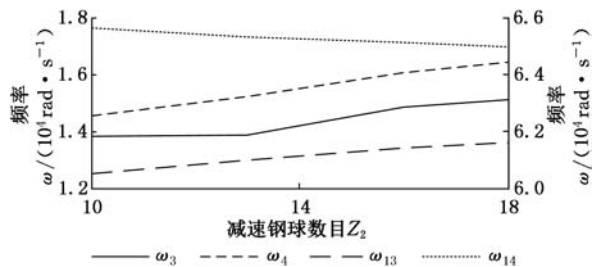


图 8 Z_2 对固有频率的影响

r_0 与 Z_2 的变化对固有频率的影响具有不确定性；支承刚度变化时，固有频率会出现模态跃迁，工程设计应避免此类参数敏感点。传动比 i 与减速钢球数 Z_2 之间的关系为 $i = (Z_2 + 1)/2$ ，则不同传动比对摆线钢球行星传动固有频率的影响具有不确定性。

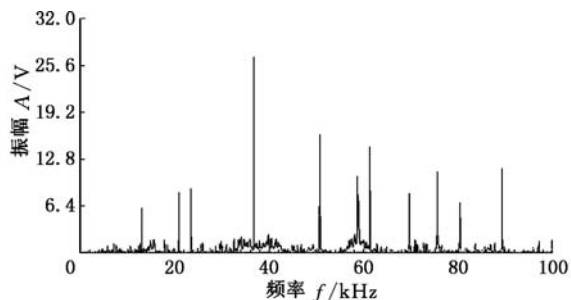
将简化模型与新模型研究结果进行对比可知，同一参数的变化对不同模型中固有频率产生的影响不同。简化模型中，支承刚度、传动比与偏心距均主要影响高阶固有频率，固有频率值随参数值增加而变大。

3 样机试验

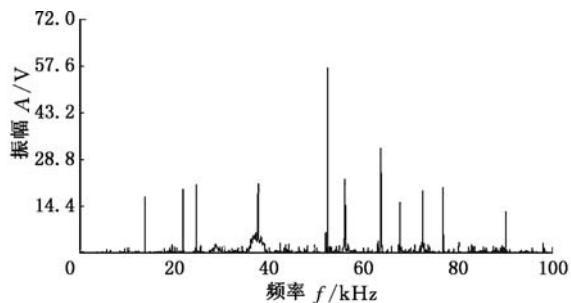
在大多数情况下，系统的基频稳态响应占据主导地位，工程实际中最关注系统的基频稳态响应^[11]。因此，采用 SZCJ 锤击法振动测试系统对摆线钢球行星传动系统固有频率进行测试，采样频率为 20 kHz。本实验采用京仪北方测振分公司 LC-1 型力锤、BZ1124-103 加速度传感器、DHF-8 型多通道电荷放大器和 LMS Test.Lab9A 版数据分析软件。

对传动机构进行悬挂测试，测点为输出端面（间隙调解机构处），采用固定响应点、移动敲击点的测试方法，选取外壳表面圆柱面和行星盘端面为激励点。测试过程中得到的每一条曲线均为单次敲击所测试的结果，振动测试曲线如图 9 所示，线频率对比如表 3 所示。角频率 ω_i (rad/s) 与线频率 f_i (Hz) 之间的转换关系为 $f_i = \omega_i / (2\pi)$ 。

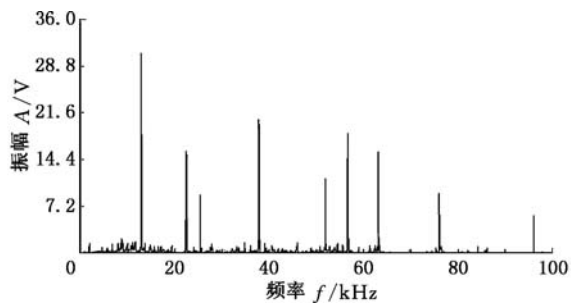
由于只在一点敲击（激励），敲击能量分布不均匀，因此测试结果中均在较高阶固有频率处出现了“漏频”现象。对比表 3 中固有频率的测试值与理论计算值可知，敲击大圆柱面中间敲击点时，“漏频”现象出现在固有频率 f_{10} 处，绝对误差最大值 530 Hz 出现在 f_{13} 处，其余误差相对较小；敲击小圆柱面中间敲击点时，“漏频”现象出现在固有频率 f_{12} 处，绝对误差最大值 446 Hz 出现在 f_{13} 处，相对误差最大值 7.3% 出现在 f_4 处，其余误差相对较小；敲击中心盘端面敲击点时，“漏频”现象出现



(a) 大圆柱面中间敲击点



(b) 小圆柱面中间敲击点



(c) 中心盘端面敲击点

图 9 振动测试频率曲线

表 3 频率的理论计算值与测试值 Hz

	理论计算	大圆柱面 敲击点	小圆柱面 敲击点	中心盘端面 敲击点
f_2	1396	1296	1367	1291
f_3	2203	2095	2183	2251
f_4	2300	2351	2467	2533
f_5	3798	3647	3767	3768
f_6	5360	5067	5236	5183
f_7	5702	5867	5598	5667
f_8	6388	6133	6367	6317
f_9	6988	6967	6768	—
f_{10}	7436	—	7252	—
f_{11}	7521	7552	7667	7583
f_{12}	7826	8033	—	—
f_{13}	9463	8933	9017	9600

在固有频率 f_9 、 f_{10} 和 f_{12} 处，相对误差最大值 7.5% 出现在 f_2 处，其余误差相对较小。在对机构不同点进行敲击时，固有频率理论计算结果与测试结果之间误差较小，从而验证理论推导的正确性。

4 结论

(1) 在摆线钢球行星传动平移-扭转耦合动力学模型基础上建立的动力学微分方程能够较全面地揭示摆线钢球行星传动的固有特性,自由振动除有系统全振动模态之外,还有输出轴静止振动模态、输出轴扭转振动模态。

(2) 减速钢球数变化时,固有频率单根数目不发生变化,部分重根数增加,传动比变化对固有频率的影响具有不确定性,输出轴支承刚度变化对固有频率产生较大影响。

(3) 对摆线钢球行星传动不同点进行敲击时得到的试验结果之间存在较小误差,固有频率理论计算结果与测试结果之间存在较小误差,验证了考虑活齿及啮合副无隙啮合的平移-扭转耦合动力学模型理论推导的正确性。

参考文献:

- [1] 王国彪,赖一楠,范大鹏,等. 新型精密传动机构设计与制造综述[J]. 中国机械工程,2010,21(16):1891-1897.
Wang Guobiao, Lai Yinan, Fan Dapeng, et al. Summary of New Type Precision Transmission Design and Manufacture[J]. China Mechanical Engineering, 2010, 21(16):1891-1897.
- [2] 徐盛林,陈耿. 精密超精密定位技术及其应用[J]. 中国机械工程,1997,8(4):73-75.
Xu Shenglin, Chen Geng. Precision Ultra-precision Positioning Technology and Its Applications [J]. China Mechanical Engineering, 1997,8(4):73-75.
- [3] 寺田英嗣,牧野洋,今瀬憲司. サイクロイドボール減速機の基礎解析[J]. 精密工学会誌,1995,61(12):1075-1079.
- [4] Terada H. The Development of Gearless Reducers with Rolling Balls[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2010, 24(1):184-195.
- [5] 张鹏,安子军,杨作梅. 摆线钢球行星传动啮合副非线性力学性能研究[J]. 工程力学,2010,27(3):186-192.
Zhang Peng, An Zijun, Yang Zuomei. Research on Nonlinear Mechanical Properties for Engagement Pair of Cycloid Ball Planetary Transmission[J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(3):186-192.
- [6] 张鹏,安子军. 摆线钢球行星传动动力学建模与固

有特性分析[J]. 中国机械工程,2014,25(2):157-162.

Zhang Peng, An Zijun. Dynamics Model and Natural Characteristics of Cycloid Ball Planetary Transmission[J]. China Mechanical Engineering, 2014, 25(2):157-162.

- [7] 梁尚明,张均富,徐礼拒,等. 摆动活齿传动系统振动的动力学模型[J]. 振动工程学报,2003,13(3):285-289.
Liang Shangming, Zhang Junfu, Xu Liju, et al. Dynamic Model of Swing Movable Teeth Transmission System Vibration [J]. Journal of Vibration Engineering, 2003, 13(3):285-289.
- [8] 梁尚明,张均富,徐礼拒. 摆动活齿传动系统的弹性动力学模型的研究[J]. 机械工程学报,2002,38(S):142-146.
Liang Shangming, Zhang Junfu, Xu Liju. Study on Elasto-dynamic Model of Swing Movable Teeth Transmission System [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(S):142-146.
- [9] 李冲,许立忠,邢继春. 压电谐波传动系统活齿传动自由振动分析[J]. 中国机械工程,2015,26(1):12-17.
Li Chong, Xu Lizhong, Xing Jichun. Free Vibration of Oscillating Tooth Drive for an Electromechanical Integrated Harmonic Yiezodrive System [J]. China Mechanical Engineering, 2015, 26(1):12-17.
- [10] Xu Lizhong, Zhu Xuejun. Natural Frequencies and Vibrating Modes for a Magnetic Planetary Gear Drive[J]. Shock and Vibration, 2012, 19(6):1385-1401.
- [11] 刘振皓,巫世晶,王晓笋,等. 基于增量谐波平衡法的复合行星齿轮传动系统非线性动力学[J]. 振动与冲击,2012,31(3):117-122.
Liu Zhenhao, Wu Shijing, Fang Xiaosun, et al. Nonlinear Dynamics of Compound Planetary Gear Sets Based Incremental Harmonic Balance Method [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(3):117-122.

(编辑 张 洋)

作者简介:杨荣刚,男,1988年生。燕山大学机械工程学院博士研究生。主要研究方向为精密机械传动理论与应用。发表论文3篇。安子军(通信作者),男,1960年生。燕山大学机械工程学院教授、博士研究生导师。段丽英,女,1982年生。燕山大学机械工程学院博士研究生。