

串联结构产品可靠性建模与统计分析

陈晓平^{1,2} 陈文华¹ 许家清² 胡如夫²

1. 浙江理工大学机电产品可靠性技术研究浙江省重点实验室, 杭州, 310018

2. 宁波工程学院, 宁波, 315016

摘要:针对电连接器接触对数量较小的情况下,其接触寿命不适宜用 Weibull 分布描述的问题,研究了串联结构产品可靠性建模及统计分析方法,建立了任意接触对数量下电连接器接触寿命分布的可靠性模型,研究了基于区间数据的模型参数点估计和 Bootstrap 区间估计方法。试验研究结果表明:对于串联结构产品,采用串联结构的真实分布比近似地采用威布尔分布的拟合优度高,可更加客观地评价产品的可靠性水平。

关键词:电连接器;串联系统;可靠性模型;统计分析

中图分类号: TH112

DOI: 10.3969/j.issn.1004-132X.2015.12.007

Reliability Modeling and Statistical Analysis for Series Structural Products

Chen Xiaoping^{1,2} Chen Wenhua¹ Xu Jiaqing² Hu Rufu²

1. Zhejiang Province's Key Laboratory for Reliability Technology of Mechanical &

Electrical Products, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, 310018

2. Ningbo University of Technology, Ningbo, Zhejiang, 315016

Abstract: Due to the small number of electrical connector, the contact reliability life could not be described by the Weibull distribution model. This paper studied a new reliability modeling and statistical method, as well as the model parameter point estimation and Bootstrap interval estimation method for the reliability life analysis of any given numbers of electrical connector. The results were verified by the experiments and show that the real distribution may evaluate more accurately than Weibull distribution approximation model for the series structural products.

Key words: electrical connector; series system; reliability modeling; statistical analysis

0 引言

串联结构是一种常见的产品结构类型,对于串联结构产品,只有构成产品的所有单元都能正常地执行其功能时才能保证整个系统有效地运行。一个复杂的航天器系统分布着上千个各种类型的电连接器,只要有一个电连接器发生失效,就有可能导致整个系统发射任务的失败^[1]。电连接器是由一定数量的接触对组成的,只要一个接触对发生失效,就会造成电连接器整体的失效,因此,通常将电连接器接触可靠性问题按串联结构进行研究^[2-4]。目前,已有的研究通常是将电连接器接触寿命近似地按二参数 Weibull 分布来进行的^[5-14],而 Weibull 分布近似方法只有在电连接器接触对数量足够多时理论上才近似可行^[15],而常用电连接器接触对一般数量不多,只有几个或十几个,如 Y11X-0804 型电连接器只有 4 个接触对,因此,有必要研究串联结构产品可靠性建模与统计分析的方法,以便对串联结构产品的可靠性

做出一个正确评价。本文以 Y11X-1419 型电连接器为实例,研究串联结构产品寿命的概率分布,以及相应的统计分析方法。

1 串联结构产品可靠性统计模型

某串联结构产品由 m 个相同的单元组成,各个单元的失效时间分别为 t_1, t_2, \dots, t_m , 它们相互独立, $t_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 的分布密度函数为 $f(t, \theta)$ (θ 是分布参数), 分布函数为 $F(t, \theta)$, 则该串联结构产品的寿命分布相当于求最小次序统计量 $t_{(1)}$ 的分布,即

$$F_{t_{(1)}}(t, \theta) = 1 - (1 - F(t, \theta))^m$$

相应的概率密度函数为

$$f_{t_{(1)}}(t, \theta) = m(1 - F(t, \theta))^{m-1} f(t, \theta)$$

以电连接器为例,假定接触对数量为 m , 其中第 i 个接触对的寿命为 $t_i (i = 1, 2, \dots, m)$, 接触对的寿命相互独立,均服从对数正态分布^[3]。电连接器可视为一个接触对相互独立的串联系统,其接触寿命 T 由最早失效的接触对决定,即 $T = \min\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$, 因此,电连接器的接触寿命分布 $F(t)$ 可由下式来确定^[3]:

收稿日期: 2014-11-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51275480, 51305215);

全国统计科学研究计划资助项目(2012LY061)

$$F(t) = 1 - P\{T > t\} = 1 - (1 - F_x(t))^m \quad (1)$$

其中, $F_x(t)$ 为单个接触对的寿命分布, 有

$$F_x(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{t} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (2)$$

式中, μ 为对数寿命均值; σ 为对数寿命标准差。

因而, 有

$$F(t) = 1 - \left[1 - \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{t} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt \right]^m \quad (3)$$

电连接器接触寿命的概率密度函数为

$$f(t) = -\frac{m}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{t} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt \right]^{m-1} \quad (4)$$

2 模型参数的估计方法

2.1 模型参数点估计

对每个电连接器所有接触对的电阻进行测量工作量过大, 且测试环境对测量有干扰, 因此, 难以对电连接器各接触对的电阻进行连续监测, 所以在可靠性试验过程中只能对接触电阻进行定时测试, 得到的试验数据为区间数据。假设试验的样本量为 n , 试验测试的时间为 $t_j (j=1, 2, \dots, S)$, 其中 t_S 为试验的截尾时间; 在区间 $[t_{j-1}, t_j]$ 内的失效数为 r_j , 在截尾时间 t_S 仍未失效的样本数为

$$C, \text{ 则有 } \sum_{j=1}^{S-1} r_j + C = n.$$

设 $\xi_j = \frac{\ln t_j - \mu}{\sigma}$, 则试验样本的似然函数为

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{j=1}^{S-1} (F(t_j) - F(t_{j-1}))^{r_j} (1 - F(t_S))^C \quad (5)$$

$$F(t_j) = 1 - (1 - \Phi(\frac{\ln t_j - \mu}{\sigma}))^m = 1 - (1 - \Phi(\xi_j))^m$$

式中, $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的分布函数。

对式(5)取对数, 可得

$$\ln L(\mu, \sigma) = \sum_{j=1}^{S-1} (r_j \ln(F(t_j) - F(t_{j-1})) + C \ln(1 - F(t_S))) \quad (6)$$

其中, $F(t_0) = 0$ 。解似然函数方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mu} &= \frac{m}{\sigma} \left\{ \sum_{j=1}^{S-1} \frac{r_j}{F(t_j) - F(t_{j-1})} [\phi(\xi_{j-1})(1 - \Phi(\xi_{j-1}))^{m-1} - \phi(\xi_j)(1 - \Phi(\xi_j))^{m-1}] - \frac{\phi(\xi_S)(1 - \Phi(\xi_S))^{m-1}}{1 - F(t_S)} C \right\} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma} &= \frac{m}{\sigma^2} \left\{ \sum_{j=1}^{S-1} \frac{r_j}{F(t_j) - F(t_{j-1})} [\phi(\xi_{j-1})(1 - \Phi(\xi_{j-1}))^{m-1} \ln t_{j-1} - \phi(\xi_j)(1 - \Phi(\xi_j))^{m-1} \ln t_j] - \frac{\phi(\xi_S)(1 - \Phi(\xi_S))^{m-1}}{1 - F(t_S)} C \ln t_S \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中, $\phi(\cdot)$ 为标准正态分布的密度函数。

即可求得分布参数 μ 和 σ 的极大似然估计 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}$ 。

2.2 模型参数 Bootstrap 区间估计

2.2.1 Bootstrap 区间估计方法

Bootstrap 方法是 Efron 等^[9-10]提出的一种统计模拟方法, 本质上是一种再抽样技术, 即把样本看作是总体的一个“缩影”, 其基本思想是^[11]: 既然经验分布函数是总体分布的良好拟合, 那么来自总体分布的随机观测值的概率性质可以用经验分布函数的相应统计量的概率性质来近似刻画, 而后者可以通过计算机模拟甚至直接计算得到。

设 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为来自总体分布函数 $F(x, \theta)$ 的独立样本, θ 为总体参数, X 可为各种类型的样本序列, 对于航天电连接器接触寿命来说, 是定时测试样本。由 Bootstrap 区间估计方法^[12], 用基于样本 X 的经验分布 $F_n(x, \hat{\theta})$ 代替真实分布 $F(X, \theta)$, 其中 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 基于样本 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的极大似然估计值; 以来自 $F_n(x, \hat{\theta})$ 的独立样本 $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ 代替 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 由此构成新的随机变量 R_n 在 $F_n(X, \hat{\theta})$ 下的经验分布, 以代替随机变量 R 的真实分布, 然后进行假设检验和参数估计。步骤如下^[13]:

(1) 采用极大似然法, 求得基于样本 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的分布参数的极大似然估计值 $\hat{\theta}$ 。

(2) 从新的总体 $F_n(x, \hat{\theta})$ 中, 用蒙特卡罗法随机产生一组与样本 X 相同的伪样本 $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ 。

(3) 基于伪样本 X' , 求出参数 θ 的伪极大似然估计值 $\tilde{\theta}$, 也称为参数 θ 的 Bootstrap 估计值。

(4) 重复以上步骤 M 次 (一般取 $M=1000$) 得到 $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_M$ 。

(5) 由于所关心的可靠性特征量一般为参数 θ 的正则函数 $g(\theta)$ (如可靠寿命或失效率), 那么以这 M 个 Bootstrap 估计值 $\tilde{\theta}$ 和 $g(\tilde{\theta})$ 的经验分布的分位数为端点作区间 $[\tilde{\theta}_{[\alpha]}, \tilde{\theta}_{[\beta]}]$ 和 $[g(\tilde{\theta}_{[\alpha]}), g(\tilde{\theta}_{[\beta]})]$, 即为参数 θ 和可靠性特征量 $g(\theta)$ 在置信度为 γ 时的置信区间, 其中, $\alpha = \frac{1-\gamma}{2}M$, $\beta = \frac{1+\gamma}{2}M$ 。这里 $[\alpha]$ 、 $[\beta]$ 分别表示取 α 、 β 的整数。

2.2.2 Bootstrap 纠偏估计

Bootstrap 区间估计方法的理论基础是: 大样本理论中经验分布函数 $F_n(x, \hat{\theta})$ 依一定概率意义

收敛于 $F(x, \theta)$, 当样本量较小时, 许多寿命分布参数的极大似然估计值 $\hat{\theta}$ 的期望值都大于真值 θ 。如果基于分布参数估计的 Bootstrap 方法得到的随机样本进行统计推断, 必然会偏离原先待估的数值, 因此需要纠正极大似然估计值 $\hat{\theta}$ 关于 θ 的偏性。现参考文献[13]的纠偏方法, 通过再一次采用 Bootstrap 的思想, 用 $E(\tilde{\theta}) - \hat{\theta}$ 估计偏差, 这里 $E(\tilde{\theta})$ 表示 θ 在 Bootstrap 抽样模型下所求得的期望。由于 Bootstrap 估计值的数学期望较难计算, 现用若干次 Bootstrap 抽样过程来代替。步骤如下:

(1) 从总体 $F_n(X, \theta)$ 中独立地抽取 n 个样本 $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, 基于样本 X' 用极大似然估计法求得 Bootstrap 估计 $\tilde{\theta}$, 重复这种计算步骤 N 次, 得到 $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_N$ 。

(2) 用 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\theta}_i$ 作为 $E(\tilde{\theta})$ 的近似, 可以获得

$$\text{Bootstrap 均值纠偏估计值 } \bar{\theta} = 2\hat{\theta} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\theta}_i。$$

这样, 在 2.2.1 节中, 用 $\bar{\theta}$ 代替 $\hat{\theta}$ 即可求得经过纠偏后的 Bootstrap 置信区间。

3 实例分析

3.1 拟合优度检验

Y11X-1419 型电连接器由 $m = 19$ 个接触对组成, 选取样本量 $n = 20$ 进行寿命试验, 温度应力水平为 105°C , 试验的截尾时间为 $t_s = 1500 \text{ h}$ 。定时测试的时间节点、各测试区间的失效数如表 1 所示^[16], 有 5 个样本到达截尾时间没有失效。

表 1 各测试区间的失效数

| | | | | | | |
|---------|------|--------|---------|----------|-----------|-----------|
| 测试区间(h) | 0~96 | 96~366 | 366~757 | 757~1104 | 1104~1381 | 1381~1500 |
| 失效数 | 0 | 0 | 1 | 5 | 4 | 5 |

拟合优度的检验, 可以根据样本的测量值, 检验其母体的分布与假设的理论分布相一致的程度来衡量^[15]。拟合优度检验的方法很多, 其中皮尔逊卡方检验应用最广泛^[17-19], 其统计量为

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2(k - r - 1)$$

式中, k 为区间数; r 为未知参数个数; n_i 为实际频数; p_i 为理论概率的极大似然估计。

对于上述实例, 区间数 $k = 7$, 未知参数个数 $r = 2$, 按电连接器接触寿命真实分布计算, 可得到检验统计量 $\chi^2 = 3.578$ 。在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 由于 $P(\chi^2(k - r - 1) < 3.578) = 0.4561 > \alpha$, 假设不能拒绝, 于是通过真实分布

拟合检验。

若将电连接器接触寿命近似为 Weibull 分布, 则其检验统计量 $\chi^2 = 555.078$ 。在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, $P(\chi^2(k - r - 1) < 555.078) \approx 0 < \alpha$, 假设不能成立, 于是 Weibull 布拟合检验不能通过。

结果表明: 相对于近似 Weibull 分布, 采用串联结构的真实分布能更准确地描述产品的寿命分布。

3.2 参数估计

按照上述模型参数的估计方法, 由表 1 所示的失效数据, 可以求得模型参数 μ 和 σ 的极大似然估计值分别为 $\hat{\mu} = 7.995$ 和 $\hat{\sigma} = 0.488$; 在 90% 的置信度下, 参数 μ 和 σ 的 Bootstrap 置信区间分别为 $[7.737, 8.302]$ 和 $[0.334, 0.662]$ 。由此可得, Y11X-1419 型电连接器在 105°C 下的接触寿命分布模型可表示为

$$F(t) = 1 - \left[1 - \frac{1}{0.488 \sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{t} e^{-\frac{(\ln t - 7.995)^2}{2 \times 0.488^2}} dt \right]^{19}$$

相应地, 可靠度函数为

$$R(t) = 1 - F(t) = \left[1 - \frac{1}{0.488 \sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{t} e^{-\frac{(\ln t - 7.995)^2}{2 \times 0.488^2}} dt \right]^{19}$$

3.3 估计精度检验

现取一组真值 $\mu = 3, \sigma = 2$, 考察小样本条件下置信区间的估计精度, 取样本容量 n 分别为 10、20 和 30, 置信水平设定为 90%。利用蒙特卡罗方法, 由式(3)表示的真实分布函数 $F(t)$ 产生一组伪随机样本 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 利用极大似然估计法求得参数 μ 和 σ 的估计值 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}$, 采用 Bootstrap 纠偏估计法得到纠偏估计值 $\bar{\mu}$ 和 $\bar{\sigma}$, 将 $\bar{\mu}$ 和 $\bar{\sigma}$ 作为参数的真值, 重复抽样获得 μ 和 σ 的 Bootstrap 置信区间如表 2 所示。

表 2 不同样本量下的 Bootstrap 置信区间精度模拟结果

| 置信度 | 样本量 | 置信区间及覆盖率 | |
|-----|-----|---------------------|---------------------|
| | | 参数 μ | 参数 σ |
| 90% | 10 | (2.02, 3.36), 90.6% | (1.96, 2.76), 89.1% |
| | 20 | (2.46, 3.81), 90.4% | (1.87, 2.68), 89.4% |
| | 30 | (2.43, 3.77), 89.9% | (1.84, 2.64), 90.2% |

从模拟结果看, 在各置信水平和各样本容量下, 用 Bootstrap 方法求得的置信区间的估计值覆盖率都基本达到置信水平的要求, 表明本文所提出的模型参数估计方法是可行的。

4 结束语

本文在建立串联结构产品可靠性模型的基础上, 研究了基于区间试验数据的模型参数点估计方法, 同时研究了通过 Bootstrap 区间估计和纠

偏处理求解小样本条件下模型参数和特征量的置信区间估计的方法。研究表明:对于串联结构产品,采用串联结构的真实分布比近似 Weibull 分布拟合效果好,可更加客观地评价产品的可靠性水平。

参考文献:

- [1] 邱利琼,舒俊辉. 串联系统可靠性模糊优化[J]. 重庆大学学报,2002,25(7):20-22.
Qiu Liqiong, Shu Junhui. Fuzzy Optimization for Reliability Apportionment of Series System[J]. Journal of Chongqing University(Natural Sciece Edition), 2002,25(7):20-22.
- [2] 高亮,陈文华,刘娟,等. 航天电连接器的空间环境效应和失效模式分析[J]. 中国机械工程,2010,21(13):1598-1604.
Gao Liang, Chen Wenhua, Liu Juan, et al. Analysis of Space Environment Effects and Failure Modes of Aerospace Electrical Connectors[J]. China Mechanical Engineering, 2010,21(13):1598-1604.
- [3] 陈文华,程耀东,李平真,等. 航天电连接器的可靠性数学模型[J]. 航空学报,1997,18(6):732-734.
Chen Wenhua, Cheng Yaodong, Li Pingzhen, et al. Reliability Mathematics Model of Aerospace Electrical Connector[J]. Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica, 1997,18(6):732-734.
- [4] 潘骏. 航天电连接器振动可靠性建模与评估[D]. 杭州:浙江大学,2002.
- [5] 陈文华,杨帆,刘俊俊,等. 航天电连接器的可靠性统计通用模型[J]. 机械工程学报,2012,48(22):177-181,188.
Chen Wenhua, Yang Fan, Liu Junjun, et al. Theory and Method for Simulation Evaluation of Accelerated Life Test Plan under Step-stress[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(22): 177 - 181, 188.
- [6] 钱萍,陈文华,马子魁,等. 综合应力加速寿命模型验证方法的研究[J]. 机械工程学报,2010,46(24):156-161.
Qian Ping, Chen Wenhua, Ma Zikui, et al. Research of Multiple Stresses Accelerated Life Model Verification Method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010,46(24):156-161.
- [7] 钱萍,陈文华,高亮,等. 航天电连接器综合应力可靠性统计模型的验证[J]. 中国机械工程,2011,22(3):257-261,273.
Qian P, Chen W H, Gao L, et al. Reliability Statistical Model Verification of Aerospace Electrical Connectors under Multiple Stresses[J]. China Mechanical Engineering, 2011,22(3):257-261,273.
- [8] Karl V, Bury K. Statistical Models in Applied Science[M]. New York: John Wiley & Sons, 1975.
- [9] Efron B, Tibshirani R. An Introduction to the Bootstrap[M]. London: Chapman & Hall, 1993.
- [10] Efron B. Better Bootstrap Confidence Intervals[J]. Journal of American Statistical Association, 1987(82):171-185.
- [11] 赵宇,杨军,马小兵. 可靠性数据分析教程[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,2009.
- [12] Efron B. Bootstrap Methods[J]. The Annals of Statistics, 1979,7(1):1-26.
- [13] 陈文华,李奇志,张为鄂. 产品可靠性的 bootstrap 区间估计方法[J]. 机械工程学报,2003,39(6):106-109.
Chen Wenhua, Li Qizhi, Zhang, Weie. Method of Bootstrap Interval Estimation for Product Reliability[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2003,39(6):106-109.
- [14] 普雷斯 W H, 弗拉内里 B P, 托科斯基 S A. 数值方法大全[M]. 王璞,等译. 兰州:兰州大学出版社,1991.
- [15] 张杰,王海清,李玉明,等. 基于主观估计法和 FMEDA 的失效数据分析及应用[J]. 计算机工程与应用,2013,49(16):255-259.
Zhang Jie, Wang Haiqing, Li Yuming, et al. Failure Data Analysis Based on Subjective Estimation and FMEDA and Application[J]. Computer Engineering and Applications, 2013,49(16):255-259.
- [16] 陈文华. 航天电连接器可靠性试验和分析的研究[D]. 杭州:浙江大学,1997.
- [17] Rausand M. System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and Applications[M]. 北京:国防工业出版社,2010.
- [18] 庄楚强,何春雄. 应用数理统计基础[M]. 广州:华南理工大学出版社,2006.
- [19] 贾希胜. 以可靠性为中心的维修决策模型[M]. 北京:国防工业出版社,2001.

(编辑 郭伟)

作者简介:陈晓平,男,1978年生。浙江理工大学机电产品可靠性技术研究浙江省重点实验室博士后研究人员,宁波工程学院机械工程学院副教授。主要研究方向为疲劳强度可靠性设计与试验。陈文华(通信作者),男,1963年生。浙江理工大学机电产品可靠性技术研究浙江省重点实验室教授、博士研究生导师。许家清,男,1965年生。宁波工程学院机械工程学院高级统计师。胡如夫,男,1966年生。宁波工程学院机械工程学院教授、博士。