

# 非线性迟滞系统建模方法\*

李冬伟 白鸿柏 杨建春 刘英杰

(军械工程学院自行火炮教研室 石家庄 050003)

摘要：针对一类迟滞非线性系统的动力学建模，提出了一种新的建模方法。该模型用高次非对称弹性力、粘性阻尼力及双折线记忆恢复力的机理构造，识别时应先采用分离算法识别各刚度和阻尼系数，再建立其与振幅和频率的函数关系。用所建模型重构的恢复力-位移迟滞回线表明：该模型能很好地描述这类非线性振动系统的特性，提出的建模及参数识别方法实用且有效。

关键词：非线性迟滞 数学建模 参数识别

中图分类号：TH113 O322

## 0 前言

在减振缓冲系统中，近年来出现了一些具有非线性迟滞特性的干摩擦弹性阻尼元件，如钢丝绳、金属橡胶制作的隔振器，这些元件在高低温、腐蚀环境等特种工况下能表现出良好的阻尼隔振性能，具有广泛的应用前景，但从相关文献可知，其刚度和阻尼特性很复杂，呈现强非线性，且与振幅和频率均有关，因此，关于这类系统的理论分析与工程化研究一直是动力学设计和优化领域的前沿性课题。如中科院力学所进行钢丝绳钢制框架的基础隔振试验，识别了钢丝绳减振器的等效刚度和阻尼，取得了比传统框架隔振器更好的减振效果<sup>[1]</sup>；上海船舶运输研究所经过反复试验，研制了 SJ-1 型钢丝绳减振器，并在许多工程车辆上得到使用<sup>[2]</sup>；西安交通大学振动与噪声控制研究所，将碗型金属橡胶减振器用于某型导弹惯性平台的减振缓冲，结果表明金属橡胶阻尼元件不但具有钢丝绳的大部分优异性能，还可根据需要制成各种形状，具有很大灵活性<sup>[3]</sup>；北京航空航天大学将环形金属橡胶减振器安装在轴承外环与轴承座之间，进行了大量的减振缓冲试验，充分证明了金属橡胶的减振性能超过了 SFD，且能可靠地工作在高低温环境下<sup>[4]</sup>。

## 1 非线性迟滞系统数学建模

### 1.1 文献简述

数学模型可分为参数模型与非参数模型。如传

递函数、微分方程等称为参数模型；瞬态响应曲线和频率响应曲线称为非参数模型。后者由于不显含物理参数，意义不大。

从近期文献看，用于描述这种非线性迟滞特性的参数模型有很多，如参考文献[5]指出的用于描述迟滞系统随机响应的一阶微分方程模型，这种模型对各种形状的迟滞回线均有较高的拟合精度，但其中各参数的物理意义不明确，模型形式不利于辨识，而且弹性力和阻尼力在恢复力表达式中不显含，不利于理论分析。

参考文献[6]提出了基于曲线拟合分解的复合型阻尼力模型，这种模型对于大位移时的钢丝绳等迟滞系统有比较高的精度，但它没有考虑无记忆弹性恢复力拉压时的非对称性，所以分解出的弹性力精度有待提高，而且此模型中的阻尼成分函数的概念不适于理解其阻尼机理。

参考文献[7]利用 Masing 模型，通过对金属橡胶隔振器的最初加载曲线进行坐标变换，得到了变形与力的非线性关系，但这种方法不适于分析弹性元件动态加载时恢复力与振幅和振动频率的关系。

综上所述，对于钢丝绳、金属橡胶等非线性迟滞系统，目前尚无一种能较好地建立反映其迟滞特性的动力学模型的方法，为此，在大量试验与理论分析的基础上，提出了一套既符合系统物理作用机理，又能反映系统恢复力随振幅与频率变化的建模与参数识别方法。

### 1.2 非线性迟滞模型及其线性化方法

理论与试验表明，由于制作类似金属橡胶、钢丝绳等弹性阻尼元件的钢丝间的摩擦、挤压和滑移等细观力学作用，这种元件宏观上会呈现出类似弹塑性材料的本构关系，导致恢复力与变形历史之间

\* 武器装备重点基金资助项目(6140420)。20041018 收到初稿，20050323 收到修改稿

具有所谓的记忆特性，据参考文献[8]可用双折线迟滞恢复力来描述；从参考文献[9]可知，这类元件自由振动响应的相邻周期阻尼系数变化不大，即其中存在粘性阻尼成分；根据参考文献[10]的振动台加载扫频试验，在相同振动幅值下，经过对同一组金属橡胶试件的正反向扫频，反向扫频的谐振频率和谐振点的加速度传递率峰值明显低于正向扫频，证明其刚度存在三次非线性；在参考文献[11]中对金属橡胶材料进行了位移控制下动态加载试验，发现其弹性恢复力是正反不对称的。再者，考虑一般情况，此类元件的刚度与阻尼都是频率和振幅的函数，故提出非对称弹性粘性阻尼双折线迟滞恢复力模型。

$$F(y(t), v(t), A, \omega) = F_k(\operatorname{sgn} y(t), y(t), A, \omega) + c(A, \omega)v(t) + z(t, A, \omega) \quad (1)$$

式中  $y(t), v(t)$  ——弹性元件的位移、速度

考虑到弹性恢复力的奇次性，非对称高次弹性力  $F_k(\operatorname{sgn} y(t), y(t), A, \omega)$  可表示为式(2)，其中， $\bar{k}_{2i-1}(A, \omega), k_{2i-1}^0(A, \omega)$  为各阶与振幅、频率有关的正反向刚度函数。

$$F_k(\operatorname{sgn} y(t), y(t), A, \omega) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \bar{k}_{2i-1}(A, \omega) y^{2i-1}(t) & y(t) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n k_{2i-1}^0(A, \omega) y^{2i-1}(t) & y(t) < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$c(A, \omega)$  表示与振幅、频率有关的粘性阻尼系数函数， $z(t, A, \omega)$  表示与变形历史有关的双折线关系记忆恢复力，其增量方程为

$$z(t, A, \omega) = \frac{k_s(A, \omega)}{2} [1 + \operatorname{sgn}(z_s(A, \omega) - |z(t, A, \omega)|)] dy(t) \quad (3)$$

式中， $k_s(A, \omega), z_s(A, \omega), y_s(A, \omega)$  分别表示与振幅、频率有关的未产生滑移时的线性刚度函数、滑移时的记忆恢复力函数、金属丝间发生宏观滑移的滑移极限函数，图 1 是双折线本构关系。

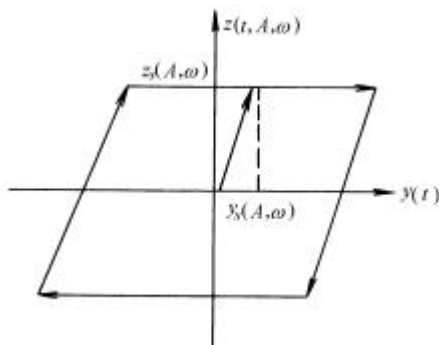


图 1 双折线本构关系

模型式(1)是一具有四个自变量的复杂的关于多

种函数的泛函问题，其中各阶正反向刚度函数  $\bar{k}_{2i-1}(A, \omega), k_{2i-1}^0(A, \omega)$ ，粘性阻尼函数  $c(A, \omega)$ ，以及与双折线记忆恢复力有关的  $k_s(A, \omega), z_s(A, \omega), y_s(A, \omega)$  取什么函数形式，与具体迟滞系统有关。这些函数的确定可分为以下几步：求出不同频率和振幅下的迟滞回线的拟和曲线，得到式(1)中对应的各阶离散的正反向刚度系数、粘性阻尼系数、双折线模型中的滑移记忆恢复力及滑移极限。找出这些数值随频率和振幅的变化趋势，从而假设它们的函数关系表达式，再利用参数识别算法寻找式中的各参数。

由此思路，先确定固定振幅  $A_0$  与频率  $\omega_0$  式(1)中的各离散函数值，即对式(4)参数识别。

$$F(y(t), v(t), A_0, \omega_0) = F_k(\operatorname{sgn} y(t), y(t), A_0, \omega_0) + c(A_0, \omega_0)v(t) + z(t, A_0, \omega_0) \quad (4)$$

可知式(4)中，前两部分里关于各待识别参数  $\bar{k}_{2i-1}(A_0, \omega_0), k_{2i-1}^0(A_0, \omega_0)$  及  $c(A_0, \omega_0)$  为线性关系，但因为  $z(t, A_0, \omega_0)$  是一具有记忆特性的非线性泛函，可利用正弦位移输入下的双折线恢复力的傅里叶级数展开<sup>[8]</sup>，进行线性化处理。

设  $y$  为位移控制下弹性元件的变形量

$$y(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + j) \quad (5)$$

引入坐标变换

$$t = t - t_z \quad t_z = \left(\frac{t}{2} - j\right) \frac{1}{\omega_0} \quad (6)$$

则式(6)变为

$$y = A_0 \cos \omega_0 t \quad (7)$$

根据关系式

$$A_0 - 2y_s(A_0, \omega_0) = A_0 \cos q \quad (8)$$

推得如下等式

$$q = \arccos \left[ 1 - \frac{2y_s(A_0, \omega_0)}{A_0} \right] \quad (9)$$

因为此时双折线恢复力  $z(t)$  是周期函数，可用傅里叶级数逼近，经过繁琐的推导，同时根据傅里叶系数的衰减性质取一阶近似， $z(t)$  最终可表述为

$$z(q^0; A_0, \omega_0) \approx a_1(A_0, \omega_0) \cos q^0 + b_1(A_0, \omega_0) \sin q^0 \quad (10)$$

式中  $q^0 = \omega_0 t$

$$\begin{cases} a_1(A_0, \omega_0) = \frac{z_s(A_0, \omega_0)}{\pi} (q - \sin q \cos q) \frac{A_0}{y_s(A_0, \omega_0)} \\ b_1(A_0, \omega_0) = -\frac{4z_s(A_0, \omega_0)}{\pi} \left[ 1 - \frac{y_s(A_0, \omega_0)}{A_0} \right] \end{cases} \quad (11)$$

式(10)是一个关于  $a_1(A_0, \omega_0)$  和  $b_1(A_0, \omega_0)$  的线性模型，而  $z_s(A_0, \omega_0)$  和  $y_s(A_0, \omega_0)$  通过非线性表达式(11)与之联系。这样，式(4)就可以表示成式(12)的线性结果。

$$F(y(t), v(t), A_0, w_0) \approx F_k(\text{sgn } y(t), y(t), A_0, w_0) + c(A_0, w_0)v(t) + a_1(A_0, w_0)\cos q^\circ + b_1(A_0, w_0)\sin q^\circ \quad (12)$$

此模型中所有参数皆为线性，理论上虽然可以一次性整体识别所有参数，但要求测试系统信噪比很高，实际使用时容易产生病态，因此又提出参数分离识别算法。

## 2 模型参数的识别

### 2.1 非线性迟滞模型的分离参数识别方法

为简约，推导过程省略振幅参数  $A_0$  与频率参数  $w_0$ 。由迟滞恢复力模型式(4)可知，总的恢复力  $F$  迟滞回线图 2a，是由非对称高次弹性恢复力  $F_k$  图 2b，一次粘性阻尼力  $F_c$  图 2c，双折线恢复力  $Z(t)$  图 2d 迭加而成的。图 2 中相同的两条长画线表示正反向振幅处  $\pm y_m$ ，相同的两条点线表示  $\pm y_m - 2y_s$  处。

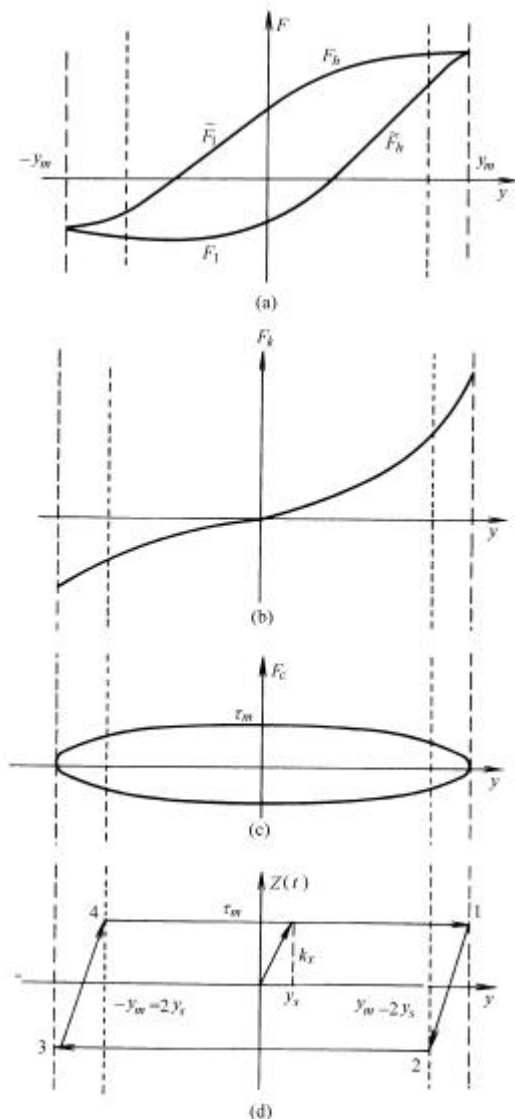


图 2 非对称弹性粘性阻尼双折线迟滞恢复力模型分解

### 2.1.1 迟滞回线多项式拟合

首先可以将总的迟滞回线分为  $F_h, F_h^0, F_l, F_l^0$  四条，其中， $F_h, F_l$  半支迟滞回线可以用幂函数多项式拟合表示为

$$F_h(y(t)) = \sum_{i=0}^n a_i y^i(t) \quad y(t) \geq 0 \quad v(t) \geq 0 \quad (13)$$

$$F_l(y(t)) = \sum_{i=0}^n a_i y^i(t) \quad y(t) \leq 0 \quad v(t) \leq 0 \quad (14)$$

将式(13)和式(14)中的幂函数多项式的奇、偶次项分开写，可进一步表示为

$$F_h(y(t)) = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} a_{2i-1} y(t)^{2i-1} + \sum_{i=0}^{(n-1)/2} a_{2i} y(t)^{2i} = Q_{h1} + Q_{h2} \quad y(t) \geq 0 \quad v(t) \geq 0 \quad (15)$$

$$F_l(y(t)) = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} a_{2i-1} y(t)^{2i-1} + \sum_{i=0}^{(n-1)/2} a_{2i} y(t)^{2i} = Q_{l1} + Q_{l2} \quad y(t) \leq 0 \quad v(t) \leq 0 \quad (16)$$

经以上处理， $F_h$  可以分解为  $F_{h1}, F_{h2}$  两部分， $F_l$  可以分解为  $F_{l1}, F_{l2}$  两部分。其中， $F_{h1}, F_{l1}$  为单值非线性函数， $F_{h2}, F_{l2}$  为双值非线性曲线。注意：由图 2 可知，不能认为  $F_{h1}, F_{l1}$  在  $-y_m > y(t) > y_m$  仅表示非线性弹性恢复力，因为双折线恢复力在  $0 < |y(t)| < y_m - 2y_s$  范围内关于横轴是对称的，在  $y_m > |y(t)| > y_m - 2y_s$  则是不对称的。但是一般情况下，记忆环节的滑移极限  $y_s$  很小，这样可以认为在  $0 < y(t) < y_m - 2y_s$  区间内， $F_{h1}$  的物理含义为正向变形时的弹性恢复力， $F_{h2}$  的物理含义为一次粘性阻尼力与双折线滞迟力之和；同理，在  $-y_m + 2y_s < y(t) < 0$  区间， $F_{l1}$  的物理含义为反向变形时的弹性恢复力， $F_{l2}$  的物理含义为一次粘性阻尼力与双折线滞迟力之和。因此，根据  $F_{h1}, F_{l1}$  可构建恢复力  $F_1(t)$ ，即有

$$F_1(t) = F_{h1} + F_{l1} \quad (17)$$

$F_1(t)$  表示在  $|y(t)| < y_m - 2y_s$  区间，非对称弹性恢复力随时间的变化。

### 2.1.2 粘性阻尼系数 $c$ 和滑移时记忆恢复力 $z_s$ 分离识别

粘性阻尼力和双折线干摩擦阻尼力与位移形成纯滞迟曲线，因此有

$$F_2(t) = F(t) - F_1(t) = cv(t) + z(t) \quad |y| < y_m - 2y_s \quad (18)$$

根据图 2c 和图 2d 不难发现，在速度取极大值点  $t = t_m$  附近，式(18)可表述为

$$F_2(t_{m+l}) = cv(t_{m+l}) + z_s \quad (19)$$

式中， $0 < |y(t_{m+l})| < y_m - 2y_s, l = 1, 2, \dots, L$ ，这样可

形成关于待识别参数的线性识别矩阵方程  $Ah = B$  , 其中  $A$  为系数矩阵,  $h = [c, z_s]$  为待识别参数矢量,  $B = [F_2(t_{m+1}), F_2(t_{m+2}), \dots, L]^T$  为粘性阻尼力与双折线滞迟力之和。一般大位移条件时具有很高的信噪比, 可直接利用普通最小二乘法识别出粘性阻尼系数  $\hat{c}$  和滑移时记忆恢复力  $\hat{z}_s$ 。

### 2.1.3 滑移极限 $y_s$ 分离识别

一次粘性阻尼力识别出来后, 可进行如下运算  $\bar{z}(t) = F(t) - \hat{c}v(t)$  ,  $\bar{z}(t)$  近似表述为

$$\bar{z}(t) \approx z(t) + \begin{cases} \sum_{i=1}^n \bar{k}_{2i-1} y^{2i-1}(t) & y(t) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n \hat{k}_{2i-1}^0 y^{2i-1}(t) & y(t) < 0 \end{cases}$$

式中  $y(t) = y_m \cos q^0$

在  $q^0(t) \rightarrow q^0(t) + 2\pi$  一个周期内, 考虑式(10)及三角函数的正交性, 有如下积分关系成立

$$\int_{q(t)}^{q(t)+2\pi} z(t) \sin q^0 \hat{q}^0 = \pi b_1 \quad (20)$$

根据式(20)可以得到双折线傅里叶级数展开系数  $b_1$  的估计  $\hat{b}_1$  , 联系式(11), 可以立即得到滑移极

限  $y_s$  的估计  $\hat{y}_s = \left(1 + \frac{\pi \hat{b}_1}{4 \hat{z}_s}\right) y_m$ 。

### 2.1.4 非线性弹性恢复力识别

得到滑移极限和滑移时记忆恢复力的估计  $\hat{y}_s$  和  $\hat{z}_s$  后, 根据式(3)立即得到双折线记忆恢复力  $z(t)$  的估计  $\hat{z}(t)$  , 并构建恢复力  $F_3(t)$ 。

$$F_3(t) = F(t) - \hat{c}v(t) - \hat{z}(t) \quad (21)$$

$F_3(t)$  正向变形部分为  $F_{3h}[y(t)]$  将其反向延拓为  $\hat{F}_{3h}^0[y(t)]$  , 即  $\hat{F}_{3h}^0[y(t)] = -\hat{F}_{3h}^0[-y(t)]$  , 这时可运用多项式拟合, 得到正向变形非线性弹性恢复力估计  $\hat{k}_{2i-1}$  ( $i=1, 2, L$ )。同理, 可得到反向变形非线性弹性恢复力估计  $\hat{k}_{2i-1}^0$  ( $i=1, 2, L$ )。

至此, 所有参数识别完毕。

## 2.2 金属橡胶弹性元件恢复力模型参数识别

金属橡胶是一种新型弹性减振材料, 它是不同规格的金属丝为原材料, 经螺旋缠绕、拉伸和模压等特殊制备工艺成形的。其内部结构是细金属丝相互交错、勾联形成的类似橡胶高分子结构那样的空间网状大分子链接形态, 这种材料受到载荷时可以耗散大量的振动能量, 是一种非常理想的可替代橡胶的高弹性、大阻尼弹性元件<sup>[12]</sup>。

为验证本迟滞恢复力模型及算法的正确性与精度, 在材料试验机上对金属橡胶弹性元件进行了正弦位移加载试验, 元件密度  $2 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  , 金属

丝直径 0.15 mm, 金属丝螺旋卷直径为 2 mm。经过对动态测试数据的深入分析后, 可知其各阶正反向弹性刚度与频率  $\omega$  无关, 只与振幅有关, 而干摩擦阻尼及粘性阻尼情况较为复杂, 则由式(1)提出数学模型

$$F[y(t), v(t), A, \omega] = F[\text{sgn } y(t), y(t), A] + c(A, \omega)v(t) + z(t, A, \omega) \quad (22)$$

式中

$$F[\text{sgn } y(t), y(t), A] = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \bar{k}_{2i-1}(A) y^{2i-1}(t) & y(t) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^3 \hat{k}_{2i-1}^0(A) y^{2i-1}(t) & y(t) < 0 \end{cases}$$

由分离参数识别算法对每一迟滞回线进行参数辨识, 可以得到各阶刚度函数、粘性阻尼系数函数、滑移时记忆恢复力函数及滑移极限函数在每种工况下的值, 分析这些数据随振幅和频率的变化趋势, 进一步提出它们的数学表达式

$$\bar{k}_{2i-1}(A) = \sum_{j=0}^{i+2} \bar{a}_j A^j \quad \hat{k}_{2i-1}^0(A) = \sum_{j=0}^{i+2} \hat{a}_j A^j \quad (23)$$

$$c(A, \omega) = b_{c1} \frac{A^{b_{c2}}}{(\omega/2\pi)^{b_{c3}}} \quad (24)$$

$$z_s(A, \omega) = d_{z1} \frac{A^{d_{z2}}}{(\omega/2\pi)^{d_{z3}}} \quad (25)$$

$$y_s(A) = \sum_{j=0}^2 e_j A^j \quad (26)$$

然后利用非线性参数辨识的 Marquardt 法编制计算机程序, 根据已得到的各个工况下的离散函数值对式(23)~(26)中各待识别参数进行辨识。得到

$$\bar{k}_1(A) = 2.14A^3 - 3.29 \times 10A^2 + 1.93 \times 10^2 A + 9.98$$

$$\hat{k}_1^0(A) = 6.03A^3 - 3.59 \times 10A^2 + 2.18 \times 10^2 A + 5.64$$

$$\bar{k}_3(A) = -6.51 \times 10^{-2} A^4 + 1.259 \times 10^{-1} A^3 -$$

$$1.829 \times 10A^2 + 0.673 \times 10^2 A + 1.173$$

$$\hat{k}_3^0(A) = -4.129 \times 10^{-2} A^4 + 4.108 \times 10^{-1} A^3 -$$

$$2.196 \times 10A^2 + 0.878 \times 10^2 A + 5.184$$

$$\bar{k}_5(A) = -2.168 \times 10^{-3} A^5 - 2.689 \times 10^{-2} A^4 +$$

$$9.937 \times 10^{-1} A^3 - 1.258 \times 10A^2 +$$

$$6.167 \times 10^2 A - 1.923$$

$$\hat{k}_5^0(A) = -4.102 \times 10^{-3} A^5 - 4.679 \times 10^{-2} A^4 +$$

$$5.248 \times 10^{-1} A^3 - 3.145 \times 10A^2 +$$

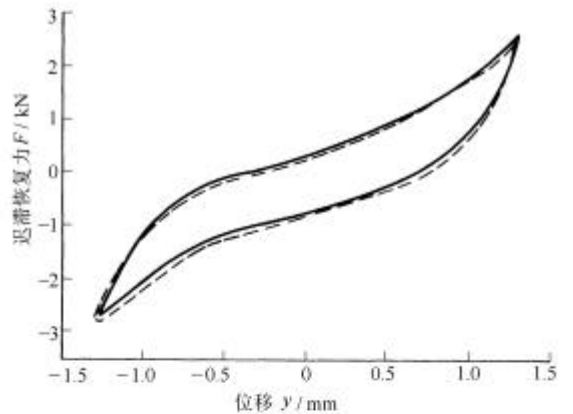
$$4.255 \times 10^2 A - 2.356$$

$$c(A, \omega) = 5.212 \frac{A^{0.992}}{(\omega/2\pi)^{0.287}}$$

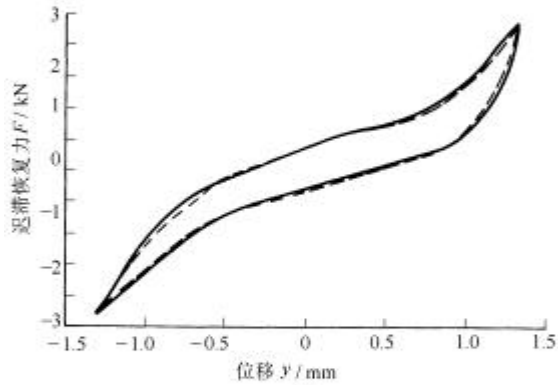
$$z_s(A, w) = 19.692 \frac{A^{2.086}}{(w/2\pi)^{0.917}}$$

$$y_s(A) = -2.1574 \times 10^{-3} A^2 + 2.9256 \times 10^{-2} A + 0.1289$$

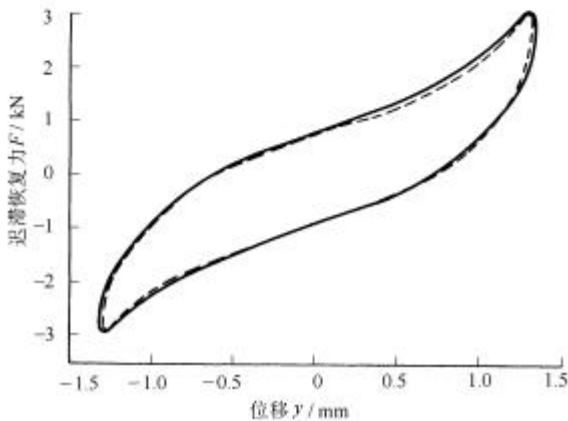
这样，由恢复力表达式(22)可以重构出不同振幅和频率下的恢复力迟滞回线。为了证实该模型的正确性，下面绘出不同频率及振幅下数学模型重构的恢复力 - 位移迟滞回线，并画出对应的试验实测曲线，如图 3a~3c 所示，图中虚线为理论拟和曲线，实线为试验曲线。由图 3 可知，理论迟滞回线和试验迟滞回线吻合得很好，由此表明，提出的非对称弹性粘性阻尼双折线迟滞恢复力模型及其参数识别过程的实用性和有效性。



(a) 弹性元件振幅 1.3 mm，频率 2 Hz 时的识别值与实测值对比



(b) 弹性元件振幅 2.6 mm，频率 2 Hz 时的识别值与实测值对比



(c) 弹性元件振幅 1.3 mm，频率 4 Hz 时的识别值与实测值对比

图 3 试验实测曲线

### 3 结论

具有非线性迟滞特性的弹性元件的恢复力表达式可以用提出的方法建立式(1)表示的数学模型。迟滞回线的形状和宽窄由数学模型中的刚度函数、粘性阻尼函数、滑移记忆恢复力函数和滑移极限函数以及它们的待定参数控制。用所提出的方法能有效地构造和辨识出对应的函数和参数，为此类元件的进一步动力学设计和优化提供了必要条件。

### 参 考 文 献

- 1 田千里, 高赞明. 用钢丝绳减振器控制结构振动. 机械强度, 1991, 13(4): 7~10
- 2 胡振锡, 毛家祥. SJ-1 型钢丝绳减振器的特性研究及其应用. 振动与冲击, 1988, 7(3): 67~72
- 3 白鸿柏, 黄协清. 金属橡胶减振器实验研究 [研究报告]. 西安: 西安交通大学, 1998
- 4 王新, 朱梓根. 一种高性能的转子减振器——环形金属橡胶减振器: [研究报告]. 北京: 北京航空航天大学, 1986
- 5 Bouc R. Forced vibration of mechanical system with hysteresis. In: Proceedings of 4th Conference on Nonlinear Oscillation Prague, Czechoslovakia, 1967
- 6 龚宪生, 赵玫. 非线性迟滞特性钢丝绳联轴器建模与参数辨识. 见: 第六届全国振动理论及应用学术会议论文集, 武汉, 华中理工大学, 1997
- 7 姜洪源, 敖宏瑞. 实验建模方法在金属橡胶隔振系统分析中的应用. 实验力学, 2002, 17(3): 363~368
- 8 白鸿柏, 张培林, 郑坚. 滞迟振动系统及其工程应用. 北京: 科学出版社, 2002
- 9 邓剑波. 悬臂梁根部金属橡胶减振器阻尼性能的实验研究. 航空动力学报, 1998, 13(4): 425~428
- 10 李冬伟, 白鸿柏. 金属橡胶阻尼板筒支结构阻尼特性研究. 军械工程学院学报, 2003, 15(2): 6~9
- 11 李冬伟. 金属橡胶弹性联轴器弹性阻尼性能研究: [硕士学位论文]. 石家庄: 军械工程学院, 2004
- 12 契戈达耶夫. 金属橡胶构件的设计. 李中鄂译. 北京: 国防工业出版社, 2000

### MODELING OF A NONLINEAR SYSTEM WITH HYSTERESIS CHARACTERISTICS

Li Dongwei Bai Hongbai  
Yang Jianchun Liu Yingjie

(Guns Engineering Department, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang 050003)

(下转第 214 页)