单排连续切换全向轮移动机器人的布局方式与运动的稳定性分析

周卫华[1,2]　王　班[1]　黄善均[1]　郭吉丰[1]
1.浙江大学,杭州,310027　　2.浙江大学台州研究院,台州,318000

摘要:研讨了一种单排的连续切换全向轮及其全方位移动机器人的全向轮布局选择与运动时的稳定性问题,提出了一种单排的连续切换全向轮的结构,并基于此结构建立了移动机器人系统的运动学模型,通过解析系统速度逆雅可比矩阵的秩,得到了系统实现全方位运动的条件,分析给出了实现全方位运动所需的三轮、四轮的布局方式。同时,根据非完整系统的劳斯方程,建立了全向轮机器人的动力学方程,计算了车体在斜坡上运动时不发生后翻和侧翻的条件,并用ADAMS软件进行仿真验证了模型。研究为此类系统的设计和控制提供了理论基础。

关键词:机器人;单排切换轮;布局选择;稳定性分析
中图分类号:TP242.2　　DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2014.07.008

Layout Selection and Stability Analysis of a Mobile Robot Based on Single Row Alternate Wheel

Zhou Weihua[1,2]　Wang Ban[1]　Huang Shanjun[1]　Guo Jifeng[1]
1. Zhejiang University, Hangzhou, 310027
2. Research Institute of Zhejiang University-Taizhou, Taizhou, Zhejiang, 318000

Abstract: This paper introduced layout selection and stability analysis of a mobile robot based on the single row alternate wheel. The structure of a single row alternate wheel was presented, the kinematic model was established, the conditions of the system moving in omni-direction through analyzing the system speed inverse Jacobi rank of matrix were achieved, and the arrangement of the three and four wheels which satisfied the conditions was given. Dynamics equations of the system were obtained according to the nonholonomic system of Rolls equations. The rollover and backward conditions of the system moving on the slope were calculated, and the model was simulated by using ADAMS software. This paper provides theoretical basis for system practical applications.

Key words: robot; single row alternate wheel; layout selection; stability analysis

0　引言

全向轮是轮式移动机器人运动的主要机构[1-2]。目前,全向轮按照轮毂与辊子轴线所成的角度主要分为Mecanum轮和连续切换轮两种。Mecanum轮的轮毂和辊子轴线夹角为45°[3],辊子之间存在间隙,而且辊子在垂直方向的负荷下会发生变形,使得轮子在转动的过程中同地面接触点的高度不断变化,易导致车体振动或打滑[4]。另外,Mecanum轮结构复杂,加工也较困难[5]。连续切换轮的轮毂和辊子的轴线是相互垂直的,可分为双排[6]和单排2种结构。在轮缘考虑用辊子是很自然的,但由于辊子需要支撑(包括轴承)不能使辊子连续(全向轮圆周方向连续),所以出现了双排结构辊子,其结构相对较大,接触点交替,对路面的平整度要求较高。若要在单排中实现连续,必须嵌套,我们提出的单排连续切换轮在轮缘上采用大小辊子,小辊子嵌套在大辊子中,都可以绕与轮毂垂直的轴转动,且具有公共的切面方向,这样就保证了在轮毂滚动时同地面的接触高度不变,此方案已获得发明专利[7]。

基于单排全向轮的移动机器人在平面上可实现具有3个自由度的运动,即前后、左右和自转运动,但与轮数和全向轮的布局方式有关。另外,以往很少有文献考虑到移动机器人在突然启动、紧急减速和做圆周运动时会发生倾翻、侧翻等现象。尤其是对于重心偏高的移动装置,如轮椅、叉车等,研究这方面的问题具有实际意义。

为此,本文首先给出单排连续切换全向轮的结构,并在其基础上探讨了全向轮布局方式与机器人系统运动自由度的关系;然后,通过建立系统斜坡运动时的动力学方程,计算和分析了车体在斜坡上运动时发生倾翻和侧翻的临界条件。

收稿日期:2012-10-31
基金项目:浙江省重大工业项目(2008C01032-3)

1　单排连续切换全向轮的结构

典型的 Mecanum 轮和双排切换轮的结构如图 1、图 2 所示。



图 1　Mecanum 轮



图 2　双排连续切换轮

单排连续切换全向轮的轮缘采用大小辊子间隔分布，小辊子嵌套在大辊子中，大小辊子的轴线是全向轮上的弦。该轮不仅具有绕自身轴向前滚动的能力，同时在外力的作用下也能左右平动，具有 2 个自由度。

单排连续切换全向轮的结构如图 3 所示，大辊子两端有个内锥面，让出空间给小辊子轴，通过 Y 形支架实现，Y 形支架两端既有安装小辊子的孔，也有安装大辊子的轴孔。Y 形支架的中间安装小辊子，同时在 2 个 Y 形支架之间安装大辊子，大小辊子交替分布在轮子整个轮缘上，形成其外形轮廓圆。若干个 Y 形支架形成一个完整的全向轮，安装时先各完成半个轮，合起来嵌套成一轮，把各个 Y 形支架下方的弧形底座插在轮毂上。最后在轮毂中端安装滚动轴承，完成整体万向轮构造。

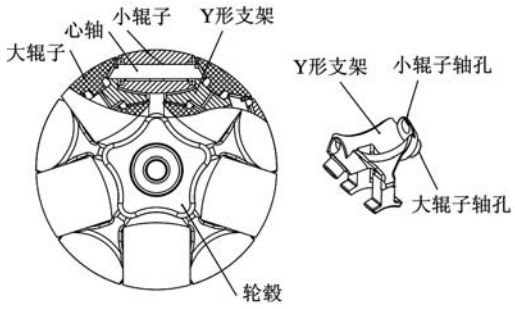


图 3　单排连续切换全向轮结构图

研制的单排连续切换全向轮样机具有运转灵活、结构简单和装配方便等特点。大小辊子的安装角度、数量等问题，Byun 等[8]进行了详细的推导与求解，这里不再赘述。

2　单排连续切换全向轮移动机器人的布局方式

2.1　全向轮与系统速度的映射关系

以轮 i 为例说明，OX_MY_M 为固定于移动机器人车体中心的坐标系，$o_ix'y'$ 为固定于轮子 i 中心的坐标系，$(l\cos\beta_i, l\sin\beta_i, \alpha_i)$ 表示 $o_ix'y'$ 对 OX_MY_M 的位姿，l 为轮子中心到车体中心的距离，如图 4 所示。

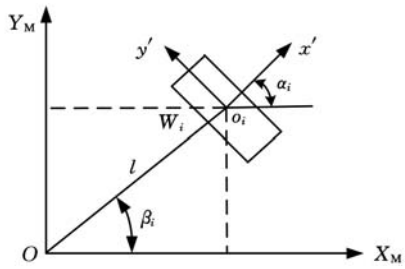


图 4　车体中心与轮子中心的速度关系

设 $(v_{x'}, v_{y'}, \omega)$ 为车体中心在 OX_MY_M 中的速度，$(v'_{ix'}, v'_{iy'}, \omega'_i)$ 为轮子中心 o_i 在 $o_ix'y'$ 中的速度，$(v_{ix'}, v_{iy'}, \omega_i)$ 为 o_i 在 OX_MY_M 中的速度，设 $\dot{\varphi}_i$ 为轮子 i 的旋转速度，$\dot{\gamma}_i$ 为辊子的速度，θ、ω 分别为车体绕 O 点的转角和角速度，r_i 为轮子 i 的半径，r_r 为辊子的半径。据上述条件可得如下关系表达式[9-10]：

$$\left.\begin{aligned} v_{ix'} &= v_x - l\omega\sin\beta_i \\ v_{iy'} &= v_y + l\omega\cos\beta_i \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{ix'} &= v'_{ix'}\cos\alpha_i - v'_{iy'}\sin\alpha_i \\ v_{iy'} &= v'_{ix'}\sin\alpha_i + v'_{iy'}\cos\alpha_i \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$v'_{ix'} = -r_r\dot{\gamma}_i \qquad v'_{iy'} = r_i\dot{\varphi}_i$$

将 $v'_{ix}=-r_r\dot{\gamma}_i$ 和 $v'_{iy}=r_i\dot{\varphi}_i$ 同时代入式(1)和式(2)中，消去 $(v_{ix'}, v_{iy'}, \omega_i)$，可得车体速度与轮子速度的关系表达式：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -l\sin\beta_i \\ 0 & 1 & l\cos\beta_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i\sin\alpha_i & -r_r\cos\alpha_i \\ r_i\cos\alpha_i & -r_r\sin\alpha_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_i \\ \dot{\gamma}_i \end{bmatrix} \tag{3}$$

因为轮子速度是可控的，辊子的速度是不可控的，考虑其双方速度关系建立的系统逆运动学方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & l\cos(\beta_1-\alpha_1) \\ -\sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & l\cos(\beta_2-\alpha_2) \\ -\sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & l\cos(\beta_3-\alpha_3) \\ & \vdots & \\ -\sin\alpha_n & \cos\alpha_n & l\cos(\beta_n-\alpha_n) \end{bmatrix} \tag{5}$$

式中，n 为车体中轮子的数量；$\boldsymbol{R}$ 为逆运动学矩阵。

2.2　多轮驱动的轮子布局选择

由机器人运动学原理可得：当系统逆运动学雅可比矩阵不满秩时，系统存在奇异位形，系统运

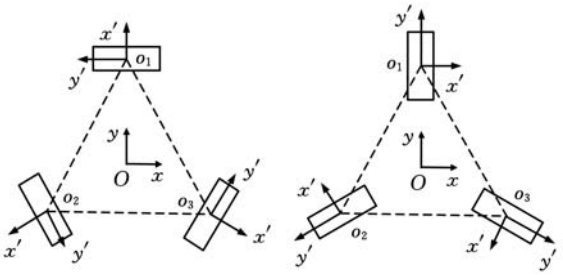
动自由度减少[9]。Jefri 等[10]和 Xu[11]从实验上对基于 Mecanum 轮的四轮移动机器人进行了分析，王一治等[12]则从理论上证明了该类机器人能实现全方位运动四轮的布局方式。同理，本系统实现全方位运动的必要条件是雅可比矩阵 $\boldsymbol{R}$ 列满秩。

为了消除移动机器人 X、Y 方向运动的差异性，可假设各个轮子沿着机器人的底盘均匀分布，其表达式为

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i &= \alpha_1 + \frac{2\pi}{n}(i-1)\\ \beta_i &= \beta_1 + \frac{2\pi}{n}(i-1)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式中，i 为轮子编号，$i \in (2 \sim n)$。

图 5 所示为常见的三轮对称分布的 2 种排布方式。三轮排布方式中轮子与车体中心的几何关系如表 1 所示。



(a) 第 1 种排布方式　　(b) 第 2 种排布方式

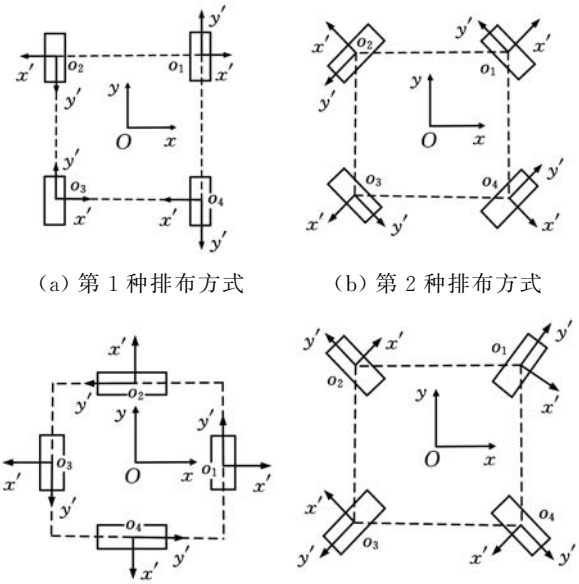
图 5　三轮的对称分布方式

表 1　三轮与车体的几何关系表

	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3
第 1 种方式	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$
第 2 种方式	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$

计算 2 种三轮排布方式的雅可比矩阵的秩，第 1 种方式列满秩，满足全方位运动的条件。第 2 种排布方式列不满秩，不能实现原地旋转。图 6 所示为常见的四轮对称分布的几种排列方式。4 种排布方式中轮子与车体中心的几何关系如表 2 所示。

计算 4 种情况下逆运动学矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的秩，第 1 种、第 4 种排布方式的 $\boldsymbol{R}$ 列不满秩，不满足全方位运动的条件，第 1 种排布方式不能实现 X 方向上的运动，第 4 种排布方式不能实现原地旋转。第 2 种、第 3 种的列满秩，满足全方位运动的条件。其中，第 3 种排布方式可以由第 2 种排布方式通过坐标旋转得到，所以第 2 种、第 3 种排布方式本质上是相同的。



(a) 第 1 种排布方式　(b) 第 2 种排布方式

(c) 第 3 种排布方式　(d) 第 4 种排布方式

图 6　四轮的布局方式

表 2　四轮与车体的几何关系表

	α_1	α_2	α_3	α_4	β_1	β_2	β_3	β_4
第 1 种方式	0	π	0	π	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
第 2 种方式	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
第 3 种方式	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{2}$
第 4 种方式	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$

四轮的车体系统相对于三轮系统来说，增加了一个驱动轮，强化了系统的稳定性，同时减小了每个轮子垂直方向的载荷。由于平面运动只有 3 个自由度，当设计的轮子的数量大于 4 时，显然在增强系统稳定性的同时，会增加整个系统的冗余。综合考虑上述因素，故在本文研制的实际车体中采用了四轮的第 2 种排布方式，样机如图 7。



图 7　基于单排连续全向轮机器人样机

3　运动稳定性分析

为考虑问题全面起见，以车体在斜坡运动的稳定性着手来研究二者之间的关系。当斜坡的倾斜角度为 0° 时，即是平面，故本文所建立的模型适用于车体在平面的运动情况。

3.1　斜坡运动时的动力学方程

取广义坐标 q_1 为车体的 X_M 方向上的位移 $S_{x'}$，q_2 为车体 Y_M 方向上的位移 $S_{y'}$，q_3 为车体的回转角度 θ_0，$q_4 \sim q_7$ 为轮子的旋转角度 $\varphi_1 \sim \varphi_4$，如图 8 所示。J 表示车体的转动惯量，J_ω 为轮子的转动惯量，车体坐标系 OX_MY_M 与斜面坐标系 OXY 之间的夹角为 ψ。

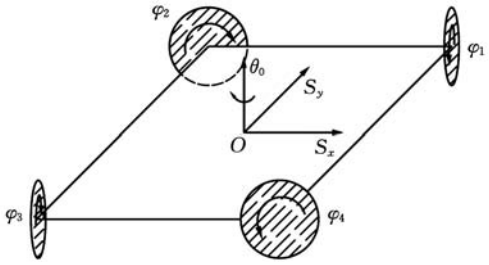


图 8　移动机器人的广义坐标

根据运动学关系，假设轮子在接触处满足纯滚动约束条件，则轮子在轮子平面内的各运动分量与轮子的线速度相等[13]，据此可得到以下约束关系式：

轮 1：

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\dot{S}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{S}_y + l\dot{\theta}_0 = r\dot{\varphi}_1$$

轮 2：

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\dot{S}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{S}_y + l\dot{\theta}_0 = r\dot{\varphi}_2$$

轮 3：

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\dot{S}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{S}_y + l\dot{\theta}_0 = r\dot{\varphi}_3$$

轮 4：

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\dot{S}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{S}_y + l\dot{\theta}_0 = r\dot{\varphi}_4$$

将上述关系式对时间求导，可得到车体的加速度和轮子的加速度，其关系表达式为

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & l \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & l \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & l \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{S}_x \\ \ddot{S}_y \\ \ddot{\theta}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{\varphi}_4 \end{bmatrix} = 0 \tag{7}$$

由轮子和车体的约束方程可知，车体的速度 $\dot{S}_x$、$\dot{S}_y$、$\dot{\theta}_0$ 与轮子的速度存在不可解耦的关系，车体系统受到的约束不能通过积分的方法表示成位姿空间的约束形式，所以车体系统属于非完整约束，根据非完整系统的劳斯方程[14]，其动力学方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = F_{qj} + \sum_{k=1}^{s}\lambda_k B_{kj} \qquad j = 1,2,\cdots,l \tag{8}$$

式中，q_j、F_{qj} 分别为广义坐标与广义力；T 为车体的动能；λ_k 为待定的拉格朗日乘子；B_{kj} 为由约束决定的系数。

车体的动能包括车体的平动动能、转动动能和 4 个轮子的转动动能，设车体总的质量为 m（包括车架、减振器以及 4 个轮子的质量）。车体动能可以表示为[15]

$$T = \frac{1}{2}m\dot{S}_x^2 + \frac{1}{2}m\dot{S}_y^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}J_\omega\dot{\varphi}_i^2 \tag{9}$$

假设车体在倾角为 θ 的斜面上运动，其势能 $V \neq 0$，对应于 q_1 的广义力 F_{q1} 为

$$F_{q1} = -\frac{mg\sin\theta\cos\psi\Delta S_x}{\Delta S_x} = -mg\sin\theta\cos\psi \tag{10}$$

式中，g 为加速度。

同理可得

$$\left.\begin{aligned} F_{q2} &= -mg\sin\theta\sin\psi \\ F_{q3} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

设 T_{a1}、T_{a2}、T_{a3}、T_{a4} 分别表示 4 个轮子的有效驱动力矩，则有

$$F_{qi} = T_{aj} \qquad i = 4,5,\cdots,7;j = 1,2,3,4 \tag{12}$$

由轮子与地面的约束关系可知劳斯方程（式(8)）中由约束决定的系数为

$$B_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad B_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad B_{13} = l \quad B_{14} = -r$$

$$B_{21} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad B_{22} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad B_{23} = l \quad B_{25} = -r$$

$$B_{31} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad B_{32} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad B_{33} = l \quad B_{36} = -r$$

$$B_{41} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad B_{42} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad B_{43} = l \quad B_{47} = -r$$

先解式(8)，再由式(12) 可求得待定的拉格朗日乘子：

$$\lambda_i = \frac{T_{ai} - J_\omega\ddot{\varphi}_i}{r} \qquad i = 1,2,3,4 \tag{13}$$

将式(7)、式(10) ～ 式(13) 代入式(8)，整理可得移动机器人在斜坡上的动力学方程表达式：

$$\left.\begin{aligned} (m + 2\frac{J_\omega}{r^2})\ddot{S}_x &= -mg\sin\theta\cos\psi + \\ &\frac{\sqrt{2}}{2r}(T_{a1} + T_{a2} - T_{a3} - T_{a4}) \\ (m + 2\frac{J_\omega}{r^2})\ddot{S}_y &= -mg\sin\theta\sin\psi + \\ &\frac{\sqrt{2}}{2r}(-T_{a1} + T_{a2} + T_{a3} - T_{a4}) \\ (J + \frac{4l^2J_\omega}{r^2})\ddot{\theta}_0 &= \frac{l}{r}(T_{a1} + T_{a2} + T_{a3} + T_{a4}) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

本文中采用拉格朗日方法求解的车体动力学方程与笔者用牛顿法求解的车体动力学方程结果相同。

3.2 斜坡运动时的稳定性分析

当停止于斜坡上的车体突然启动向上运动时，易向后倾，向下运动紧急减速时易向前倾。图 9 所示为车体发生倾翻时的通用受力模型。

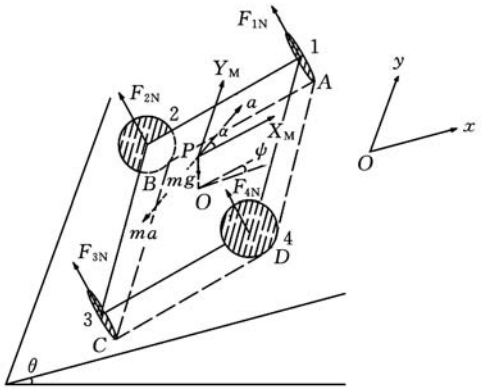


图 9 车体在斜坡上倾翻的受力模型

图 9 中，F_{1N}、F_{2N}、F_{3N}、F_{4N} 分别表示 4 个轮子受到的斜面支持力。α 表示加速度方向与 X_M 方向的夹角，ma 表示引入的惯性力。设轮子的半径为 r，车体重心离地面的距离为 h。4 个轮子与地面的接触点分别为 A、B、C、D。

由于车体在垂直于斜面方向上的力是平衡的，故可得

$$F_{1N}+F_{2N}+F_{3N}+F_{4N}=mg\cos\theta \tag{15}$$

又因 A、C 轮与 B、D 轮的交点在车体的中心位置，故有

$$F_{1N}+F_{3N}=\frac{1}{2}mg\cos\theta \tag{16}$$

$$F_{2N}+F_{4N}=\frac{1}{2}mg\cos\theta \tag{17}$$

以绕 B 点与 AC 平行的线为转动轴，则可得力矩平衡关系式：

$$\begin{aligned}&2F_{4N}l+(F_{1N}+F_{3N})l-mgl\cos\theta+\\&mh(g\sin\theta\cos\psi+a\cos\alpha)\sin45^\circ-\\&mh(a\sin\alpha-g\sin\theta\sin\psi)\sin45^\circ=0\end{aligned} \tag{18}$$

将式(18) 化简可得

$$F_{4N}=\frac{1}{4}mg\cos\theta+\frac{\sqrt{2}\,mh(a\sin\alpha-g\sin\theta\sin\psi)}{4l}-\frac{\sqrt{2}\,mh(g\sin\theta\cos\psi+a\cos\alpha)}{4l} \tag{19}$$

由式(17) 及式(19) 可得

$$F_{2N}=\frac{1}{4}mg\cos\theta-\frac{\sqrt{2}\,mh(a\sin\alpha-g\sin\theta\sin\psi)}{4l}+\frac{\sqrt{2}\,mh(g\sin\theta\cos\psi+a\cos\alpha)}{4l} \tag{20}$$

同理，F_{1N}、F_{3N} 可表示为

$$F_{1N}=\frac{1}{4}mg\cos\theta-\frac{\sqrt{2}\,mh(a\sin\alpha-g\sin\theta\sin\psi)}{4l}-\frac{\sqrt{2}\,mh(a\cos\alpha+g\sin\theta\cos\psi)}{4l} \tag{21}$$

$$F_{3N}=\frac{1}{4}mg\cos\theta+\frac{\sqrt{2}\,mh(a\sin\alpha-g\sin\theta\sin\psi)}{4l}+\frac{\sqrt{2}\,mh(a\cos\alpha+g\sin\theta\cos\psi)}{4l} \tag{22}$$

当车体在斜面上突然启动向后倾翻的临界条件为 F_{1N}，$F_{4N}=0$ 时，有 ψ，$\alpha=0$，按式(19)、式(21) 计算的车体向下的加速度需满足的条件为

$$a\leqslant\frac{\sqrt{2}\,gl\cos\theta-2hg\sin\theta}{2h} \tag{23}$$

车体在斜坡上突然启动，其沿 X_M 运动的加速度是由电机提供的，将式(14) 代入式(23)，可得电机输出力矩所需满足的条件为

$$T_{a1}+T_{a2}-T_{a3}-T_{a4}\leqslant\sqrt{2}\,r[(\frac{\sqrt{2}\,gl\cos\theta-2hg\sin\theta}{2h})\cdot(m+2\frac{J_\omega}{r^2})+mg\sin\theta] \tag{24}$$

同时，由车体 $\ddot{S}_y$ 和 $\ddot{\theta}_0$ 为 0，可得

$$T_{a1}=T_{a2}=-T_{a3}=-T_{a4} \tag{25}$$

移动机器人车体的实际参数值如下：车体质量 m 为 25 kg，轮子的安装位置为 300 mm × 300 mm，轮子中心到车体中心的距离 l 为 212 mm，轮子的质量 m_1 为 0.5 kg，轮子的半径 r 为 50 mm，车体的转动惯量 J 为 0.28 kg·m^2，轮子的转动惯量 J_ω 为 6.25×10^{-4} kg·m^2。

由式(24)、式(25) 可得在不同的车体重心高度 h(0.1 m ～ 0.4 m) 及斜面倾斜角度(0 ～ π/4) 发生车体向前倾翻的临界条件。电机 1 的输出转矩值如图 10 所示。

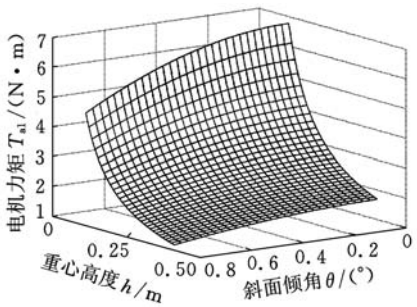


图 10 T_{a1} 与 h、θ 之间的关系图

在实际控制中，电机的输出转矩值应该控制在曲面的下方。同理，根据式(25)可得电机 2、3、4 的转矩输出值与重心高度和斜面倾角的关系。

为了验证模型的正确性，本文运用 ADAMS 软件进行仿真分析。首先，把 PROE 中的移动机器人三维模型导入到 ADAMS 中；然后在大小辊子及轮子与支架轴间添加旋转运动副，再定义辊子与地面间的接触；最后在轮子的旋转方向上添加驱动力矩。为了模拟车体的质量，模拟过程中用一个大的质量块代其进行。在 ADAMS 中建立的模型如图 11 所示。

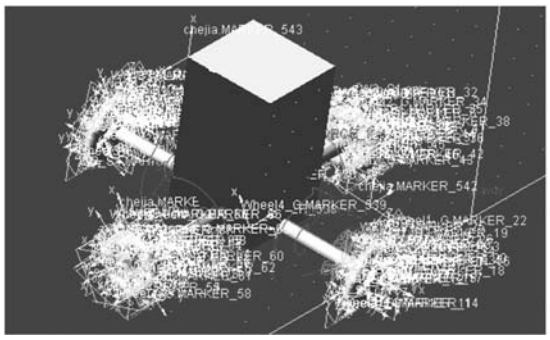
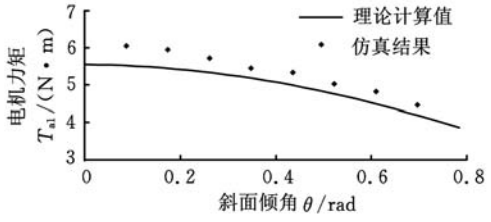
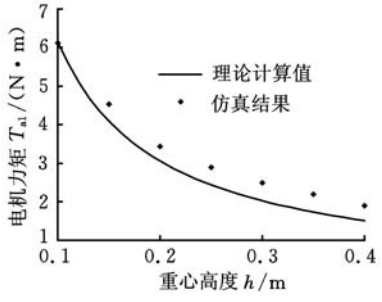


图 11　仿真模型

首先，将车体的重心高度固定为 0.115m，改变斜面的倾斜角度，可以得到图 12a 所示的仿真数据；然后将斜面的倾角固定为 15°，改变车体的重心高度，又可以得到图 12b 所示的仿真数据。仿真值略大于计算值，主要因 ADAMS 软件计算轮子与地面接触时考虑了轮子的变形情况，即便如此，最后的仿真结果也能反映前述模型的正确性。在实际的车体控制中，为了使用的安全性，操控应以理论计算值为依据。



(a) T_{a1} 与 θ 的关系图



(b) T_{a1} 与重心高度 h 的关系图

图 12　T_{a1} 与 h、θ 之间的仿真结果图

同理，当车体向下运动突然减速时，易发生向前倾翻的情况，此时加速度方向向上，计算方法与前述类似。

当车体在斜坡上绕半径为 L 的圆周运动时，若侧向速度过大或转弯半径过小时，容易发生侧翻。车体在斜坡上圆周运动的受力如图 13 所示，图中的虚线圆弧表示车体重心 P 的运动轨迹。

当车体发生侧翻时的临界条件为 $F_{2N}, F_{3N} = 0$ 时，为了安全行驶，车体在斜坡上绕半径为 L 的圆做圆周运动时，需要满足的条件为

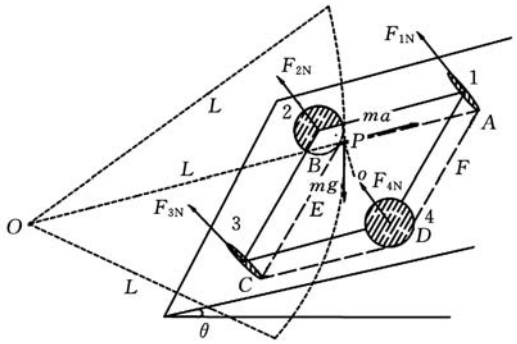


图 13　车体在斜坡上作圆周运动的受力图

$$a_y = \frac{v_y^2}{L} \leqslant \frac{\sqrt{2}\,lg\cos\theta}{2h} + g\sin\theta \tag{26}$$

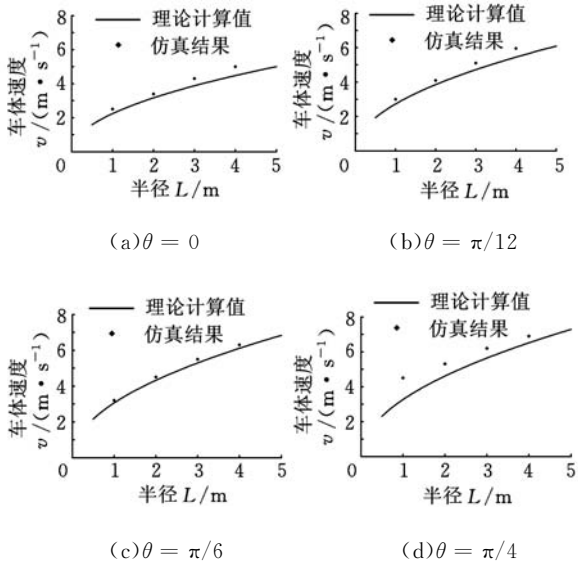
根据车体的动力学方程(式(14))可得

$$v_y = \int_0^T \frac{\sqrt{2}\,r(-T_{a1} + T_{a2} + T_{a3} - T_{a4})}{2mr^2 + 4J_\omega}\mathrm{d}t \tag{27}$$

将式(27)代入式(26)可得

$$\int_0^T \frac{\sqrt{2}}{2r}(-T_{a1} + T_{a2} + T_{a3} - T_{a4})/(m + 2\frac{J_\omega}{r^2})\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{(\frac{\sqrt{2}\,gl\cos\theta}{2h} + g\sin\theta)L} \tag{28}$$

车体在斜面上作圆周运动时，其发生侧翻主要与以下因素有关：车体的侧向速度 v_y、转弯半径 L 以及斜坡倾斜角度 θ。图 14 所示为车体在不同斜坡倾斜角度发生侧翻的临界情况下的车体的速度和转弯半径的关系，其包含理论计算值与 ADAMS 软件仿真结果。



(a)$\theta = 0$　(b)$\theta = \pi/12$

(c)$\theta = \pi/6$　(d)$\theta = \pi/4$

图 14　车体速度和转弯半径的关系

由图 14 可知，转弯半径越大，车体在安全的情况下可以达到的最大侧向速度越大。车体在实际的运行过程中，应当尽量避免出现急转弯的情况。同时，随着斜面倾斜角的增大，车体在相同半径下的最大速度会随之增大。故在实际的公路转弯中，为了防止车体发生侧翻事故，会预留一定范

围的倾斜角度。

4 结论

(1)提出的单排连续切换全向轮具有结构简单、运动灵活和接触点连续等优点。对于同样尺寸全向轮,相对承重较双排全向轮低。

(2)给出了三轮和四轮移动机器人实现全方位运动的几种全向轮布局方式。

(3)给出了移动机器人在斜坡上运动时的动力学方程,推导出移动机器人上行突启时向后倾翻、急弯时侧翻的条件,并用 ADAMS 软件进行了仿真验证,为实际移动机器人本体设计和控制提供了理论依据。

上述的研究结论需要在以后的机器人样机上进行试验验证。同时,仿真结果与理论计算之间的偏差也需要作进一步的研究与分析。

参考文献:

[1] Dudek G, Jenkin M. Computational Principles of Mobile Robotics[M]. New York: Cambridge University Press, 2000.

[2] 赵冬斌,易建强. 全方位移动机器人导论[M]. 北京:科学出版社,2010.

[3] Salih J E M, Rizon M, Yaacob S, et al. Designing Omni-directional Mobile Robot with Mecanum Wheel[J]. American Journal of Applied Sciences, 2006, 3(5): 1831-1835.

[4] 赵冬斌,易建强,邓旭玥. 全方位移动机器人结构和运动分析[J]. 机器人,2003,25(5): 394-398.
Zhao Dongbing, Yi Jianqiang, Deng Xuyue. Structure and Kinematic Analysis of Omni-directional Mobile Robots[J]. Robot, 2003, 25(5): 394-398.

[5] 闫国荣,张海兵. 一种新型轮式全方位移动机构[J]. 哈尔滨工业大学学报,2001,33(6): 854-857.
Yan Guorong, Zhang Haibing. A New Kind of Wheel-model All-directional Moving Mechanism [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2001, 33(6): 854-857.

[6] Dede M I C, Tosunoglu S. Design of a Fault-tolerant Holonomic Mobile Platform[C]//Proceedings of the Conference on Recent Advances in Robotics. Miami, USA: FCRAR, 2006: 1781-1793.

[7] 黄善均,黄长江. 一种新型的万向车轮:中国,1435330A[P]. 2003-08-13.

[8] Byun K S, Kim S J, Song J B. Design of Continuous Alternate Wheels for Omnidirectional Mobile Robots[C]//Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Seoul, South Korea: ICRA, 2001: 767-772.

[9] 冷春涛,曹其新. 四轮全方位移动机器人各向相异性研究[J]. 智能控制学报,2007,3(6): 45-51.
Leng Chuntao, Cao Qixin. Anisotropy of 4-Wheeled Omnidirectional Mobile Robot[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2007, 3(6): 45-51.

[10] Jefri E M S, Mohamed R. Designing Omni-directional Mobile Robot with Mecanum Wheel[J]. American Journal of Applied Sciences, 2006, 3(5): 1831-1835.

[11] Xu P. Mechatronics Design of a Mecanum Wheeled Mobile Robot[J]. Cutting Edge Robotics, 2005, 9(7): 61-74.

[12] 王一治,常德功. Mecanum 四轮全方位系统的运动性能分析及结构优选[J]. 机械工程学报,2009,45(5): 307-310.
Wang Yizhi, Chang Degong. Motion Performance Analysis and Layout Selection for Motion System with Four Mecanum Wheels[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(5): 307-310.

[13] 西格沃特 R. 自主移动机器人导论[M]. 李人厚,译. 西安:西安交通大学出版社,2006.

[14] 刘延柱. 高等动力学[M]. 北京:高等教育出版社,2001.

[15] 董玉红,邓宗全,方海涛,等. 六轮独立驱动月球车的动力学与控制研究[J]. 系统仿真学报,2009,21(4): 1210-1213.
Dong Yuhong, Deng Zhongquan, Fang Haitao, et al. Dynamics and Control Study of Rover with Six Wheels Independently Driven[J]. Journal of System Simulation, 2009, 21(4): 1210-1213.

(编辑 何成根)

作者简介: 周卫华,男,1985 年生。浙江大学电气工程学院博士研究生,浙江大学台州研究院科研人员。研究方向为移动机器人、自动化、电机的驱动与控制。发表论文 3 篇。王 班,男,1988 年生。浙江大学电气工程学院硕士研究生。黄善均,男,1929 年生。浙江大学电气工程学院副教授。郭吉丰,男,1964 年生。浙江大学电气工程学院教授、博士研究生导师。