

# Weibull 分布产品小样本定时截尾 试验方案下的可靠性评估

丛伟<sup>1</sup> 陈晓阳<sup>1</sup> 王志坚<sup>1</sup> 顾家铭<sup>2</sup>

1. 上海大学, 上海, 200072      2. 上海天安轴承有限公司, 上海, 201108

**摘要:**针对 Weibull 分布产品小样本定时截尾试验方案下的可靠性评估问题, 假设样本结构在截尾时间为使该样本结构出现概率最大的截尾时间区间内的任意一点时产生, 应用 Monte Carlo 模拟方法, 发现形状参数矩估计量中值与其真值之比仅取决于样本结构, 而不受分布母体影响, 据此提出了中值无偏矩估计法, 并给出了 2~12 样本量的中值无偏系数取值。以偏差和均方根误差为评价指标, 通过数值模拟方法, 对该方法和矩估计法进行比较后发现, 在两项指标上, 前者较后者均具有明显优势。通过试验验证了所提出方法的实用性、有效性和优越性。

**关键词:** Weibull 分布; 可靠性评估; Monte Carlo 模拟; 中值无偏矩估计

**中图分类号:** TH133.33; TB114.3; O213.2      **DOI:** 10.3969/j.issn.1004-132X.2013.14.010

## Reliability Evaluation of Products with Life Following Weibull Distribution under Type I Censoring Test Plan with Small Sample Size

Cong Wei<sup>1</sup> Chen Xiaoyang<sup>1</sup> Wang Zhijian<sup>1</sup> Gu Jiaming<sup>2</sup>

1. Shanghai University, Shanghai, 200072      2. Shanghai Tian'an Bearing Co., Ltd., Shanghai, 201108

**Abstract:** For reliability evaluation of the life following Weibull distribution under Type I censoring test plan with small sample size, it is discovered on the basis of Monte Carlo simulations that the ratio of the median of the shape parameter moment estimation and the true value of the shape parameter depends only on the sample size and the failure number while neither on the shape parameter nor the scale parameter, under the assumption that the failure number is in accordance with the arbitrary time in the corresponding time interval. Based on this, a median unbiased moment estimation method was proposed, and the values of the bias correcting factor for the sample sizes of 2~12 were provided. Further, the proposed method was compared with moment estimation method through numerical analysis, and the results show that the former performs significantly better than the latter, taking median bias and RMSE (root mean square error) as evaluation criteria. Finally, practicality, validity and superiority of the proposed method were verified by conducting two tests.

**Key words:** Weibull distribution; reliability evaluation; Monte Carlo simulation; median unbiased moment estimation

## 0 引言

大多数电子元器件和机械设备的寿命服从 Weibull 分布, 为评估其可靠性, 常通过理论计算和试验两种途径。相对而言, 试验更具说服力。考虑到产量和成本等因素, 试验常采用小样本定时截尾<sup>[1-2]</sup>方案。对试验结果进行分析得到寿命分布是可靠性评估的关键, 这需要优良的评估方法。

国内外学者对 Weibull 分布的估计方法进行了大量研究。Sirvanci 等<sup>[2]</sup>利用 Weibull 分布与极值分布之间的转换关系研究了 Weibull 分布下

定时截尾数据的参数矩估计问题, 证明了其构造的形状参数与尺度参数的矩估计量具有强相合性, 并指出其构造的矩估计量的性能在小样本情形下也是好的。冯自立等<sup>[3-4]</sup>在 Weibull 分布小样本定时截尾情形下对矩估计法、极大似然估计法、Ross<sup>[5]</sup>和 Jacquelin<sup>[6]</sup>各自给出的极大似然无偏估计法、最小二乘估计法和加权最小二乘估计法进行比较后发现, 矩估计法和极大似然估计法的性能相当并优于其他估计法, 且前者计算简单, 而后者计算复杂, 甚至得不到解, 所以前者较后者稍有优势, 但这些估计法均有偏。国家标准<sup>[7]</sup>建议在样本量不超过 25 的情况下采用最佳线性不变估计法对 Weibull 分布的参数进行估计, 但针对的是定数截尾。王坚永等<sup>[8]</sup>也建议采用最佳线

收稿日期: 2012-05-07

基金项目: 国防科工委“十一五”重点科研项目(D09-0109-06-004); 上海市教委重点创新项目(11ZZ89)

性不变估计法估计定数截尾场合下 Weibull 分布的参数,但并未如文献[7]给出适用的样本量。McCool<sup>[9]</sup>和 Harris<sup>[10]</sup>对形状参数的极大似然估计量进行了修偏研究并获得中值无偏估计,McCool 还获得均值无偏估计,但均不在定时截尾情形下。Sirvanci 等<sup>[2]</sup>指出在有限样本定时截尾情形下由于样本结构的随机性而不存在形状参数无偏估计量,作出此论断的前提是按照设定的截尾时间进行试验将产生所有可能的试验结果。

冯自立等<sup>[11]</sup>采用 Monte Carlo 方法对 Weibull 分布小样本定时截尾数据进行研究后发现,在一定的样本量和分布母体下,使某样本结构出现概率最大的截尾时间是截尾时间某区间上的任意值。据此,本文在假设样本结构是在截尾时间为使该样本结构出现概率最大的截尾时间区间内的任意一点时产生的前提(以下简称“所设前提”)下,在矩估计法基础上,提出了新的 Weibull 分布产品小样本(本文中指样本量不超过 12)定时截尾试验方案下的可靠性评估方法,将其与矩估计法进行了比较,发现在偏差和均方根误差两项评价指标上,前者均较后者有明显优势,并通过试验验证了所提出方法的实用性、有效性和优越性。

### 1 Weibull 分布小样本定时截尾数据的矩估计

若随机变量  $T$  服从形状参数为  $\beta$  而尺度参数为  $\eta$  的两参数 Weibull 分布,则其分布函数和概率密度函数分别为

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right) \quad (1)$$

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right) \quad (2)$$

$t > 0, \beta > 0, \eta > 0$

式中,  $t$  为随机变量  $T$  的观测值。

对  $n$  个试件同时进行定时截尾试验,假设各试件的寿命独立且来自同一分布母体,试验期间无试件被替代,当试验进行到预先设定的时间  $t_0$  就停止试验,得到一系列观察值  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , 其中有  $r$  个数据是失效数据,而剩余的  $n-r$  个数据是未失效数据且都等于预先设定的截止时间。对于失效数据,记其状态  $\delta_i = 1$ ,而对于未失效数据,记其状态  $\delta_i = 0, i = 1(1)n$ 。假设试验后在时间  $(0, t_0]$  内至少有一个试件失效且并非全部试件失效,即失效数满足关系  $1 \leq r \leq n-1$ 。则有<sup>[2,4,11-12]</sup>

$$\hat{\beta}_{ME} = \frac{n\hat{h}(\rho)_{ME}}{\sum_{i=1}^n \delta_i (\ln t_0 - \ln t_i)} \quad (3)$$

$$\hat{\eta}_{ME} = \frac{t_0}{[\ln(1 - \hat{\rho}_{ME})^{-1}]^{1/\hat{\beta}_{ME}}} \quad (4)$$

$$\hat{\rho}_{ME} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \quad (5)$$

$$\hat{h}(\rho)_{ME} = \hat{\rho}_{ME} \ln \ln \frac{1}{1 - \hat{\rho}_{ME}} - \int_0^{\hat{\rho}_{ME}} \ln \ln \frac{1}{1-u} du \quad (6)$$

式中,下标 ME 表示矩估计(moment estimation);  $\hat{\beta}_{ME}$  为形状参数的矩估计;  $\hat{\eta}_{ME}$  为尺度参数的矩估计;  $\hat{\rho}_{ME}$ 、 $\hat{h}(\rho)_{ME}$  和  $u$  为中间变量。

### 2 形状参数中值无偏矩估计假设

考虑到在实际情况下,试验结束后样本结构  $(n, r)$ , 即投入的试验样本量  $n$  和失效数  $r$  是明确的,不明确且待求解的是分布母体  $\text{Wei}(\beta, \eta)$ , 即需求解形状参数  $\beta$  和尺度参数  $\eta$ , 现假设存在形状参数的中值无偏矩估计量

$$\hat{\beta}_{MUME} = \frac{\hat{\beta}_{ME}}{U_{ME}(n, r)} \quad (7)$$

式中,下标 MUME 表示中值无偏矩估计(median unbiased moment estimation);  $U_{ME}(n, r)$  为基于矩估计的形状参数中值无偏系数。

$U_{ME}(n, r)$  的取值仅取决于样本结构  $(n, r)$ , 而不受分布母体  $\text{Wei}(\beta, \eta)$  影响。样本结构是在截尾时间为使该样本结构出现概率最大的截尾时间区间内的任意一点时产生的,此为形状参数的中值无偏矩估计量中值无偏的前提。则有

$$\hat{\beta}_{0.5MUME} = \frac{\hat{\beta}_{0.5ME}}{U_{ME}(n, r)} \quad (8)$$

式中,  $\hat{\beta}_{0.5ME}$  为形状参数的矩估计量中值;  $\hat{\beta}_{0.5MUME}$  为形状参数的中值无偏矩估计量中值。

因为  $\hat{\beta}_{MUME}$  中值无偏,即

$$\hat{\beta}_{0.5MUME} = \frac{\hat{\beta}_{0.5ME}}{U_{ME}(n, r)} = \beta \quad (9)$$

所以

$$\frac{\hat{\beta}_{0.5ME}}{\beta} = U_{ME}(n, r) \quad (10)$$

因此,假设成立与否取决于:在所设前提下,形状参数矩估计量中值与其真值之比  $\hat{\beta}_{0.5ME}/\beta$  (记为  $v_{0.50}$ , 以下简称“比值”)是否仅取决于样本结构  $(n, r)$ , 而不受分布母体  $\text{Wei}(\beta, \eta)$  影响。

### 3 比值与样本结构、分布母体之间的关系

为考查在所设前提下,比值是否仅取决于样本结构  $(n, r)$  而不受分布母体  $\text{Wei}(\beta, \eta)$  影响,应用 Monte Carlo 方法进行计算机模拟试验研究。模拟时,对于不同样本结构,均取使其出现概率最大的截尾时间下限作为截尾时间  $t_0$ 。为保证足够的精度,抽样次数  $m$  应取得足够大,取  $m = 10\ 000$ 。对每个模拟样本采用式(3)计算出形状

参数矩估计值。在选定的样本结构和分布母体下,将产生10 000个形状参数矩估计值,其中值即为该次模拟的形状参数矩估计量中值。

### 3.1 比值与样本结构、形状参数之间的关系

选取 $n=10, \beta=1(1)10, \eta=1$ 样本进行 Monte Carlo 计算机模拟试验, 所得结果如表 1 和图 1 所示。

表 1  $n=10, \beta=1(1)10, \eta=1$  样本各样本结构下的比值及其相对极差

失效数 $r$	形状参数 $\beta$										相对极差(%)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	1.4513	1.4584	1.4420	1.4441	1.4355	1.4294	1.4677	1.4081	1.4304	1.3836	5.86
2	1.1879	1.1982	1.1686	1.1968	1.1906	1.2052	1.1866	1.2023	1.1744	1.1823	3.07
3	1.1300	1.1204	1.1339	1.1207	1.1308	1.1222	1.1090	1.1267	1.1207	1.1196	2.22
4	1.0952	1.1047	1.1068	1.0913	1.1018	1.1026	1.1036	1.0921	1.1030	1.1040	1.41
5	1.0851	1.0992	1.0924	1.0994	1.0825	1.0930	1.0878	1.0899	1.0987	1.0922	1.54
6	1.1010	1.0872	1.0906	1.0888	1.0847	1.0854	1.0904	1.0862	1.0933	1.0958	1.50
7	1.1055	1.1025	1.0951	1.0961	1.0952	1.0955	1.0973	1.1069	1.1003	1.0976	1.08
8	1.1056	1.1186	1.1101	1.1202	1.1179	1.1220	1.1168	1.1140	1.1130	1.1123	1.47
9	1.1562	1.1547	1.1546	1.1551	1.1466	1.1519	1.1476	1.1577	1.1500	1.1532	0.96

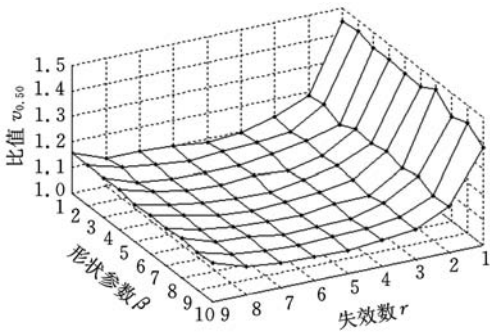


图 1  $n=10, \beta=1(1)10, \eta=1$  样本各样本结构下的比值模拟结果三维图

其他选定样本量和尺度参数下的模拟也产生类似结果。

因此,在所设前提下,比值仅取决于样本结构,而不受形状参数影响。

### 3.2 比值与样本结构、尺度参数之间的关系

选取 $n=10, \beta=3, \eta=1 \times 10^{j-1} (j=1(1)6)$ 样本进行 Monte Carlo 计算机模拟试验, 结果如表 2 和图 2 所示。

从表 2 和图 2 可见,特定尺度参数各样本结构下的比值有很大不同,表明比值与样本结构有关。从表 2 可见,各样本结构下比值的相对极差都很小,处于 $[0.48\%, 2.45\%]$ 区间。考虑到样本数据精度、抽样次数和计算误差等因素对最终计算结果的影响,而各样本结构下比值的相对极差接近于 0,表明比值不受尺度参数影响。

其他选定样本量和形状参数下的模拟也产生类似结果。

从表 1 和图 1 可见,特定形状参数各样本结构下的比值有很大不同,表明比值与样本结构有关。从表 1 可见,各样本结构下比值的相对极差都很小,处于 $[0.96\%, 5.86\%]$ 区间。考虑到样本数据精度、抽样次数和计算误差等因素对最终计算结果的影响,而各样本结构下比值的相对极差接近于 0,表明比值不受形状参数影响。

表 2  $n=10, \beta=3, \eta=1 \times 10^{j-1} (j=1(1)6)$  样本各样本结构下的比值及其相对极差

失效数 $r$	尺度参数 $\eta$						相对极差(%)
	1	10	100	1000	10 000	100 000	
1	1.4420	1.4251	1.4173	1.4199	1.4285	1.4249	1.73
2	1.1686	1.1923	1.1834	1.1876	1.1634	1.1657	2.45
3	1.1339	1.1204	1.1222	1.1126	1.1145	1.1184	1.90
4	1.1068	1.0939	1.0970	1.1088	1.0991	1.1088	1.36
5	1.0924	1.0880	1.0760	1.0921	1.0915	1.0869	1.51
6	1.0906	1.0974	1.0996	1.0949	1.0943	1.0876	1.10
7	1.0951	1.1037	1.0955	1.0994	1.0938	1.0941	0.90
8	1.1101	1.1150	1.1182	1.1162	1.1097	1.1091	0.82
9	1.1546	1.1524	1.1529	1.1557	1.1580	1.1564	0.48

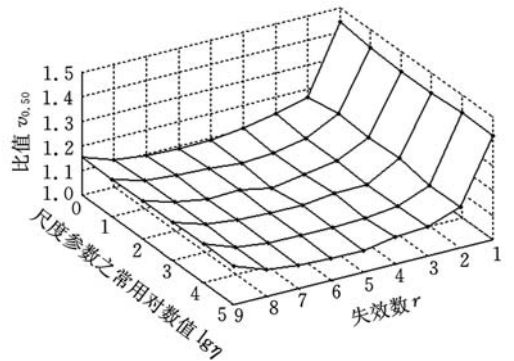


图 2  $n=10, \beta=3, \eta=1 \times 10^{j-1} (j=1(1)6)$  样本各样本结构下的比值模拟结果三维图

因此,在所设前提下,比值仅取决于样本结构,而不受尺度参数影响。

综上,应用 Monte Carlo 方法进行计算机模拟试验研究后发现,在所设前提下,比值仅取决于样本结构 $(n, r)$ ,而不受分布母体  $\text{Wei}(\beta, \eta)$  影响。

### 4 形状参数中值无偏矩估计

通过上面的研究得到,在所设前提下,形状参数中值无偏矩估计假设成立,即存在形状参数的中值无偏矩估计量。最终构建出如式(7)所示的形状参数的中值无偏矩估计量。

至此,根据式(3)、式(4)和式(7)可得到小样本定时截尾情形下 Weibull 分布的形状参数估计值和相应的尺度参数估计值(这里的“相应”指式(4)中形状参数的矩估计值改用形状参数的中值无偏矩估计值)。将此估计称为“中值无偏矩估计”。

由式(10)得

$$U_{ME}(n,r) = \frac{\hat{\beta}_{0.5ME}}{\beta} \quad (11)$$

既然在所设前提下比值仅取决于样本结构而不受分布母体影响,为获得各样本结构下的比值,就可以在任意分布母体下进行 Monte Carlo 计算机模拟试验。为综合考虑各母体和模拟误差,模

拟方案设定如下:选定样本量  $n$ ,母体依次设定为形状参数  $\beta=1(1)10$ ,尺度参数  $\eta=1$ ;对于不同样本结构,均取使其出现概率最大的截尾时间下限作为截尾时间  $t_0$ ;为保证足够的精度,抽样次数  $m$  应取得足够大,取  $m=10\ 000$ 。依据该方案进行试验后,对每个模拟样本采用式(3)计算出形状参数矩估计值。在选定的样本结构和分布母体下,将产生 10 000 个形状参数矩估计值,其中值即为该次模拟的形状参数矩估计量中值。取相应比值的均值作为  $U_{ME}(n,r)$  的近似值  $A$ ,即

$$A = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} U_{MEk}(n,r) = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} \frac{\hat{\beta}_{0.5MEk}}{\beta_k} \quad (12)$$

式中,  $U_{MEk}(n,r)$  为第  $k$  次模拟时得到的比值;  $\beta_k = k$ ;  $\hat{\beta}_{0.5MEk}$  为对应  $\beta_k$  的形状参数矩估计量中值。

于是

$$U_{ME}(n,r) = \frac{\hat{\beta}_{0.5ME}}{\beta} \approx A = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} \frac{\hat{\beta}_{0.5MEk}}{\beta_k} \quad (13)$$

为方便使用,表 3 给出了 2 ~ 12 样本量各样本结构下的  $U_{ME}(n,r)$  取值。

表 3 2~12 样本量各样本结构下的中值无偏系数取值

样本量 $n$	失效数 $r$										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	1.6093										
3	1.4637	1.3373									
4	1.4378	1.2537	1.2665								
5	1.4283	1.2123	1.1920	1.2233							
6	1.4315	1.1999	1.1561	1.1563	1.1969						
7	1.4155	1.1944	1.1439	1.1305	1.1407	1.1833					
8	1.4186	1.1870	1.1372	1.1151	1.1130	1.1307	1.1712				
9	1.4270	1.1868	1.1302	1.1039	1.1018	1.1047	1.1193	1.1622			
10	1.4350	1.1893	1.1234	1.1005	1.0920	1.0903	1.0992	1.1151	1.1528		
11	1.4288	1.1867	1.1188	1.0976	1.0870	1.0842	1.0854	1.0908	1.1091	1.1489	
12	1.4343	1.1874	1.1188	1.0923	1.0816	1.0750	1.0780	1.0799	1.0866	1.1046	1.1452

### 5 截尾时间的选取对形状参数中值无偏系数使用范围的影响

为考查基于截尾时间下限求得的中值无偏系数对整个截尾时间区间的适应性,在各样本结构下,分别选取相应截尾时间区间的四个等分点(上下限及其之间两个等分点)作为截尾时间对矩估计法进行了 Monte Carlo 计算机模拟试验研究。

模拟结果显示,各样本结构下的形状参数矩估计量中值几乎不受截尾时间影响。因此,基于截尾时间下限的结果完全适用于整个截尾时间区间,即中值无偏矩估计对于截尾时间的适应性可从截尾时间下限推广至整个截尾时间区间。

### 6 中值无偏矩估计法和矩估计法的性能比较

估计值的可靠性主要取决于均方根误差,而减小偏差能有效减小均方根误差<sup>[13]</sup>。因此,对于小样本,修偏方法能得到更可靠的参数估计。中值无偏矩估计正是基于矩估计而建立的无偏估计,因此确立以偏差和均方根误差为评价指标。

应用 Monte Carlo 方法进行计算机模拟试验研究。模拟时,对于不同样本结构,均取使其出现概率最大的截尾时间下限作为截尾时间,抽样次数为 10 000。

以从分布母体 Wei(5,1000) 中随机抽取的容量为 8 的定时截尾样本为例进行考查。各估计量的偏差和均方根误差结果见表 4 ( $e_r = |M - \beta| / \beta$ )。用

箱线图表示各样本结构下的形状参数估计量 90% 分布区间,如图 3 所示。图中,钻石形状左右端点对应表示 25% 分位数和 75% 分位数,内部竖线表示中值,即 50% 分位数,整个箱线图的左右端点对应表示 5% 分位数和 95% 分位数,而形状参数真值用椭圆标出。

表 4  $n = 8, \beta = 5, \eta = 1000$  样本各样本结构下的形状参数估计量评价指标值

	评价指标	失效数 $r$						
		1	2	3	4	5	6	7
中值无偏矩估计法	中值 $M$	5.04	4.97	4.94	5.03	5.04	4.99	4.99
	偏差 $e_r(\%)$	0.75	0.66	1.15	0.61	0.75	0.14	0.14
	均方根误差 $e_{RMS}$	12.20	4.53	2.93	2.33	1.96	1.60	1.36
矩估计法	中值 $M$	7.15	5.90	5.62	5.61	5.61	5.65	5.85
	偏差 $e_r(\%)$	42.93	17.91	12.42	12.19	12.14	12.91	16.96
	均方根误差 $e_{RMS}$	18.17	5.73	3.56	2.79	2.38	2.04	1.92

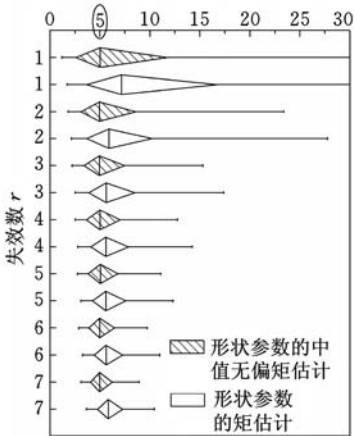


图 3  $n = 8, \beta = 5, \eta = 1000$  样本各样本结构下的形状参数估计量 90% 分布区间

从图 3 可以看出,对于作为特殊值的各分位数,中值无偏矩估计量的分位数相对于对应的矩估计量的分位数左移,即前者小于后者。通过表 3 可知,这是形状参数中值无偏系数  $U_{ME}(n, r)$  始终大于 1 的必然结果。

结合图 3 和表 4 可以看出:① 中值无偏矩估计量存在微弱偏差(不足 1.2%),考虑到样本数据精度、抽样次数、中值无偏系数取为近似值和计算误差等因素,偏差必定存在,但不足 1.2% 的偏差相对理想状态下的零偏差同样令人满意;② 矩估计量存在较大偏差,随着失效数增加,呈现出先减小后增大的趋势,在失效数为 1 的情形下存在严重偏差,达到 42.93%,而在其余样本结构下,维持在 15% 附近;③ 中值无偏矩估计量的均方根误差低于对应的矩估计量的均方根误差,降幅明显

并且随着失效数增加而呈现出先减小后增大的趋势:32.86%、20.94%、17.70%、16.49%、17.65%、21.57%、29.17%;④ 两种估计量的均方根误差随着失效数增加均逐渐减小。

其他选定样本量和分布母体的情形也产生类似结果。

为考查上述性能比较结果对整个截尾时间区间的适应性,同样应用 Monte Carlo 方法进行了计算机模拟试验研究。结果表明,只要样本结构是在截尾时间为使该样本结构出现概率最大的截尾时间区间内的任意一点时产生的,上述性能比较结果仍然成立。

考虑到实际寿命试验中,并不明确试验产生的样本结构是否就是预先设定的截尾时间能产生的概率最大的样本结构,考查中值无偏矩估计法与矩估计法的性能比较结果对于样本结构与截尾时间并不严格要求存在对应关系的一般情形的适应性显得尤为必要。虽然形状参数中值无偏系数是在所设前提下求得的,但对于任意的样本结构均可使用,只是此时并不能保证该估计量中值无偏。进行 Monte Carlo 计算机模拟试验研究后发现,对于试验样本结构与截尾时间并不严格要求存在对应关系的一般情形,中值无偏矩估计法与矩估计法的性能比较结果仍然成立。

因此,在小样本定时截尾情形下,中值无偏矩估计法在偏差和均方根误差两项评价指标上均明显优于矩估计法。

## 7 试验验证

为验证中值无偏矩估计法的实用性、有效性和优越性,实施了陀螺电机寿命试验和精密仪表轴承台架寿命试验。

### 7.1 陀螺电机寿命试验

试验过程:用 10 套 SN728/4X2/HE/P4 轴承装配到 5 个某型高精陀螺电机上进行寿命试验,每个陀螺电机累计通电工作时间达 1023h,均满足性能指标,并且该型轴承装配到陀螺电机仍具有潜在的运行能力。

### 7.2 精密仪表轴承台架寿命试验

试验过程:随机抽取 8 组  $\times$  2 套/组该型轴承进行定时截尾试验,试验期间各试件相互独立且无试件被替代,截尾时间设定为 4000h,获得试验数据:1313h、2288h、2472h、2506h、3382h、4000h、4000h、4000h。

根据在 Weibull 概率纸上描点作图的结果,可以认为该型轴承的寿命服从 Weibull 分布。采

用式(3)、式(4)和式(7)并结合表 3 对试验数据进行处理,得到中值无偏矩估计法和矩估计法的可靠性评估结果,如表 5 所示。

表 5 精密仪表轴承的可靠性评估结果

参数估计方法	参数估计值		可靠寿命(h)		
	形状参数 $\beta$	尺度参数 $\eta$ (h)	90% 置信度	95% 置信度	99% 置信度
中值无偏矩估计法	2.02	4038.49	1326.52	929.09	414.81
矩估计法	2.25	4034.56	1483.82	1077.52	522.13

试验结果分析:①陀螺电机的最短累计通电工作间接近两种估计方法计算出的该型轴承的额定寿命,并且该型轴承装配到陀螺电机仍具有潜在的运行能力,表明两种估计方法的计算结果均比较符合实际;②额定寿命估计值越保守,则评估结果越安全,为安全起见,优先采用保守的额定寿命估计值,而中值无偏矩估计法的计算结果相对于矩估计法的计算结果偏保守,因此中值无偏矩估计法较矩估计法更具实用性。

## 8 结论

针对 Weibull 分布产品小样本定时截尾试验方案下的可靠性评估问题,在所设前提下,本文研究得到如下结论:

(1)形状参数矩估计量中值与其真值之比值仅取决于样本结构,而不受分布母体影响;

(2)在偏差和均方根误差两项评价指标上,中值无偏矩估计法较矩估计法均具有明显优势;

(3)中值无偏矩估计法具有实用性、有效性和优越性。

因此,对寿命服从 Weibull 分布的产品进行小样本定时截尾试验后,评估其可靠性时,推荐采用中值无偏矩估计法。

### 参考文献:

- [1] 聃诗松,汤银才,王玲玲.可靠性统计[M].北京:高等教育出版社,2008.
- [2] Sirvanci M, Yang G. Estimation of the Weibull Parameters under Type I Censoring[J]. Journal of the American Statistical Association, 1984, 79(385): 183-187.
- [3] 冯自立,陈晓阳,顾家铭. Weibull 分布定时截尾情形下的矩估计性能[J]. 轴承, 2010(9): 31-34.  
Feng Zili, Chen Xiaoyang, Gu Jiaming. Performance of Moment Estimator for Weibull Distribution with

Type I Censoring[J]. Bearing, 2010(9): 31-34.

- [4] 冯自立. 仪电转子轴承精度寿命模拟试验及可靠性评估[D]. 上海:上海大学,2010.
- [5] Ross R. Bias and Standard Deviation due to Weibull Parameter Estimation for Small Data Sets[J]. IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, 1996, 3(1): 28-42.
- [6] Jacquelin J. Generalization of the Method of Maximum Likelihood[J]. IEEE Transactions on Electrical Insulation, 1993, 28(1): 65-72.
- [7] 中国机械工业联合会. GB/T 24607—2009 滚动轴承寿命与可靠性试验及评定[S]. 北京:中国标准出版社,2010.
- [8] 王坚永,聃诗松,周纪芾. 滚动轴承疲劳寿命的截尾试验和寿命分布参数的估计方法[J]. 轴承, 1979(6): 16-26.  
Wang Jianyong, Mao Shisong, Zhou Jixiang. Censored Test and Estimators for Life Distribution Parameters of Rolling Bearings[J]. Bearing, 1979(6): 16-26.
- [9] McCool J I. Inference on Weibull Percentiles and Shape Parameter from Maximum Likelihood Estimates[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1970, R-19(1): 2-9.
- [10] Harris T A. Rolling Bearing Analysis[M]. 3rd ed. New Jersey: Wiley, 1991.
- [11] 冯自立,陈晓阳,顾家铭. Weibull 分布下基于矩法的小样本量定时截尾数据的估计[J]. 四川兵工学报, 2010, 31(3): 93-97.  
Feng Zili, Chen Xiaoyang, Gu Jiaming. Moment Estimation of Weibull Parameters under Type I Censoring with Small Sample Size[J]. Sichuan Acta Armamentarii, 2010, 31(3): 93-97.
- [12] 陈家鼎. 生存分析与可靠性[M]. 北京:北京大学出版社,2005.
- [13] Hirose H. Bias Correction for the Maximum Likelihood Estimates in the Two-parameter Weibull Distribution[J]. IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, 1999, 6(1): 66-68.

(编辑 卢湘帆)

作者简介:丛伟,男,1987年生。上海大学机电工程与自动化学院硕士研究生。研究方向为小样本试验数据的可靠性评估技术与精密仪表轴承试验技术。陈晓阳(通信作者),男,1960年生。上海大学机电工程与自动化学院教授、博士研究生导师。王志坚,男,1987年生。上海大学机电工程与自动化学院硕士研究生。顾家铭,男,1959年生。上海天安轴承有限公司副总经理、教授级高级工程师。