

# 周转轮系系统化的数学模型

薛隆泉<sup>1</sup> 雷亚荣<sup>1</sup> 宋念龙<sup>2</sup>

(1. 西安理工大学机械仪器工程学院 西安 710048;

2. 西安理工大学自动化与信息工程学院 西安 710048)

**摘要:** 在分析轮系结构特征及状态特征的基础上, 完善包涵两类特征的拓扑图; 认识到轮系是一个物理系统, 提出网络问题是解决轮系物理特征的系统化图论模型, 并发现轮系拓扑图满足基尔霍夫定律; 在分析拓扑图物理特征的基础上, 结合拓扑图几何特征, 提出支路特性矩阵、切割特性矩阵用于构建系统化研究的数学模型, 即回路方程组、切割方程组, 为系统地研究周转轮系结构特性、状态特性提供新的理论基础。以实例论述这一理论的具体应用。

**关键词:** 网络问题 图论模型 基尔霍夫定律 数学模型

**中图分类号:** TH128

## System Mathematic Model of Epicyclic Gear Trains

XUE Longquan<sup>1</sup> LEI Yarong<sup>1</sup> SONG Nianlong<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Instrumental Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048;

2. School of Automatization and Communication Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048)

**Abstract:** On the basis of analyzing structure character and state character of epicyclic gear trains (EGTs), topological graph is improved. It is realized that gear trains is a physics system, and net problem is presented that is a systems graph theory model applied to solve physics character of EGTs. It is found that topological graph accords with Kirchhoff's law. On the basis of analyzing physics and geometry character of topological graph, branch-characteristics matrix and cut-characteristics matrix are presented, the two are applied to create a systems mathematic model, namely loop-equations and cut-equations. A new fundamental theory is presented for structure characteristics and state characteristics of EGTs based on systems research. And it is applied to velocity, torque and bifurcated power characteristics of EGTs with an example.

**Key words:** Net problem Graph theory model Kirchhoff's law Mathematics model

## 0 前言

1970 年, BUCHSBAUM 等<sup>[1]</sup>首次将图论思想引入轮系, 提出轮系运动结构的图形表示法; 后在 1990 年 PENNESTRI 等<sup>[2]</sup>最先将图论思想应用于轮系传动性能的分析。近年, 众多研究者基于图论思想, 从事周转轮系系统化研究, 但包含轮系结构特征的拓扑变换图(轮系结构特征的图形模型), 是否是同样包含轮系状态特征的拓扑变换图(轮系状态特征的图形模型)。对于这个问题的正确认识, 关系到系统化研究图论模型的建立, 即轮系系统化研究的定性问题; 而对于轮系系统化研究的定量问题属于数学模型的构建。

笔者认为, 轮系图论模型与数学模型间的意义

有所不同。本文即是基于图论思想, 阐述了两者的确切含义, 确立周转轮系图论模型; 在此基础上, 着重论述轮系传动性能系统的数学建模过程, 即构建传动系统的数学模型。

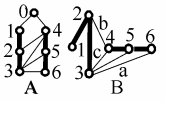
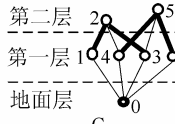
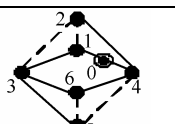
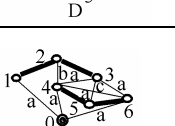
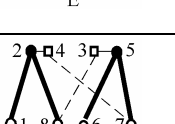
## 1 系统化研究的图论模型

### 1.1 轮系结构特征的图形模型

从拓扑变换图是否完整表示周转轮系结构特征出发, 分两种情况、依据三方面指标进行分析: ①“图”的运动拓扑性反映是否明确, 运动拓扑性具体指轮系各构件间的联接特征。②“图”中构件性质是否明确, 构件性质具体指按轮系中构件的运动情况和所属功能将构件来划分。③“图”的整体结构拓扑性反映是否明确, 整体结构拓扑性具体指不同性质的构件所属的层不同。各类具有代表性的

“图”详细评价如表1。

表1 轮系结构特征的图形模型评价表

轮系结构	图形表示	运动性质情况	整体结构情况
		A、B 图能反映轮系运动拓扑性，但构件性质不明	A、B 图均不能反映轮系整体结构拓扑性
		C 图能反映轮系运动拓扑性，但重要构件性质不明	C 图能够反映轮系整体结构拓扑性
		D 图能反映轮系运动拓扑性，但构件性质不明	D 图局部反映轮系结构拓扑性，但关键结构未反映
		E 图能反映轮系运动拓扑性，但构件性质不明确	E 图未涉及反映轮系整体结构拓扑性
		F 图能反映轮系重要运动拓扑性，构件性质很明确	F 图在轮系整体结构拓扑性反映欠缺

注：A、B 图是文献[1]提出的图形表示法及省略图形法。  
 C 图是文献[4]提出的规范图。  
 D 图是文献[3]提出的复接头运动链图。  
 E 图是文献[5]提出的基于运动分离的轮系图。  
 F 图是文献[6]提出的基于功能离散法的拓扑图。

据表1分析知，迄今为止尚无经拓扑变换能够完整反映轮系运动拓扑性、整体结构拓扑性、而且构件性质明确的拓扑变换图，即能完备体现周转轮系结构特征的图形模型需待完善。

### 1.2 轮系状态特征的图形模型

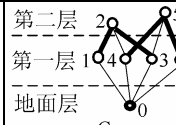
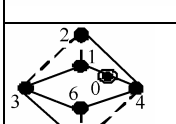
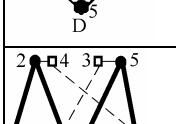
在周转轮系系统化研究方面，文献[9]沿袭复接头运动链图，提出复铰图画表示法用于周转轮系的运动分析，此方法通过 K-H 单元与图画表示中的三顶点形成基本回路互相对应，得出基本运动方程，能够很好地进行运动分析。但对此问题的解决途径，是依据“图”中特殊几何特征(形成三角形)对应轮系特殊结构(K-H)，映射传统的轮系传动性能分析公式；虽有其合理性，但并不易于更深入地研究。文献[4]提出规范图，并用于周转轮系运动分析，解决思路是按行星轮分离规范图，而后基于基本轮系(K-H-V、2K-H、3K)进行运动分析，该思路体现了轮系演化的本质，最终归于传统分析方法。作者通过研究，发现上述两种解决思路殊途同归，将用于型综合的拓扑图套用于传动性能系统的研究，混淆了结构特征图形模型与状态特征图形模型的内涵；在解决方法上，并未建立数学意义的图形模型几何

特征，仅局限于周转轮系的特性要素，失去了引入图论思想的意义。

笔者经过研究发现，目前应用于轮系传动性能系统分析的“图”，可分为三类：一类是基于轮系传动性能系统的状态特征图形模型，如文献[2]；第二类属于轮系结构特征图形模型，如文献[3-4、9]；第三类属于图解法，如文献[10]。在上述几类图中，仅第二类图考虑到周转轮系的系统化研究。表2对文献[3-4、6]中提出的图依据三方面指标进行分析评价：①“图”的状态特征拓扑性反映是否明确，状态特征拓扑性就是图中节点所属性质。②“图”的物理特征拓扑性反映是否明确，物理特征拓扑性就是决定周转轮系传动性能的独立物理参数。③“图”中特殊状态反映是否明确，特殊状态就是周转轮系传动过程的特殊性质。

表2清楚表明文献[6]拓扑图较完整地体现出周转轮系的状态特征，结合表1的分析，本文将在完善文献[6]拓扑图的基础上，建立适合周转轮系系统性研究的图形模型。

表2 轮系状态特征的图形模型的评价表

轮系结构图	图形表示	运动状态情况	物理特征情况
		C 图状态特征拓扑性反映明确；但其特殊状态反映不明确	C 图物理特征拓扑性反映明确
		D 图状态特征拓扑性反映明确；但其特殊状态反映不明确	D 图物理特征拓扑性反映明确
		F 图状态特征拓扑性反映明确；特殊状态反映明确	F 图物理特征拓扑性反映明确

### 1.3 周转轮系系统性研究的图论模型

由上面分析可知，拓扑图在整体结构拓扑性表示上有欠缺，结合轮系传动系统深入研究的需要，作以下改进：①用点划线在同轴输入、输出上表示同轴构件之间有间接联系。②将处于同一回转轴线的功能构件所表示的点放在同一层。③若三角形不与点划线上任意点固结，则表示机架的三角形符号在图中不出现，寓意在图下方无限远处，反之出现。④处于不同层的构件与机架构成间接回传副，图中用细实线表示异层构件间构成间接回传副。图1所示为文献[6]拓扑图(图1b)与完善后的拓扑图(图1c)作比较。

从物理的观点来看，拓扑图问题研究的是各个物理元素相互连接的周转轮系系统，并根据元素的

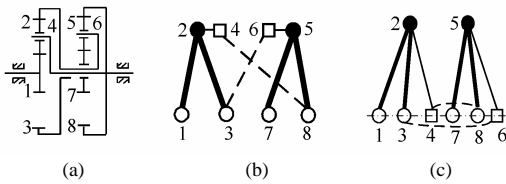


图 1 轮系结构图及拓扑图

特性以及这些元素在系统中相互联系的方式预测轮系所发生的作用；换言之，拓扑图问题是反映轮系物理特征的问题。在图论中，网络问题<sup>[7]</sup>是解决系统物理特征的图论模型。由上述，理论上拓扑图问题就是网络问题，即拓扑图问题是周转轮系系统性研究的图论模型。因此，可将网络问题的研究方法用于拓扑图问题的研究。

## 2 轮系传动系统的数学模型

对于轮系系统化研究的图形模型，若图 1 中节点表示轮系结构的功能构件，边表示各构件间的联系性质，则可得到用于轮系型综合的数学模型。文献[6] 对此有详述，本文着重赋予拓扑图以数学意义，构建周转轮系传动性能系统的数学模型。为区分两方面研究用的图形模型，称用于型综合的图为基础拓扑图，而用于传动系统的图称为传动拓扑图。

### 2.1 拓扑图的几何特征

图论研究中认为，一个网络的几何特征与它各支路的组成元素无关。基于网络问题的几何特征数学表达方法，建立数学意义上的拓扑图问题几何特征表达式。

#### 2.1.1 拓扑图定理

从拓扑图表示中，分析周转轮系结构，行星轮是轮系结构中唯一与机架无连接关系的功能构件，其他构件均与轮系结构中机架有直接连接或是间接连接关系。若去掉拓扑基本单元<sup>[6]</sup>中粗实线，可获得图的生成树如表 3，得到下面定理。

表 3 基本单元的几种图

基本单元(K-H、2K-H、3K)			
添加机架的基本单元			
去掉粗实线的基本单元			

注：平行四边形代表的  $W$  结构在拓扑图中仅表示该轮系的输出结构，并不代表构件。三角形表示机架。

拓扑图定理 1 若一周转轮系结构转化为一个  $n$  阶拓扑图  $G$ ，则此  $n$  阶拓扑图中细实线数等于  $n$ ，该轮系结构具有  $n+1$  个构件。

#### 2.1.2 传动拓扑图中的三种重要矩阵

传动拓扑图是一个有向图  $G(n, b)$ ，箭头方向取轮系运动传递方向，基于拓扑图的生成树介绍三种重要矩阵。

(1) 基本关联矩阵。在一有向图  $G$  的关联矩阵中，若取某一节点为参考节点，得到秩为  $n-1$  的矩阵称为基本关联矩阵，用符号  $A$  表示。

(2) 基本回路矩阵。对于一个回路秩为  $m$  的连通有向图  $G$ ，与  $G$  中  $m$  个回路集合相对应的  $G$  的回路矩阵称为  $G$  的基本回路矩阵，用符号  $B$  表示。

(3) 基本割集矩阵。对于一连通有向图  $G$ ，与  $G$  中  $r$  个割集集合相对应的切割矩阵称为  $G$  的基本割集矩阵，用符号  $Q$  表示。

$A$  完整地表示出传动拓扑图中节点与边的几何特征，已知  $A$ ，便可直接绘制出传动拓扑图； $B$  基于拓扑图的生成树，从传动拓扑图的基本回路角度表示了它的几何特征； $Q$  则从传动拓扑图的节点特殊性角度表示了它的几何特征。

### 2.2 拓扑图的物理特征

拓扑图问题就是一个网络问题，这里借用网络问题的解决方法来研究拓扑图问题。

#### 2.2.1 拓扑图问题

考察电网络  $P=UI$ ，若认为电网络中主线路  $I$  恒定不变；那么引起电压变化是由电网络中的物理参数  $R$  导致。而相对应轮系拓扑图中  $P=M\omega$ ，若将轮系的整个传动过程视为匀速旋转，且不计摩擦，即整个轮系处于平衡状态，那么  $\omega$  的变化是由拓扑图中的物理参数，即轮系结构参数  $i_{sg}^h$  来决定。由上述分析可知，在假设前提下，自然取拓扑图中的点为节点，因轮系中每一构件所受外力矩和为零，这样在理论上便满足基尔霍夫电流定律；相应拓扑图回路内速度变化值的代数和必为零，理论上满足基尔霍夫的电压定律。

从抽象的观点看，任何一个集总参数周转轮系能够用拓扑图来描绘，边表示轮系的组成部分，边的权描述该组成部分的要素。因此，拓扑图在假设前提下满足基尔霍夫定律。

结合传动拓扑图的几何特征，有如下定理。

拓扑图定理 2 若一平面周转轮系转化为一个  $G(n, b)$  拓扑图，若拓扑图各边表示相应节点的角速度变化矢量权值，则回路中矢量和必为零，即传动拓扑图的基本回路矩阵 ( $B=m \times b$ ) 可用于运动特性分

析，回路秩  $m$  是该拓扑图的基本回路个数；若拓扑图各边表示相应节点间作用力变化矢量权值，则拓扑图的基本割集矩阵( $Q=r \times b$ )可用于力矩特性分析，矩阵的秩  $r$  是该拓扑图的基本切割数。

2.2.2 拓扑图的物理参数

得到拓扑图两个定理，从拓扑图定理 1 得知拓扑图节点数与细实线数相等。而拓扑图节点数即是平面周转轮系中的活动构件数；细实线数即是轮系中的回转副数( $p_1$ )；粗实线数即是轮系中的高副数( $p_h$ )。因此，对拓扑图应用平面机构自由度计算公式

$$F = 3n - 2p - p_h = n - p_h$$

即

$$p_h = n - F \tag{1}$$

若设平面周转轮系有  $N$  个构件，则

$$N = n + 1 \tag{2}$$

由式(1)、(2)得到

$$p_h = N - 1 - F = N - (F + 1) \tag{3}$$

对于式(3)解释如下， $p_h$ 是拓扑图中粗实线数，而  $F+1$  是平面周转轮系中已知运动状态的构件数，那么， $N-(F+1)$ 就是轮系中未知运动状态的构件数。从以上分析得知，式(3)表明轮系中未知运动状态的构件数等于拓扑图中的粗实线数。

结论 1 拓扑图具有的独立物理参数(轮系的结构参数)等于它的粗实线数；换言之，基于传动拓扑图进行轮系运动特性分析时，需要的独立方程个数等于该图中的粗实线数。

结论 2 依据传动拓扑图进行运动特性分析时，该图基本回路矩阵的秩应等于它的粗实线数；换言之，该图基于它的任何一个生成树，得到的基本回路数一定等于该图的粗实线数。

2.3 传动拓扑图的数学模型

因轮系传动性能主要取决于齿轮高副，所以，本文研究中仅考虑齿轮高副这个物理参数。

有向拓扑图  $G$  满足以下三个公式。

(1) 应用基尔霍夫电流定律

$$QM=0 \tag{4}$$

式中  $M$  表示力矩流的矢量，称为  $G$  的力矩流矢量。

(2) 应用基尔霍夫电压定律

$$B\omega=0 \tag{5}$$

式中  $\omega$  表示各边速度变量的矢量，称为  $G$  的支路速度矢量。

(3) 周转轮系结构特性矩阵

$$\omega = K \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_{II} \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} M_s \\ 0 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} F_s \\ F_p \end{pmatrix} \tag{6}$$

式中  $K$  为给定的  $b \times r$  阶矩阵，称为支路特性矩阵； $\omega_1$  是拓扑图中，包括主轴线以上各细线边矢量； $\omega_{II}$  是主轴线以下细线边矢量及各节点相对机架的角速度变量。式(6)中  $R$  为给定的  $b \times b$  阶矩阵，称为切割特性矩阵； $M_s$  是拓扑图“节点”的权值，即机构简图中的已知构件矩值； $F_s$  是具有权值节点对应矢量； $F_p$  是其余割集对应的矢量。

将式(6)代入式(5)得到

$$BK\omega=0 \tag{7}$$

将式(6)代入式(4)得到

$$QR \begin{pmatrix} F_s \\ F_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -QM_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} F_s \\ F_p \end{pmatrix} \tag{8}$$

式(8)是力矩特性研究用的数学模型，称为切割方程组；式(7)是运动特性研究用的数学模型，称为回路方程组。

3 传动性能系统

3.1 平面周转轮系运动特性的分析实例

例 如图 2 所示为一封闭式差动轮系机构简图。设  $z_1=z_7=31$ ， $z_2=z_5=35$ ， $z_3=z_6=97$ ，各轮模数均为  $m$ ，轮 2 为主动构件，且其角速度为  $\omega_2$ ，输入力矩为  $M_2$ 。试进行运动分析。

解：由图 2 的机构简图，作基础拓扑图、拓扑图生成树- $t$ ，并据生成树- $t$  判断传动拓扑图的基本回路。按其拓扑图生成树，可知此传动拓扑图有 4 个基本回路，图 2 示有 1(2 1 3)、2(2 1 4)、3(2 1 3/5 7)、4(1 3/5 7 6/4)。

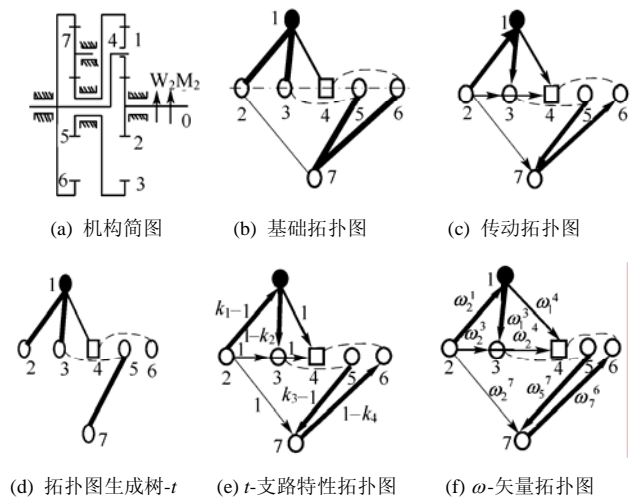


图 2 封闭差动轮系结构图及拓扑图

由式(7)写出如下各矩阵

$$B = \begin{pmatrix} \omega_2^3 & \omega_2^4 & \omega_2^7 & \omega_7^6 & \omega_1^4 & \omega_2^1 & \omega_1^3 & \omega_5^7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_2^3 \\ \omega_2^4 \\ \omega_2^7 \\ \omega_1^4 \\ \omega_7^0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} \omega_2^3 & \omega_2^4 & \omega_2^7 & \omega_1^4 & \omega_7^0 \\ \omega_2^3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_2^4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega_2^7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega_1^4 & 0 & 0 & 0 & 1-k_4 \\ \omega_2^1 & 0 & 0 & 0 & k_1-1 \\ \omega_1^3 & 0 & 0 & 0 & 1-k_2 \\ \omega_5^7 & 0 & 0 & 0 & k_3-1 \end{pmatrix}$$

$$BK\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2^3 \\ \omega_2^4 \\ \omega_2^7 \\ \omega_1^4 \\ \omega_7^0 \end{pmatrix}$$

即有如下矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2^3 \\ \omega_2^4 \\ \omega_2^7 \\ \omega_1^4 \\ \omega_7^0 \end{pmatrix} = 0$$

式中  $k_1=z_1/z_2$ ;  $k_2=z/z_3$ ;  $k_3=z_7/z_5$ ;  $k_4=z_7/z_6$ 。由矩阵可解得:  $\omega_4=0.087\omega_2$ ,  $\omega_3=-0.242\omega_2$ ,  $\omega_1=-0.516\omega_2$ ,

$\omega_7=0.273\omega_2$ 。

### 3.2 平面周转轮系力矩特性的实例分析

用上例作力矩特性分析,若设  $\omega_2=1$ ,  $M_2=1$ 。可解得各构件角速度,知转化轮系与原轮系运动传递路线一致。具体分析过程如下所述:若  $\omega_k^h$  与  $\omega_k$  同向,则  $k$  主动轮在原周转轮系与转化轮系地位一致,按原周转轮系运动传递方向,画出如图 3 所示  $F$ -矢量拓扑图;若  $\omega_k^h$  与  $\omega_k$  反向,则  $k$  主动轮在原周转轮系与转化轮系地位相反,按转化轮系运动传递方向,画出  $F$ -矢量拓扑图。

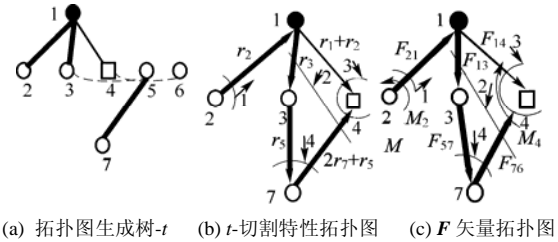


图 3 轮系拓扑图

据图 3,写出如下基本切割矩阵  $Q$ ,切割特性矩阵  $R$ ,  $F$  矢量矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = F_{14} \begin{pmatrix} r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1+r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_5+2r \end{pmatrix}$$

$$F' = (F_{21} \quad F_{13} \quad F_{14} \quad F_{57} \quad F_{76})$$

$$M'_s = (-M_2 \quad 0 \quad M_4 \quad 0 \quad 0)$$

由式(8)有下矩阵

$$QRF = \begin{pmatrix} F_{21} & F_{13} & F_{14} & F_{57} & F_{76} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1+r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_5+2r_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{21} \\ F_{13} \\ F_{14} \\ F_{57} \\ F_{76} \end{pmatrix} =$$

$$-\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M_2 \\ 0 \\ M_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1+r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_5+2r_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{21} \\ F_{13} \\ F_{14} \\ F_{57} \\ F_{76} \end{pmatrix} =$$

$$- \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M_2 \\ 0 \\ M_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

式中  $r_1=mz_1/2$ ,  $r_2=mz_2/2$ ,  $r_3=mz_3/2$ ,  $r_5=mz_5/2$ ,  $r_7=mz_7/2$ 。由以上矩阵可解得： $F_{21}=0.029 \times 2/m$ ,  $F_{13}=-F_{21}=-0.029 \times 2/m$ ,  $F_{14}=0.057 \times 2/m$ ,  $F_{57}=-0.792 \times 2/m$ ,  $F_{76}=-F_{57}=0.792 \times 2/m$ ,  $M_4=11.45$ 。

### 3.3 平面周转轮系功率特性的实例分析

据传动拓扑图，结合式(7)分析轮系的运动特性，得到轮系各构件的角速度；继而采用反转法得到轮系的运动传递拓扑图。又结合式(8)分析轮系的力矩特性；得到轮系的力流流向拓扑图。据此可判断轮系中力有无分流、功率有无分流及有无循环功率。具体判断如流程图4所示。

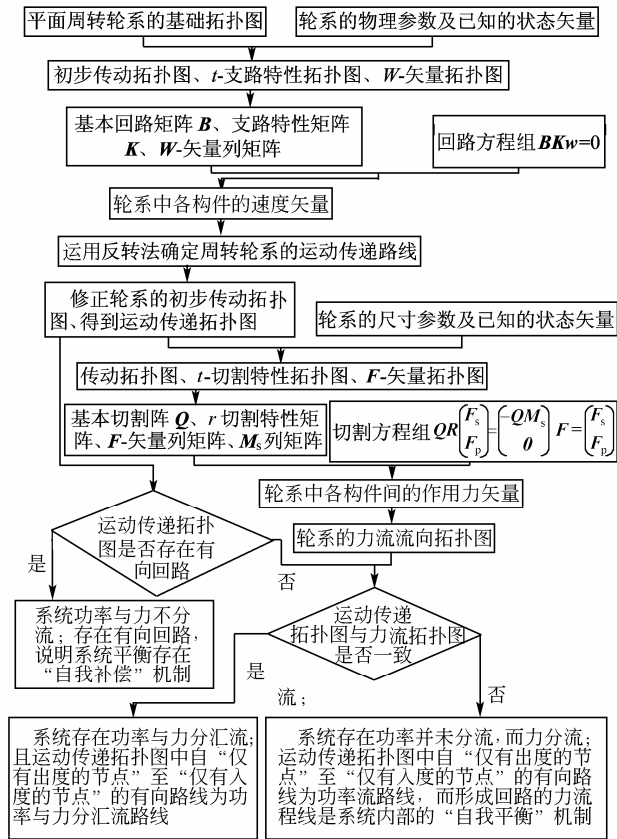
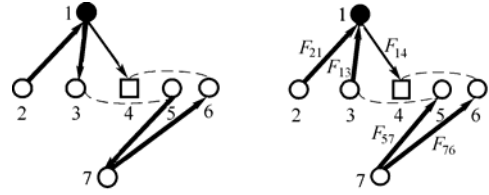


图4 轮系功率特性判定流程图

同样用上面例子，运动特性分析结果是：转化轮系与原轮系运动传递方向一致，得到图5所示运动传递拓扑图；力矩特性分析结果是：依运动传递方向画出图5力流矢量拓扑图。

解：由图5可以观察到，运动传递拓扑图中不存在有向回路，并且两种拓扑图传递路线不一致。若按照图7的周转轮系功率流特性判断流程图，可以得知，此实例属于功率并未分流，而力进行了

分流。



(a) 运动传递拓扑图 (b) 力流矢量拓扑图

图5 轮系拓扑图

对于上面分析结果，可以用传统计算方法验证，本文不再赘述。

## 4 结论

从图论思想出发，确立了用于周转轮系系统化研究的图论模型；基于轮系传动系统属于物理系统，构建了用于平面周转轮系系统化研究的数学模型；并举实例对传动系统性能具体分析。

## 参考文献

- [1] BUCHSBAUM F, FREUDENSTEIN F. Synthesis of kinematic structure of geared kinematic chain and other mechanisms[J]. Journal of Mechanisms, 1970(5): 357-392.
- [2] PENNASTRI E, FREUDENSTEIN F. The mechanical efficiency of epicyclic gear trains[C]//ASME Proceedings: Cam, Gear, Robot and Mechanisms Design, Chicago, Illinois DE -1990, 26: 71-79.
- [3] HSU C H, LAM K T. Automatic analysis of kinematic structure of planetary gear trains[J]. ASME Transactions, Journal of Mechanical Design, 1993, 115: 631-638.
- [4] CHATTERIEE G, TSAI L W. Computer-aided sketching of epicyclic-type automatic transmission gear trains[J]. ASME Transactions, Journal of Mechanical Design, 1996, 118: 405-411.
- [5] MADAM S R, AMBERKAR A G, JAIN R C. Symbolic notation of planetary gear trains by canonical number approach[J]. International Journal of Mechanical Engineering Education, 2000, 28(1): 47-68.
- [6] 薛隆泉, 汪友明, 王慧武, 等. 基于功能离散法的周转轮系拓扑综合研究[J]. 机械工程学报, 2006, 42(6): 40-45.
- [7] XUE Longquan, WANG Youming, WANG Huiwu, et al. Study on topological synthesis of epicyclic gear trains based on functional fractionation[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(6): 40-45.
- [7] [美]陈惠开. 应用图论[M]. 范定松, 张玲玲, 译. 北京: 人民邮电出版社, 1990.
- [US]CHEN Huikai. Application graph theory[M]. FAN Dingsong, ZHANG Lingling, Translation. Beijing: Posts

& Telecom Press, 1990.

- [8] 库德里亚夫采夫 В Н. 行星齿轮传动手册[M]. 陈启松, 张展, 江耕华, 译. 北京: 冶金工业出版社, 1998.

К у д р я в ц е в В Н. Planetary transmission handbook[M]. CHEN Qisong, ZHANG Zhan, JIANG Genghua, Translation. Beijing: Metallurgical Industry Press, 1998.

- [9] 林建德, 陈小安. 行星轮系传动效率与自锁分析的新方法[J]. 机械工程学报, 2004, 40(9): 33-37.

LIN Jiande, CHEN Xiaolan. Simplified approach for the determination of the mechanical efficiency in gear trains[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering,

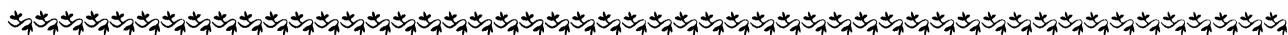
2004, 40(9): 33-37.

- [10] 杨实如, 段钦华. 周转轮系的内力矩、功率流与自锁[J]. 机械科学与技术, 2004, 23(2): 189-191.

YANG Shiru, DUAN Qinhu. A study on inner torque, power-flow and self-locking of epicyclical gear trains[J]. Mechanical Science and Technology, 2004, 23(2): 189-191.

作者简介: 薛隆泉, 男, 1948 年出生, 教授。主要研究方向为机械设计理论、机械传动与测试。

E-mail: xuelq@mail.xaut.edu.cn



(上接第 79 页)

WANG Jun, LIU Zhenquan. Analytical design method of wrap profile modification using symmetrical twin-circular arcs and error analysis for scroll compressors[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2005, 39(9): 1 418-1 421.

- [11] 王君, 刘振全. 涡旋压缩机渐开线类型线的双圆弧修正[J]. 机械工程学报, 2005, 41(9): 202-206.

WANG Jun, LIU Zhenquan. Modification to involute type profile using twin-circular arcs for scroll compressor[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(9): 202-206.

- [12] 王君, 刘振全. 涡旋压缩机渐开线型线的多对圆弧修正[J]. 北京理工大学学报, 2005, 25(9): 757-760.

WANG Jun, LIU Zhenquan. Involute profile modification using multi-pairs of circular arcs in the starting part for scroll compressors[J]. Transaction of Beijing Institute of Technology, 2005, 25(9): 757-760.

- [13] 王君, 刘振全. 采用圆渐开线修正涡旋压缩机涡齿型线的研究[J]. 机械工程学报, 2006, 42(6): 221-226.

WANG Jun, LIU Zhenquan. Investigation of wrap profile modification using circle involute for scroll compressor[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(6): 221-226.

作者简介: 王君, 男, 1976 年出生, 工学博士。主要从事涡旋压缩机、容积式压缩机和流体机械等方面的研究, 发表论文 30 余篇。

E-mail: wangjun@hdpu.edu.cn