

压电石英晶片扭转效应理论研究与验证*

高长银 孙宝元

(大连理工大学精密与特种加工教育部重点实验室 大连 116024)

摘要: 从各向异性弹性理论和麦克斯韦电磁理论出发,较系统地探讨了圆形压电石英晶片扭转效应理论,得出了扭转应力场与非线性极化电场分布规律,并采用有限元法求得了极化电荷电场在压电片内的分布。根据理论分析,用分割电极法有效地在压电片表面布置了检测电极,理论与试验结果均表明电极检测的极化电荷量与外转矩成线性关系,理论与试验基本符合。这些研究为新型转矩传感器与测力仪的开发奠定了必要的理论基础。

关键词: 压电 扭转效应 非线性极化 各向异性

中图分类号: O738

0 前言

压电石英具有良好的静、动态特性及稳定性,从而被广泛应用于航空、航天、交通运输、冶金、机械制造、工业控制、自动检测和计量等领域。在这些应用中主要采用石英的纵向、横向和剪切压电效应,而对它的扭转效应研究较少。

早期扭转研究主要集中在压电陶瓷材料组成、扭转换能器与超声波电动机等方面。相继开发出了压电复合材料并组建成平面型、圆柱型和拼接型扭转压电器件^[1]。M.Takeshi等^[2]用多层压电扭转执行器制造出一个平滑冲击扭转电动机。在研究超声波电动机时,提出了夹心式扭转振子的概念,它由几个压电陶瓷片组合成单层振子,在每个压电片内产生纵向极化,整体在外部呈现纯扭转振动^[3,4]。而后又相继开发出了纵一扭复合杆型^[5]、锥型^[6]以及定子转子型^[7,8]超声波电动机。在这些研究中,均采用压电陶瓷材料进行了多片单层或多层拼接,从而使器件整体呈现出扭转效果,而对单体压电石英扭转效应研究较少,制约了扭转效应的应用,迫切需要建立起比较完善的压电扭转效应理论。参考文献[9]对方形压电石英柱体在转矩作用下极化情况进行了研究,并初步建立了压电柱体扭转理论,但该研究只限于理论上的探讨,不能满足实际应用的需要。在此基础上针对压电石英的各向异性特性,应用各向异性弹性理论和电磁理论对石英晶片的扭转效应进行了探索性研究,并给予试验验证。

1 理论分析

压电石英属于机电耦合材料,压电扭转效应所

体现的是将应力、应变张量同电极化强度和电场强度矢量联系在一起的线性机电耦合效应。对压电石英扭转效应分析主要考虑压电晶片由扭转产生的应力,通过压电方程得到电极化强度的过程。

1.1 扭转应力分析

研究对象为一个由直线型均匀各向异性材料石英组成的圆片,其中一个端面固定,另一端面作用于一个转矩,转矩方向与端面方向一致。将笛卡儿坐标系原点选在固定端面中心, z 轴沿圆片的轴线方向, x 和 y 轴可在圆片内任意放置。

根据各向异性弹性理论,压电石英晶片扭转应力求解^[10]可归结为在边界条件式(3)、(4)下寻找满足微分方程式(1)、(2)的平面应力函数 $F(x,y)$ 和扭转应力函数 $\phi(x,y)$ 的问题。

$$\begin{aligned} L_4 F + L_3 \phi &= 0 \\ L_3 F + L_2 \phi &= -2\theta + \frac{M_t}{2s_{33}} \left(\frac{s_{34}^2}{I_2} + \frac{s_{35}^2}{I_1} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

式中的微分算子为

$$\begin{cases} L_4 \equiv \beta_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \\ L_3 \equiv -\beta_{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\beta_{25} + \beta_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (\beta_{14} + \beta_{56}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \beta_{15} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\ L_2 \equiv \beta_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\beta_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \beta_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \phi|_r = 0 \end{cases} \quad (2)$$

* 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(980140106, 20010141006)。20030530收到初稿,20031018收到修改稿

$$\begin{cases} \iint \tau_{xz} dx dy = 0 & \iint \sigma_z y dx dy = 0 \\ \iint \tau_{yz} dx dy = 0 & \iint \sigma_z x dx dy = 0 \\ \iint \sigma_z dx dy = 0 & \iint (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dx dy = M_t \end{cases} \quad (4)$$

式中 I_1, I_2 —— 横截面对 x 轴和 y 轴的主截面二次矩

s_{ij} —— 弹性顺度常数

M_t —— 转矩

β_{ij} —— 折减柔度系数, 且

$$\beta_{ij} = s_{ij} - \frac{s_{i3}s_{j3}}{s_{33}} \quad i, j=1,2,4,5,6$$

针对具体扭转问题, 根据微分方程和边界条件可设扭应力函数为

$$\phi(x, y) = \left[\vartheta - \frac{M_t}{4s_{33}} \left(\frac{s_{34}^2}{I_2} + \frac{s_{35}^2}{I_1} \right) \right] \bar{\phi}(x, y) \quad (5)$$

使得 $\bar{\phi}$ 在边界上为零。

式中 ϑ —— 单位长度扭转角, 可由式(6)确定

$$\vartheta = \left[\frac{1}{\bar{k}} + \frac{1}{4s_{33}} \left(\frac{s_{34}^2}{I_2} + \frac{s_{35}^2}{I_1} \right) \right] M_t \quad (6)$$

式中 \bar{k} —— 各向同性简单扭转刚度

$$\bar{k} = 2 \iint \bar{\phi}(x, y) dx dy \quad (7)$$

如果知道函数 $\phi(x, y)$ 和 $F(x, y)$, 各应力分量可以根据式(8)和式(9)求得

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} & \tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \quad (8)$$

$$\sigma_z = \frac{M_t}{2s_{33}} \left(\frac{s_{34}}{I_2} x - \frac{s_{35}}{I_1} y \right) - \frac{1}{s_{33}} (s_{13}\sigma_x + s_{23}\sigma_y + s_{34}\tau_{yz} + s_{35}\tau_{xz} + s_{36}\tau_{xy}) \quad (9)$$

1.2 极化电场分析

对于压电晶体, 若应力相当小并取一级近似, 则正压电效应所产生的电极化强度 \mathbf{P} 与所受应力 σ_{ij} 成线性关系。由于压电张量为三阶张量, 因此压电现象只存在于无对称中心的离子晶体或离子团组成的分子晶体中, 它们共同的结构特点是具有正、负离子构成的极轴。简化压电和应力张量的下标后, 压电方程可写成

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (10)$$

根据有物质存在时静电场所遵循的原则^[11], 石英晶片扭转产生的电场等效于面束缚电荷和体束缚电荷所产生的电场, 等效束缚电荷所产生电场同样满足麦克斯韦方程。

等效束缚面电荷密度为

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (11)$$

式中 \mathbf{n} —— 介质表面外法线单位矢量

等效束缚体电荷密度为

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (12)$$

此时, 各向异性介质静电场麦克斯韦方程为^[12]

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_b \end{cases} \quad (13)$$

静电场边界条件为

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \sigma_b \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

显然, 由式(13)中的第一式得知

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (15)$$

式中 ϕ —— 各向异性介质中静电场标量势

各向异性介质电场本构方程为

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \mathbf{E} \quad (16)$$

把式(15)代入式(16)后, 所得结果再代入式(13)

中的第二式得

$$\nabla \cdot (\varepsilon_r \nabla \phi) = -\frac{\rho_b}{\varepsilon_0} \quad (17)$$

引入介电常数并矢

$$\varepsilon_r = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (18)$$

将式(18)代入式(17)中整理, 便得到各向异性介质中静电势所满足的泊松方程

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\rho_b}{\varepsilon_0} \quad (19)$$

此时边界条件转变成

$$\left[\varepsilon_0 \varepsilon_{ij} \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{n}} - \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{n}} \right] \Big|_{\Sigma} = \sigma_b \quad (20)$$

$$\phi_1 \Big|_{\Sigma} = \phi_2 \Big|_{\Sigma} \quad (21)$$

求解各向异性介质静电场问题可转化为求解满足边界条件式(20)、(21)下的泊松方程式(19)问题。

2 实例计算与电场模拟

为验证此理论方法的有效性, 对试验采用的石英晶片给出对应的理论计算结果。

试验采用截面为环状右旋 α -石英晶片, 内径 $d_2=13.5$ mm, 外径 $d_1=24$ mm, 厚度为 1 mm。石英

的晶体坐标系 $O'x'y'z'$ ，见图 1。由于压电系数、弹性系数等相关参数都是按晶体坐标系给定的，为了计算方便须将晶体坐标系变换到上述理论分析所采用的坐标系，具体方法是将晶片绕晶体坐标系 $O'x'y'z'$ 的 x' 轴逆时针旋转 270° ，再沿旋转后的新坐标 z' 轴逆时针旋转 270° ，从而得到所用的计算坐标系 $Oxyz$ ，如图 1 所示。在坐标变换时，弹性顺度常数与压电张量按照张量坐标变换法则变化。各种相关石英晶体参数^[13]见下表。

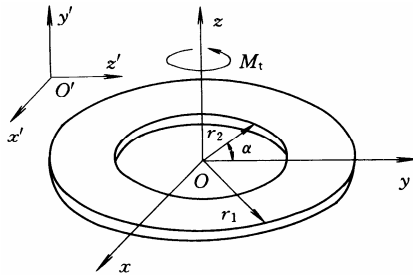


图 1 晶体坐标系与计算坐标系

表 石英晶体物理参数表 (室温)

物理性质	参数值	
	$s_{11}=12.77$	$s_{33}=9.60$
弹性顺度常数 $s/(\text{pm}^2 \cdot \text{N}^{-1})$	$s_{44}=20.04$	$s_{12}=-1.79$
	$s_{13}=-1.22$	$s_{14}=-4.50$
介电常数 ϵ	$\epsilon_{11}=4.52$	$\epsilon_{33}=4.62$
压电应变常数 $d/(\text{pC} \cdot \text{N}^{-1})$	$d_{11}=2.31$	$d_{14}=-0.727$

2.1 扭转应力计算

对于本试验所用圆片石英，由边界条件式(3)不难得到它的应力函数解

$$F(x, y) = 0 \tag{22}$$

$$\bar{\phi}(x, y) = \left[r_1^2 - (x^2 + y^2) \right] / (\beta_{44} + \beta_{55}) \tag{23}$$

故有

$$\phi(x, y) = \left\{ g - \frac{M_t}{4s_{33}} \left(\frac{s_{34}^2}{I_2} + \frac{s_{35}^2}{I_1} \right) \times \left[r_1^2 - (x^2 + y^2) \right] \right\} (\beta_{44} + \beta_{55}) \tag{24}$$

由于截面的多连通性，设应力函数在外边界上为 0，则在内边界为待定常数 k ，内边界所围面积为 A ，则

$$k = \phi(x, y) \Big|_{x=r_2 \cos \alpha, y=r_2 \sin \alpha} = \left[g - \frac{M_t}{4s_{33}} \left(\frac{s_{34}^2}{I_2} + \frac{s_{35}^2}{I_1} \right) \right] \times (r_1^2 - r_2^2) / (\beta_{44} + \beta_{55}) \tag{25}$$

$$A = \pi r_2^2 \tag{26}$$

由于多连通边界条件 $M_t = 2 \iint \phi dx dy + 2kA$ ，得

$$g = \left[\frac{(\beta_{44} + \beta_{55})}{\pi (r_1^2 - r_2^2)^2 + 2\pi r_2^2 (r_1^2 - r_2^2)} + \frac{1}{4s_{33}} \left(\frac{s_{34}^2}{I_2} + \frac{s_{35}^2}{I_1} \right) \right] M_t \tag{27}$$

将式(27)代入式(24)从而得到

$$\phi(x, y) = \frac{r_1^2 - (x^2 + y^2)}{\pi (r_1^2 - r_2^2)^2 + 2\pi r_2^2 (r_1^2 - r_2^2)} M_t \tag{28}$$

由式(8)和(9)可以计算出各应力分量。

2.2 束缚电荷密度计算

联立式(8)、(9)、(11)、(12)和(28)可求得束缚电荷密度值。

束缚面电荷密度为

$$\sigma_{bx+} = d_{13}\sigma_z + d_{14}\tau_{yz} + d_{15}\tau_{xz} = 0 \tag{29}$$

$$\sigma_{by+} = d_{23}\sigma_z + d_{24}\tau_{yz} + d_{25}\tau_{xz} = 0.000\ 024\ 803yM_t \tag{30}$$

$$\sigma_{bz+} = d_{33}\sigma_z + d_{34}\tau_{yz} + d_{35}\tau_{xz} = 0.000\ 157\ 619xM_t \tag{31}$$

式中 + —— 坐标轴的正方向

束缚体电荷密度

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = - \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) = -0.000\ 024\ 803M_t \tag{32}$$

根据计算得到的束缚面电荷与体电荷密度分布，采用 Mathworks 公司 Matlab 软件包的偏微分方程工具箱对扭转极化电场在 Oxy 截面分布进行数值求解。图 2 为正单位转矩(N·mm)所产生的 Oxy 截面电势等值线分布图；图 3 为电场强度矢量图，箭头的尺寸正比于场强的大小，其方向为场强的方向，从图中可看出电场强度在第一、三象限的对角线上取得最大值，而且场强与电势分布是对称的，这是束缚电荷对称分布的必然结果。

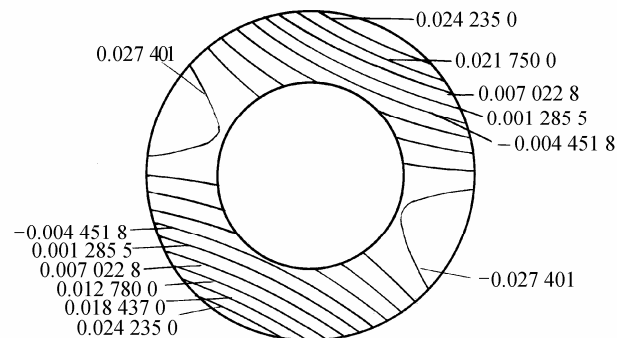


图 2 Oxy 截面电势等值线分布图

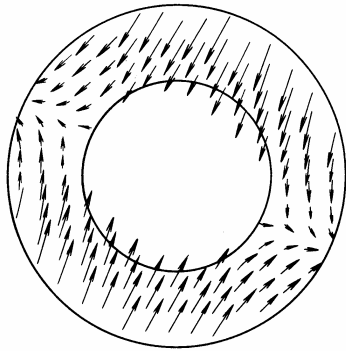


图3 Oxy截面电场强度矢量图

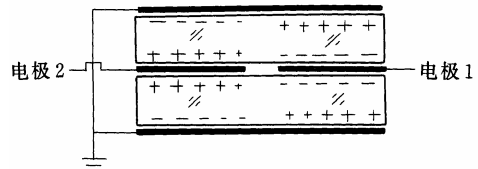


图5 晶片与电极布置图

3 试验与结果分析

为了使石英晶片扭转效应能应用到实际传感器中，需要在晶片表面粘贴电极将扭转电荷从晶体表面引出，特设计如下试验来分析检测电极的有效粘贴方法及验证上述实例数值计算结果的正确性。

为了合理地布置电极以有效地检测晶片的扭转效应，必须考虑面束缚电荷在晶片表面的分布情形。由束缚电荷密度计算和电场数值模拟结果得出，在晶片上与 x 轴垂直表面极化电荷密度为零，与 y 轴垂直表面为圆弧面，不便于贴放电极，而在与 z 轴垂直表面极化电荷密度分布见图4(转矩为 $1\text{ N}\cdot\text{mm}$)。从图4可以看出极化电荷分布是非均匀的，晶片上以 $x=0$ 为分界线，在 $x>0$ 时，电荷密度与 y 轴坐标无关，与 x 轴成线性关系，且为正；而在 $x<0$ 时，电荷密度与 y 轴坐标无关，与 x 轴成线性关系，且为负，所以要有效检测电荷必须在晶片上布置两片半圆环电极进行测量，一片检测正电荷，另一片检测负电荷，即采用分割电极法进行测量，电极与晶片布置见图4、5。

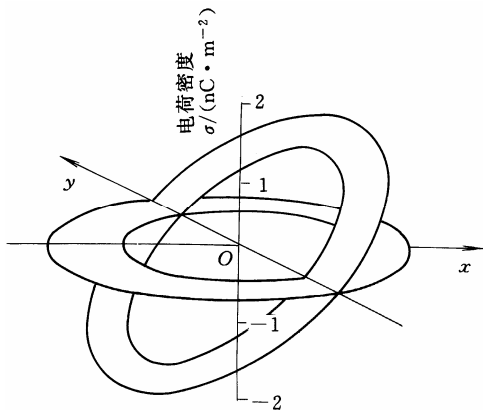


图4 Oxy截面极化电荷密度分布图

试验装置示意图见图6。试验中转矩通过机械装置加载，采用FDH-2型电荷放大器和SY2-III数字表进行测量。

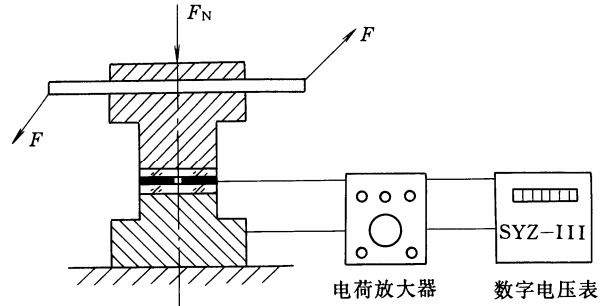


图6 试验装置示意图

利用分割电极法测得转矩与极化电荷量的关系，见图7。图7中，理论值曲线是利用式(31)通过积分计算而得到的。从中可以发现无论是理论曲线还是试验结果均表明每片电极所测量的电荷量与转矩成线性关系，随着转矩增加电荷量也不断增大；理论值与试验结果最大偏差小于10%。通过减小晶片切型误差及电极在贴放时相对于晶片表面位置偏差，提高电极的尺寸精度和对石英参数进行实际测量等措施可进一步缩小理论与试验偏差。

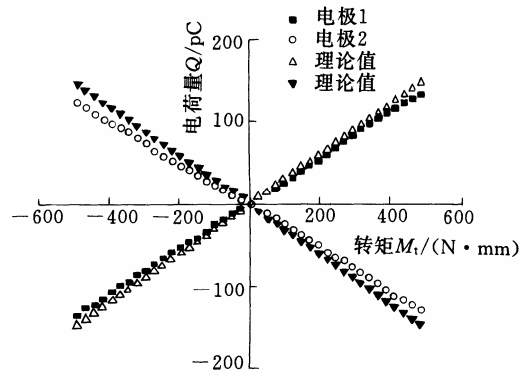


图7 扭转电荷量与转矩的关系

4 结论

对圆环压电石英晶片扭转效应进行了理论与试验研究，理论与试验结果均表明在转矩作用下， α -石英晶片能够产生扭转效应，在垂直于机械轴表面上产生极化电荷，极化电荷以电轴为分界线反对称，一半平面为正，另一半平面为负；并通过分析检测电极的有效粘贴方法，采用分割电极法测得的极化电荷量同转矩成线性关系。这些研究为新型压电转

矩传感器与测力仪的制作提供必要的理论基础。

参 考 文 献

- 1 党长久, 杨玉瑞, 李明轩. 扭转压电复合材料及其应用. 应用声学, 1997, 16(2): 7~13
- 2 Takeshi M, Ryuichi Y, Yasuhiro O, et al. A smooth impact rotation motor using a multi-layered torsional piezoelectric actuator. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 1999, 46(6): 1 439~1 445
- 3 孙国武, 程存弟. 矩形扭转压电换能器的研制. 应用声学, 1996, 15(2): 20~23
- 4 林书玉. 夹心式压电超声扭转振动换能器的设计. 压电与声光, 1994, 16(1): 24~28
- 5 Chulho K, David L, Wu C C, et al. High authority piezoelectric torsional actuators. In: Proceeding of the 11th IEEE International Symposium on Applications of Ferroelectrics, 1998, Montreux, 1998: 277~280
- 6 Lin S Y. Transducers of longitudinal-torsional compound vibrational modes. IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics and Frequency Control, 1997, 44(6): 1 189~1 197
- 7 Ohnishi O, Myohga O, Uchikawa T, et al. Piezoelectric ultrasonic motor using longitudinal-torsional composite vibration of a cylindrical resonator. In: IEEE Proceedings Ultrasonics symposium, 1989, 2: 739~742
- 8 Tomikawa Y, Adachi K, Aoyagi M. Some constructions and characteristics of rod-type piezoelectric ultrasonic motors using longitudinal and torsional vibrations. Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions, 1992, 39(5): 600~608
- 9 吴润彤, 孙宝元. 压电体扭转效应研究. 大连理工大学学报, 2001, 41(2): 188~191
- 10 Lekhnitskii S G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. Moscow: Mir Publisher, 1981
- 11 徐永斌. 工程电磁场基础. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1992

- 12 苏武浔, 魏腾雄, 陈燊年. 各向异性电介质中静电势的解. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(3): 308~311
- 13 Roger W W. The constants of alpha quartz. In: 14th Piezoelectric Devices Conference and Exhibition, Kansas, 1992, 2: 61~72

THEORETICAL RESEARCH ON THE TORSIONAL EFFECT OF PIEZOELECTRIC QUARTZ WAFER AND EXPERIMENTAL VALIDATION

Gao Changyin Sun Baoyuan

(Key Laboratory for Precision & Non-traditional Machining of Ministry of Education, Dalian University of Technology, Dalian 116024)

Abstract: The torsional effect of piezoelectric quartz wafer is first investigated. The torsional theory of circular quartz is deduced by using the anisotropic elasticity and Maxwell electromagnetic theory, then the stress field and electrostatic field is founded. The distribution of the electric field in the piezoelectric body is obtained by the finite element method. Based on theoretical analysis of the bound charge distribution, the measuring electrodes are effectively disposed on the surfaces of the piezoelectric body. As the result, the polar charge is linear with the torque. A satisfactory agreement is obtained between the computed results and experimental results. The analysis provides the basis for the torque measuring technique on the single circular piezoelectric quartz.

Key words: Piezoelectricity Torsional effect
Nonlinear polarization Anisotropy

作者简介: 高长银, 男, 1975 年出生, 博士研究生。主要研究方向为传感器技术。

E-mail: changyingao@163.com