

环面蜗杆副疲劳强度的校核

周良墉

(湘潭钢铁集团有限公司 湘潭 411101)

摘要: 提出了采用赫兹公式计算环面蜗杆副接触应力的方法: 将蜗轮齿面沿接触线微分成无数细段, 在每一段上应用赫兹公式。再对接触线进行积分, 即可求出此条接触线上作用力与齿面强度的关系。根据环面蜗杆副的结构特点和空间啮合原理的研究成果, 推导出了计算蜗轮齿面接触应力的计算公式。公式中含有蜗轮的齿面特征参数和几何参数, 明确地表达了它们与接触应力之间的数学关系。为了解它们之间规律, 改善环面蜗杆副的工作条件, 提高其使用寿命, 提供了科学的依据。并结合工程设计的特点, 对计算公式进行了简化, 建立了实用的校核环面蜗轮齿面疲劳强度和使用寿命的计算公式, 从大量的计算结果中总结出有系数, 使环面蜗杆副的承载能力及使用寿命的计算校核有了一个专用的方法。应用推导出的公式成功地对蜗轮的承载能力进行与圆柱蜗杆副的对比核算。

关键词: 环面蜗杆 疲劳强度

中图分类号: TH132.4

0 前言

环面蜗杆是以圆环面为节圆面的蜗杆, 由于它具有多齿、双线接触和润滑角大的优点而得到快速的发展和推广应用。我国的学者和工程技术人员在环面蜗杆原理的研究上取得了丰硕的成果, 解决了有关环面蜗杆传动的接触线和诱导法曲率的计算问题, 为环面蜗杆性能的研究打下了基础。

蜗杆齿面疲劳强度不但关系到蜗杆副的承载能力, 而且是影响蜗杆副使用寿命的主要因素。通过计算和校核齿面疲劳强度, 确定环面蜗杆副的承载能力和使用寿命, 是环面蜗杆副研究的重要课题之一。

赫兹(Hertz)公式是计算两个弹性物体最大接触应力的经典公式, 参考文献[1]介绍了德国H. Wilkesmann将赫兹公式用于圆柱蜗杆的接触疲劳强度计算。而环面蜗杆与圆柱蜗杆的结构和性能都有很大的区别, 不能直接将圆柱蜗杆齿面疲劳强度的计算公式用于环面蜗杆。探索将赫兹公式应用于环面蜗杆副接触应力的计算, 推导有关的计算公式。

1 赫兹公式的演变

传统的赫兹公式是从两个圆柱体的接触情况推导出最大接触应力的计算公式

$$\sigma_{sm} = \sqrt{\pi \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \left(\frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2} \right) \frac{F_n}{L}} \quad (1)$$

式中 E_1, E_2 ——两个物体材料的弹性模量

ν_1, ν_2 ——两个物体材料的泊松比

ρ_1, ρ_2 ——两个物体表面在接触点与接触线垂直方向的法曲率半径

F_n ——法向力

设两物体在接触点处, 与接触线垂直方向的法曲率为 k_1 和 k_2 , 根据空间啮合原理

$$k_1 = \frac{1}{\rho_1}$$

$$k_2 = \frac{1}{\rho_2}$$

有

$$\frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2} = k_1 \pm k_2$$

设

$$k_{12} = k_1 \pm k_2$$

公式(1)中原来规定: 当两个物体表面都是凸面时, 取正号。当有一个为凹面时, 取负号。这是在 ρ_1 和 ρ_2 没有规定方向时适用的。如果规定法线的方向以从实体指向空间, 表面是凸面, 则法曲率为正, 表面是凹面, 则法曲率为负, 如图1所示。有了这一规定, 上式变为

$$k_{12} = k_1 - k_2$$

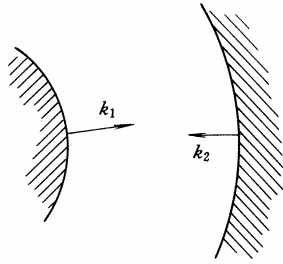


图1 法曲率的方向

为了使式(1)有意义,不妨取 k_1 的方向为正, (k_1 、 k_2 不能同时为负,否则会产生干涉。 k_2 与 k_1 方向相反时,要变号)我们把 k_{12} 称为诱导法曲率,把 k_{12} 的倒数称为诱导法曲率半径,设它为 ρ_n ,有

$$k_{12} = \frac{1}{\rho_n}$$

即

$$k_1 - k_2 = \frac{1}{\rho_n}$$

由于式(1)根号中前面一项都是与材料有关的常数,因此令

$$Z_E = \sqrt{\frac{1}{\pi \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)}} \quad (2)$$

那么式(1)变为

$$\sigma_{sm} = Z_E \sqrt{\frac{F_n}{\rho_n L}} \quad (3)$$

赫兹公式中的诱导法曲率半径 ρ_n 在接触线 L 长度上都是一样的。而环面蜗杆副在每一个齿的接触线上每一点的曲率半径 ρ_n 都不相同。不同的接触线之间的 ρ_n 也不相同。因此,还不能直接用式(3)来计算环面蜗杆的接触应力。

为了简化推导过程,假设蜗杆副通过良好的跑合,沿接触线上各点的最大接触应力 σ_{sm} 相等。在一条接触线上取一小段接触线 dl ,设在接触线 dl 上的诱导法曲率半径为 ρ_1 ,法向力为 dF_n , dl 上的 ρ_1 为定值。在 dl 上使用赫兹公式则有

$$\left(\frac{\sigma_{sm}}{Z_E} \right)^2 \rho_1 dl = dF_n$$

对上式进行积分,得到一条接触线上的法向力

$$\left(\frac{\sigma_{sm}}{Z_E} \right)^2 \int_{\phi_1'}^{\phi_1''} \rho_1 dl = \int_{\phi_1'}^{\phi_1''} dF_n \quad (4)$$

ϕ_1' 、 ϕ_1'' 是接触线在蜗轮齿面上的起点和终点对应的蜗杆转角,根据积分中值定理

$$\int_{\phi_1'}^{\phi_1''} \rho_1 dl = \rho_{(\phi_1)} \int_{\phi_1'}^{\phi_1''} dl \quad \phi_1' < \phi_1 < \phi_1''$$

$\rho_{(\phi_1)}$ 是接触线上某一点的诱导法曲率,在这一

条接触线上

$$\int_{\phi_1'}^{\phi_1''} dl = l$$

$$\int_{\phi_1'}^{\phi_1''} dF_n = F_n$$

l 就是接触线的长度, F_n 就是作用在这条接触线上的法向力。

式(4)变为

$$\left(\frac{\sigma_{sm}}{Z_E} \right)^2 \rho_{(\phi_1)} l = F_n$$

设齿面上共有 n 条接触线,则总的法向力

$$\left(\frac{\sigma_{sm}}{Z_E} \right)^2 \sum_{i=1}^n \rho_{(\phi_i)} l_i = \sum_{i=1}^n F_{ni} \quad (5)$$

运用中值定理

$$\left(\frac{\sigma_{sm}}{Z_E} \right)^2 \rho_t \sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n F_{ni}$$

在蜗轮齿面的范围内,假设曲率半径的变化律是均匀的

$$\rho_t = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_{(\phi_i)}}{n}$$

$$L = \sum_{i=1}^n l_i$$

$$F_{nt} = \sum_{i=1}^n F_{ni}$$

式中 ρ_t ——当量诱导法曲率半径

L ——为接触线的总长

F_{nt} ——总的法向力

这样式(5)变成

$$\left(\frac{\sigma_{sm}}{Z_E} \right)^2 \rho_t L = F_{nt}$$

$$\sigma_{sm} = Z_E \sqrt{\frac{F_{nt}}{\rho_t L}} \quad (6)$$

式(6)中的 ρ_t 是环面蜗杆和蜗轮齿面的当量诱导法曲率半径, L 是各条接触线的长度之和。

环面蜗杆副的蜗杆都是采用优质合金钢,表面经过了淬火或氮化处理,具有很高的接触强度。而蜗轮则是采用铜合金,其齿面强度比蜗杆齿面强度低的多。因此,只需计算和校核蜗轮齿面的疲劳强度就行了。

2 蜗轮齿面疲劳强度的计算

由于诱导法曲率的计算已经解决,在有关书籍中可以找到计算公式^[3,4]。根据式(5)运用计算机可以方便地求出 σ_{sm} 。但是,要用人工计算还是很麻烦

的。为了工程计算方便起见,对式(5)是做一些简化,推导出一般工程用计算公式。

2.1 接触线长度 L 的近似计算

如图 2 所示,环面蜗杆副的重要特点就是接触线基本都是沿蜗杆的径向分布。设接触线与蜗杆半径的夹角是 λ ,在蜗轮的轴向平面的投影中接触线的长度为 l_y 。从图中可知

$$l_y = h' / \cos \lambda$$

由于 λ 很小,所以近似取

$$l_y \approx h'$$

接触线的实长为 l

$$l = \frac{l_y}{\cos \alpha} \approx \frac{h'}{\cos \alpha} = \frac{2h_a^* m_t}{\cos \alpha} = \frac{2h_a^* d_2}{\cos \alpha z_2}$$

式中 α ——压力角

h_a^* ——齿顶高系数

z_2 ——蜗轮齿数

d_2 ——蜗轮分度圆直径

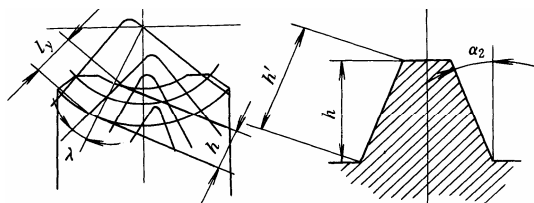


图 2 蜗轮齿面的接触线

设蜗轮齿面共有 n 条接触线,则总长 L 为

$$L = nl = n \frac{2h_a^* d_2}{\cos \alpha z_2} \quad (7)$$

在理论上,某一瞬时,环面蜗杆副每个参与啮合的齿上都有两条接触线,即

$$n = 2z'$$

z' 为理论包围齿数,但实际上 n 达不到上述数值。设实际接触线数量为 n , z' 为计算包围齿数系

数,则

$$n = 2z' z'$$

将上式代入式(7)

$$L = 2z' z' \frac{2h_a^* d_2}{\cos \alpha z_2} \quad (8)$$

对环面蜗杆副来说,一般取

$$h^* = 0.7$$

$$\frac{z'}{z_2} = \frac{1}{10}$$

这样式(8)变成

$$L = \frac{z^* d_2}{3.57 \cos \alpha}$$

2.2 当量诱导法曲率半径的计算

设

$$\rho_n = \rho^* a$$

$$\rho^* = \frac{\rho_n}{a}$$

ρ^* 称为相对诱导法曲率半径,根据相似原理, ρ^* 是一个与蜗杆副大小无关的量。蜗轮齿面高度与蜗轮蜗杆的直径相比,是一个较小的量。在蜗轮齿面范围内,一条接触线上的诱导法曲率半径的变化量不大,可以假设相对诱导法曲率半径在齿面高度范围内成线性变化。这样就可以用均值法来求 ρ^* 。把一条接触线上的若干点的 ρ^* 值的平均值作为这一条接触线的 ρ^* 值。在环面蜗杆副蜗轮齿面上,各个部位的诱导法曲率半径都不相同,在理论上诱导法曲率半径小的部位容易产生点蚀。由于影响点蚀的因素很多,蜗轮的失效要考核整个齿面,就把各条接触线上的 ρ^* 取平均值作为整个齿面的 ρ^* 值。

根据计算机大量计算的结果,归纳成表 1 的数值,供一般工程设计计算使用。

表 1 环面蜗杆副相对诱导法曲率半径 ρ^* 计算值

蜗杆副种类	传动比 i	5~9	>9~20	>20~30	>30~40	>40~50	>50
平面蜗轮		0.50	0.52	0.54	0.55	0.55	0.56
典型平副		0.90	0.93	0.97	1.00	1.02	1.03
抛物线修型直廓环面蜗杆副		0.98	1.01	1.05	1.1	1.12	1.13
优化平副							
曲率修型环面蜗杆副							

2.3 法向作用力的计算

蜗轮齿面的法向力 F_{nt} 为

$$F_{nt} = \frac{F_{2t}}{\cos \alpha_n \cos \gamma - \mu \sin \gamma}$$

式中 F_{2t} ——蜗轮齿面上的圆周向力

α_n ——蜗轮的法向压力角

γ ——蜗杆喉部螺旋升角

μ ——蜗轮齿面的摩擦因数

作为近似计算,取

$$F_{2t} = \frac{2T_2}{d_2}$$

$$F_{nt} = \frac{F_{2t}}{\cos\alpha}$$

$$F_{nt} = \frac{2T_2}{d_2 \cos\alpha}$$

2.4 齿面接触应力的计算

将有关算式代入式(6)，并考虑工况系数 K_A

$$\sigma_{sm} = Z_E \sqrt{\frac{7.14T_2 K_A}{\rho^* a z^* d_2^2}} \quad (10)$$

令

$$d_2 = k_2^* a$$

当 a 的单位为m, T_2 的单位为N/m, Z_E 的单位为MPa^{1/2}

$$\sigma_{sm} = Z_E \sqrt{\frac{7.14T_2 K_A}{\rho^* z^* k_2^{*2} a^3}} \times 10^{-3} \quad (11)$$

z^* 的值要从蜗轮齿面的接触线数目求得, 如果没有接触线图, 可按表2取值

表2 计算包围齿数系数 z^*

传动比 <i>i</i>	5~10	>10~20	>20~25	>25
计算包围齿数系数 z^*	0.750	0.800	0.850	0.875

3 蜗轮齿面疲劳强度的校核

设蜗轮的接触许用应力为 $[\sigma_j]$, 则蜗轮齿面的疲劳强度的条件是

$$\sigma_{sm} < K_N K_V [\sigma_j]$$

式中 K_N ——循环寿命系数^[6]

$$K_N = \sqrt[8]{N_0 / N}$$

N_0 ——应力循环基数, $N_0=10^7$

N ——实际工作循环次数

$$N = 60 n_2 h_0 \xi$$

n_2 ——蜗轮工作转速(r/min)

h_0 ——实际运转时间(h)

ξ ——负荷率, 在每个工作周期中, 实际承受工作负荷所占时间比例。如果 ξ 小于20%, 按20%计算

K_V ——蜗轮转速系数^[1]

$$K_V = \sqrt[8]{\frac{1}{n_2 / 8 + 1}}$$

设蜗轮齿面的安全系数为 S_H

$$S_H = \frac{K_N K_V [\sigma_j]}{\sigma_{sm}}$$

$$S_H > [S_H]$$

接触强度安全系数 $[S_H]$ 的数值见表3。

表3 接触强度安全系数 $[S_H]$ 表

设计寿命	可靠性		
	不高	高	很高
不长	0.85	1.00	1.10
较长	1.00	1.10	1.20
长	1.10	1.20	1.30

根据式(11)推导出输出许用转矩的计算公式

$$T_2 = \left(K_N K_V [S_H] \frac{[\sigma_j]}{Z_E} \right)^2 \frac{\rho^* k_2^{*2} z^* a^3}{7.14 K_A} \times 10^6 \text{ N}\cdot\text{m} \quad (12)$$

4 计算实例

已知条件：平面二次包络蜗杆副, 中心距 $a=200 \text{ mm}$, 蜗杆头数 $z_1=1$, 蜗轮齿数 $z_2=40$, $d_2=330 \text{ mm}$, 参数经优化。电动机功率 $P_E=15 \text{ kW}$, 转速 $n_1=1500 \text{ r/min}$ 。蜗轮材质为: ZQCu10-1(金属型铸造), 蜗杆副传动效率 $\mu=0.8$ 。

工况: 24 h连续运转, 无冲击振动, 负荷率 $\xi=0.8$, 可靠性要求高。每年工作300天, 设计寿命10年。

校核蜗轮齿面疲劳强度。

解:

从表4中查得 $K_A=1.25$

从参考文献[1]中查得 $Z_E=147 \text{ MPa}^{1/2}$

$$[\sigma_j]=425 \text{ MPa}$$

从表1中查得 $\rho^*=1.1$

从表2中查得 $z^*=0.875$

$$k_2^* = \frac{330}{200} = 1.65$$

蜗轮输出转矩

$$T_2 = \mu \frac{P_E 30000}{n_1 \pi} i = 3055.77 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\sigma_{sm} = Z_E \sqrt{\frac{7.14 K_A T_2}{\rho^* k_2^{*2} z^* a^3}} = 167.67 \text{ MPa}$$

$$N = 60 n_2 h_0 \xi = 12.96 \times 10^7$$

$$K_N = \sqrt[8]{\frac{N_0}{N}} = \sqrt[8]{\frac{1 \times 10^7}{12.96 \times 10^7}} = 0.726$$

$$K_V = \sqrt[8]{\frac{1}{\frac{n_2}{8} + 1}} = \sqrt[8]{\frac{1}{\frac{37.5}{8} + 1}} = 0.805$$

$$S_H = K_N K_V \frac{[\sigma_j]}{\sigma_{sm}} =$$

$$0.726 \times 0.805 \times \frac{425}{167.67} = 1.48$$

查表3, $[S_H]=1.2$, $S_H > [S_H]$, 校核通过。

表 4 环面蜗杆副工况系数表

工作状况	均匀轻微震动	中等震动	严重冲击
断续工作	1.00	1.15	1.25
8 h连续工作	1.15	1.20	1.35
24 h连续工作	1.25	1.35	1.50

通常,环面蜗杆的负荷能力(功率)的计算方法都是依据现有的功率表。式(12)提供了根据齿面接触疲劳强度许用应力计算输出转矩的方法。在合理结构尺寸的条件下,环面蜗杆副的最薄弱环节就是疲劳强度。只要接触疲劳强度保证了,一般来说,其他强度条件都能满足。在实际应用中,式(12)算出的结果,再通过温升校核就行了。

5 环面蜗杆副与圆柱蜗杆副疲劳强度的比较

根据材料^[1],圆柱蜗杆传动蜗轮齿面疲劳应力的计算公式为

$$\sigma_H = Z_E Z_p \sqrt{\frac{T_2 K_A}{a^3}} \times 10^{-3}$$

为了便于区别,将上式的 T_2 命名为 T_2' 。解得

$$T_2' = \left(\frac{\sigma_H}{Z_E Z_p} \right)^2 \frac{a^3}{K_A} \times 10^6$$

$$\sigma_H = \frac{K_N K_V [\sigma_j]}{[S_H]}$$

$$T_2' = \left(\frac{K_N K_V [\sigma_j]}{Z_E Z_p [S_H]} \right)^2 \frac{a^3}{K_A} \times 10^6$$

在参考文献[1]中,根据前文的数据,查图6.2-11,普通圆柱蜗杆 $Z_p=3$ 。

在中心距 a 和蜗轮材质、工作状况都相同的情况下,上式与式(12)之比为

$$\frac{T_2'}{T_2} = \frac{\frac{1}{Z_p^2}}{\frac{\rho^* k_2^* z^*}{7.14}} = \frac{7.14}{Z_p^2 \rho^* k_2^* z^*}$$

$$\frac{7.14}{3^2 \times 1.1 \times 1.65^2 \times 0.875} = 0.3$$

即

$$T_2 = 3.3T_2'$$

计算结果说明,在条件相同的情况下,环面蜗轮齿面的承载能力是普通圆柱蜗杆副的3倍多。

6 结论

根据赫兹公式推导出的计算环面蜗杆副的接触疲劳强度公式,全面地考虑了环面蜗杆的结构特点,在计算公式中体现了环面蜗杆主要参数对疲劳强度

的影响程度,如蜗轮直径的大小、同时啮合齿数以及诱导法曲率等,比较科学的解决了环面蜗杆副使用寿命和承载能力的计算校核问题。该公式针对环面蜗杆的特点,结合工程设计的实际,适用于多种环面蜗杆副的计算校核,为环面蜗杆的研究和设计提供了一种有用的工具和新的思路。

参 考 文 献

- 1 齿轮手册编写组. 齿轮手册. 北京:机械工业出版社,1990
- 2 范垂本. 齿轮强度和试验. 北京:机械工业出版社,1979
- 3 沈蕴方,容尔谦,李寅年,等. 空间啮合原理及SG-71型蜗轮副. 北京:冶金工业出版社,1983
- 4 齐麟,张亚雄,胡松春,等. 齿轮传动设计. 北京:机械工业出版社,1987
- 5 (德国)托马斯 A.K. 齿轮承载能力计算. 北京:冶金工业出版社,1979
- 6 杨春兰. 蜗杆传动手册. 上海:华东化工学院出版社,1990

CHECKING ON THE FATIGUE STRENGTH OF TOROIDAL WORM WHEEL

Zhou Liangyong

(Xiangtan Iron & Steel Group Co. Ltd.,
Xiangtan 411101)

Abstract: The method to use Hertz Formula to calculate the contact stress of toroidal wormwheel is put forward. To divide contact lines into countless mini sections, on each of which, Hertz Formular is used. By using integral calculus along the contact line, the relationship between the strength of wormwheel surface and force against it is found out. Based on the configuration characteristics of worm pair and space engagement theory, the formulars of contact stress at wormwheel surface are calculated, each of which includes characteristic and geometry parameters of wormwheel, so that maths relationship with contact stress is clearly stated. To understand the rule, improve worm pair working conditions and increase its life, a scientific basis is provided. Meanwhile according to the specialty of project design, the formulars are simplified. Practical formulars for calculaating and checking fatigue strength and working life of wormwheel are set up. The relevant coefficients resulted from various calculation has made it special to calculate carrying capacity and working life of totoidal worm pair. The application of the educed formulars is successful to calculate the carrying capacity of the wormwheel compared with column worm pair.

Key words: Toroidal worm Fatigue strength

作者简介: 周良庸,男,1948年出生。研究员级高级工程师,现任湘潭钢铁集团有限公司副总工程师,获国家特殊贡献津贴专家。主要从事环面蜗杆成形原理和制造技术的研究。

E-mail: zlyong@mail.hnxc.com.cn