

DOI: 10.3901/JME.2009.06.041

# 基于 Kane 方法的仿鱼机器人波状游动的动力学建模\*

夏 丹 陈维山 刘军考 韩路辉

(哈尔滨工业大学机器人技术与系统国家重点实验室 哈尔滨 150080)

**摘要:** 提出了基于 Kane 方法的仿鱼机器人波状游动的动力学模型。通过对鱼体波状游动的运动学描述, 将仿鱼机器人离散成刚性头部、柔性身体和摆动尾鳍三个部分并划分为多个运动环节进行分析, 考虑鱼体外部环境的作用力: 流体附加质量、流体加速作用的弗劳德-克里洛夫力、鱼体游动过程中的阻力特征, 建立仿鱼机器人的动力学模型。数值实例表明, 利用该动力学模型, 能够有效地实现给定鱼体各环节的运动参数求解作用力矩、给定作用力矩求解运动规律, 进一步设计仿鱼机器人各环节的运动规律, 寻找一种实现鱼体推进力最大和推进效率最高的规划方法。该动力学模型的建立为研究仿鱼机器人的运动控制算法和规划算法, 揭示鱼体利用流场能量的动力学机理提供了重要理论支撑。

**关键词:** 仿鱼机器人 动力学模型 Kane 方法 运动环节

**中图分类号:** TP24

## Dynamic Modeling of a Fishlike Robot with Undulatory Motion Based on Kane's Method

XIA Dan CHEN Weishan LIU Junkao HAN Luhui

(State Key Laboratory of Robotics and System, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080)

**Abstract:** A dynamic model of a fishlike robot with undulatory motion based on Kane's method is presented. Through kinematic description of the fish body with undulatory movement, the fishlike robot is divided into rigid head, flexible body and oscillating caudal fin which include many motion links. The dynamic model for a fishlike robot with multiple motion links is developed with the consideration of external environmental forces, such as the fluid added mass, the Froude-Kriloff force of fluid acceleration and the flow drag during fish swimming. The numerical example shows that acting moment of a motion link can be solved for given value of motion parameters with the exploitation of the dynamic model, and vice versa. Furthermore, the planning technique for the maximum thrust and highest propulsive efficiency can be explored by designing the motion law for each motion link. The dynamic model developed is a key theoretical support to the research on motion control algorithm as well as planning algorithm, and the revelation of dynamic mechanism of fish exploiting flow energy.

**Key words:** Fishlike robot Dynamic model Kane method Motion link

## 0 前言

水中环境的“丛林法则”造就了鱼类高超的游泳技巧和灵敏的感知功能, 为人类解决许多实际问题提供了宝贵的仿生原型, 比如近十余年来, 不同层次的仿鱼机器人样机分别在国内外面世, 样机的

成功研制将会给未来的航行推进技术带来巨大的变革<sup>[1-4]</sup>。然而, 目前已有的仿鱼机器人样机游动性能与真鱼有很大差距, 究其原因, 除了推进机理研究不足外, 目前尚未有精确的控制模型出现<sup>[5]</sup>。如何利用数学工具或试验手段建立仿鱼机器人的动力学模型, 给出其运动控制方法和规划算法, 是目前未能很好解决的问题<sup>[6]</sup>。

在鱼类波状游动的动力学理论方面, 自 1936 年英国生物学家 GRAY<sup>[7]</sup>提出“著名 Gray 悖论”以

\* 国家自然科学基金(59705011)和哈尔滨工业大学机器人技术与系统国家重点实验室自主研究基金(SKLR5 200801C)资助项目。20080923 收到初稿, 20090109 收到修改稿

来, 国内外学者从不同角度进行了深入而细致的研究。TAYLOR<sup>[8]</sup>采用“静态流体理论”建立了一种适用于低雷诺数的“抗力水动力学模型”; LIGHTHILL<sup>[9]</sup>引入“细长体理论”对于鱼体运动进行分析建模; WU<sup>[10]</sup>提出了“二维波动板理论”, 将鱼体看作弹性薄板分析其游动过程; CHENG 等<sup>[11]</sup>提出了“三维波动板理论”, 采用三维非定常网格法在频域内求解鱼体的游动性能; SANDBERG 等<sup>[12]</sup>用基于非结构化网格的有限元法计算了摆动翼的非定常水动力性能; NAKASHIMA 等<sup>[13]</sup>发展了一种简单的计算两节点海豚状机器人的水动力性能的方法。近年来, TARN 等<sup>[14]</sup>利用 Kane 方法建立了水下推进器操纵臂的动力学模型; KAREN 等<sup>[15]</sup>借鉴经典空气动力理论建立了水下波动翼的动力学理论; ZHU 等<sup>[16]</sup>分析了鱼体运动时的流场结构和涡控制机理, 指出鱼体通过尾鳍摆动制造涡流并产生射流尾迹; GALLS 等<sup>[17]</sup>建立了一种柔性鱼体的计算模型并进行数值仿真, 仿真结果代入神经网络训练, 网络输出作为规划鱼体动作的指令。从这些文献不难发现针对仿鱼机器人的动力学问题, 研究者们主要致力于分析尾鳍及摆动翼的非定常水动力性能和鱼体运动的涡控制机理上, 而对整个鱼体建立波状游动的动力学模型, 给出合适的运动控制方法, 据作者所知, 很少有人研究。

本研究采用 Kane 方法的显式形式, 建立仿鱼机器人波状游动的动力学模型, 并进行数值仿真。建立的动力学模型具有如下功能: ① 给定鱼体各环节的运动规律, 可求解作用力矩; 给定各环节的作用力矩, 可求解运动规律; ② 在①的基础上, 计算力矩做功和鱼体能量变化情况, 通过修改环节力矩或运动规律, 从中寻找出实现鱼体推进力最大和推进效率最高的规划方法。通过该项研究, 提出较为精确的仿鱼机器人波状游动的动力学模型, 为研究机器人的运动控制方法提供理论模型。

## 1 Kane 动力学方程

### 1.1 Kane 方法

20 世纪 60 年代, 美国斯坦福大学 KANE 等<sup>[18]</sup>提出了一种列写系统动力学方程的方法, 称为 Kane 方法。该方法包含 5 步(设系统由  $N$  个质点组成, 且具有  $n$  自由度, 受完整约束)。

(1) 定义系统的广义坐标  $q_r (r=1, 2, \dots, n)$ , 并选取系统内各质点的偏速度

$$\mathbf{v}_i^{(r)} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_r} \quad i=1, 2, \dots, N \quad (1)$$

(2) 构造广义主动力。设每个质点  $i$  上作用有主动力  $\mathbf{F}_i$ , 则广义主动力  $K_r$  为

$$K_r = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i^{(r)} \quad (2)$$

(3) 构造广义惯性力。设每个质点的加速度  $\mathbf{a}_i$  及惯性力  $\mathbf{F}_i^* = -m_i \mathbf{a}_i$ , 则广义惯性力  $K_r^*$  为

$$K_r^* = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^* \cdot \mathbf{v}_i^{(r)} = \sum_{i=1}^N (-m_i \mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{v}_i^{(r)} \quad (3)$$

(4) 依据广义主动力与广义惯性力相平衡, 建立 Kane 动力学方程

$$K_r + K_r^* = 0 \quad (4)$$

(5) 如果系统中含有刚体 B, 则作用在刚体 B 上的广义主动力  $(K_r)_B$  及广义惯性力  $(K_r^*)_B$  为

$$\begin{cases} (K_r)_B = \mathbf{R}_B \cdot \mathbf{v}_B^{(r)} + \mathbf{T}_B \cdot \boldsymbol{\omega}_B^{(r)} & \mathbf{v}_B^{(r)} = \frac{\partial \mathbf{v}_B}{\partial \dot{q}_r} \\ (K_r^*)_B = \mathbf{R}_B^* \cdot \mathbf{v}_B^{(r)} + \mathbf{T}_B^* \cdot \boldsymbol{\omega}_B^{(r)} & \boldsymbol{\omega}_B^{(r)} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_B}{\partial \dot{q}_r} \end{cases} \quad (5)$$

式中  $\mathbf{R}_B$ 、 $\mathbf{R}_B^*$  为刚体上的主动力及惯性力的主矢;  $\mathbf{T}_B$ 、 $\mathbf{T}_B^*$  为主动力及惯性力的主矩;  $\mathbf{v}_B^{(r)}$  为刚体质心的偏速度;  $\boldsymbol{\omega}_B^{(r)}$  为刚体的偏角速度。

### 1.2 Kane 方法的优越性

相比于拉格朗日方法, Kane 方法的优越性体现在: ① 拉氏方程给出的是  $n$  个二阶微分方程, 而 Kane 方法给出的是  $2n$  个一阶微分方程; ② 拉氏方程用广义坐标及广义速度  $q_i$ 、 $\dot{q}_i$  描述系统状态, 而 Kane 方法则用广义坐标及偏速度  $q_r$ 、 $\mathbf{v}_i^{(r)}$  描述系统状态; ③ 在 Kane 方法中, 没有引入动能函数, 也没有拉氏方程中的二次求导, 却大量使用加法和乘法, 因此 Kane 方法适宜于计算机运算, 是一种面向计算机的建模方法<sup>[19]</sup>。

对建立仿鱼机器人波状游动的动力学模型而言, Kane 方法的主要优点是避免了系统复杂的内力计算, 它定义了系统的内坐标和外坐标, 各环节的受力和运动分析均用内坐标表示, 然后通过坐标变换将其主矢和主矩投影到外坐标系, 这样的研究方法使复杂的鱼体运动问题得以简化。

## 2 鱼体波状游动的运动学描述

建立仿鱼机器人的动力学模型必须以仿生对象的运动学模型为基础。鱼体运动学建模的核心是建立其运动单元的数学描述, 由于鱼体游动是通过肌肉牵引身体形成行波运动来产生推进力, 本文考虑将鱼体离散成刚性头部、柔性身体和尾鳍三个部分分别进行运动学描述。

### 2.1 柔性身体的运动学描述

建立鱼体坐标系， $x$ 轴沿身体纵向向后， $y$ 轴沿身体横向向右， $z$ 轴与 $x$ 、 $y$ 轴构成右手系，如图1所示，对物理模型简化，将柔性身体抽象为一脊椎曲线，经历一系列波幅逐渐放大、由头部至尾鳍传播的行波，头部和尾鳍分别视为刚性环节。

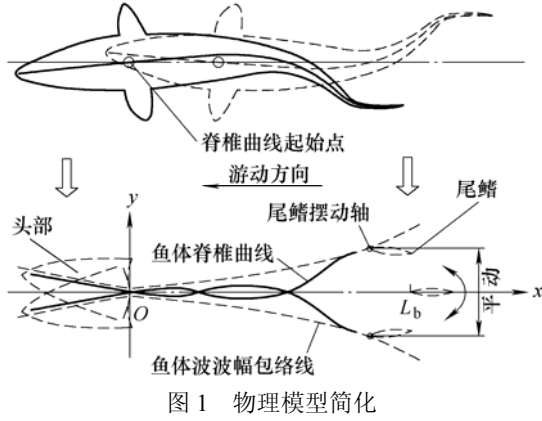


图1 物理模型简化

考虑头部和尾鳍运动时摆动轴的侧向位移，并结合身体运动的行波特征，用二次曲线拟合波幅包络线<sup>[20-21]</sup>，建立柔性身体的运动学描述为

$$y_b(x,t) = y_{ac}(x) \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (ct - x) \right] = L_b \left[ c_0 + c_1 \left( \frac{x}{L_b} \right) + c_2 \left( \frac{x}{L_b} \right)^2 \right] \sin(\omega t - kx) \quad (6)$$

式中  $y_b(x,t)$  为身体波动的侧向位移； $y_{ac}(x)$  为波幅包络线函数； $\lambda$  为身体波波长； $c$  为身体波波速； $t$  为时间； $x$  为沿身体纵轴方向的位移； $c_0$ 、 $c_1$ 、 $c_2$  为波幅包络线系数； $L_b$  为柔性身体段长度； $\omega$  为身体波角频率； $k$  为身体波波数。

### 2.2 摆动尾鳍的运动学描述

尾鳍的运动可以看作由三个分运动的合成运动：沿  $x$  轴负方向的平动，速度记为  $u$ ；沿  $y$  轴方向的往复平动，位移记为  $y_{cfmax}(t)$ ；绕  $z$  轴的往复摆动，角度记为  $\theta(t)$ 。定义尾鳍摆动轴的平动运动幅值  $H$ 、最大击水角度  $\alpha_{max}$ 、尾鳍经过平衡位置时摆动轴轨迹切线与  $x$  轴的夹角  $\phi$  等参数如图2所示。

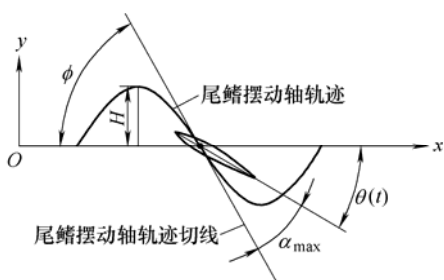


图2 尾鳍摆动运动学描述

其中，沿  $x$  轴负方向的平动与沿  $y$  轴方向的往复平动叠加，使尾鳍的摆动轴在  $Oxy$  平面上的轨迹为一正弦曲线。而尾鳍绕  $z$  轴的往复摆动落后于平动运动，记摆动落后平动的相位差为  $\phi$ 。因此，这里建立尾鳍部分的运动学描述为

$$\begin{cases} y_{cfmax}(t) = H \sin(\omega t - kL_b) \\ \theta(t) = \frac{\arctan(H\omega/u) - \alpha_{max}}{\sin \phi} \sin(\omega t - kL_b - \phi) \end{cases} \quad (7)$$

### 2.3 刚性头部的运动学描述

头部的运动同样可以看作三个分运动的合成运动：沿  $x$  轴负方向的平动，速度记为  $u$ ；沿  $y$  轴方向的往复平动，位移记为  $y_{hmax}(t)$ ；绕  $z$  轴的往复摆动，角位移记为  $\theta_h(t)$ 。定义头部摆动轴的平动运动幅值  $h$  如图3所示。

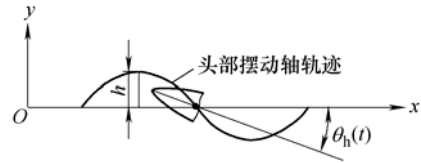


图3 头部摆动运动学描述

将头部沿  $x$  和  $y$  轴两个方向的平动叠加得到正弦曲线运动轨迹，与尾鳍运动不同的是，头部的摆动运动超前于平动，记摆动超前平动的相位差为  $\phi_h$ 。因此，建立头部摆动—平动的运动学描述为

$$\begin{cases} y_{hmax}(t) = h \sin \omega t \\ \theta_h(t) = \theta_{hmax} \sin(\omega t + \phi_h) \end{cases} \quad (8)$$

式中  $h$  为头部摆动轴的平动运动幅值，且  $h=c_0L_b$ ， $\theta_{hmax}$  为头部摆动运动的摆角幅值。

## 3 仿鱼机器人游动的动力学建模

### 3.1 模型简化及坐标系定义

仿鱼机器人在完成周期性波状游动的过程中，从某一初始位置开始，经历一系列行波沿着鱼体从前至后传播，同时鱼体的各个环节经历从前至后的顺序波动，其目标是寻找或设计一系列推进动作，能够逼真地复现真鱼游动的高效运动规律。

根据鱼体波状游动的运动学模型，为研究方便，将仿鱼机器人划分为刚性头部、柔性身体和尾鳍三个部分，其中头部和尾鳍分别用1个环节描述其各自的运动，柔性身体划分为  $n-2$  个环节，用以拟合其波状运动。各环节以  $B_i(i=0,1,\dots,n-1)$  表示，简化模型如图4所示，其中  $B_0$  为刚性头部， $B_1 \sim B_{n-2}$  为柔性身体， $B_{n-1}$  为尾鳍。各环节通过铰链相连接，铰链以  $O_i(i=0,1,\dots,n-1)$  表示，其中  $O_1$  表示

身体波起点,即头部运动的摆动轴,这里为了推导方便,将头部摆动轴定义在头部最前端,用 $O_0$ 表示; $O_{n-1}$ 表示身体波终点,即尾鳍摆动轴。

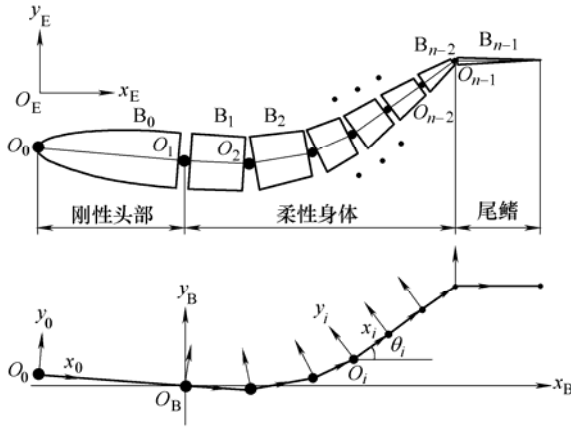


图4 模型简化及坐标系定义

如图4所示,定义系统的惯性坐标系 $O_E x_E y_E z_E$ ,鱼体坐标系 $O_B x_B y_B z_B$ 和各环节的坐标系族 $O_i x_i y_i z_i$  ( $i=0,1,\dots,n-1$ )。设惯性坐标系的 $O_E x_E$ 轴沿水平面指向鱼体后端, $O_E y_E$ 轴沿水平面指向鱼体右侧, $O_E z_E$ 轴沿铅垂面竖直向上(图中未示出)。鱼体坐标系原点 $O_B$ 与环节1的原点 $O_1$ 重合, $O_B x_B$ 沿鱼体纵向向后, $O_B y_B$ 沿鱼体横向向右, $O_B z_B$ 与 $O_B x_B$ 、 $O_B y_B$ 构成右手系并指向上方。 $O_i x_i y_i z_i$ 分别与各环节固连, $O_i x_i$ 轴沿相邻两铰链点的连线, $O_i y_i$ 垂直连线向右, $O_i z_i$ 平行于 $O_B z_B$ 并与 $O_i x_i$ 、 $O_i y_i$ 构成右手系,这里忽略了鱼体纵向平面内的弯曲现象。选取系统的广义坐标为 $\dot{q} = (v_x \ v_y \ v_z \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z \ \dot{\theta}_0 \ \dots \ \dot{\theta}_{n-1})^T$ ,其中 $(v_x, v_y, v_z)$ 、 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 为鱼体相对惯性坐标系的三维线速度和角速度在鱼体坐标系下的表示, $(\dot{\theta}_0, \dots, \dot{\theta}_{n-1})$ 为各个环节的角速度,这里为了分析方便,将所有运动学变量投影到鱼体坐标系下。定义 $A_{Bi}$ 为环节坐标系 $O_i x_i y_i z_i$ 相对鱼体坐标系 $O_B x_B y_B z_B$ 的转换矩阵,具体形式为

$$A_{Bi} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad (9)$$

文中如无特别说明,下标 $i, j$ 均为 $0 \sim n-1$ 。

### 3.2 仿鱼机器人环节运动学分析

(1) 速度及角速度分析。根据广义坐标的定义,鱼体相对惯性坐标系的角速度在鱼体坐标系 $O_B x_B y_B z_B$ 中表示为

$$\omega_B^E = \omega_x \hat{x}_B + \omega_y \hat{y}_B + \omega_z \hat{z}_B \quad (10)$$

则各环节相对惯性坐标系的角速度在鱼体坐

标系 $O_B x_B y_B z_B$ 中表示为

$$\begin{cases} \omega_0^E = \omega_B^E + \omega_0^B = \omega_B^E + A_{B0}(0 \ 0 \ \dot{\theta}_0)^T \\ \omega_1^E = \omega_B^E + \omega_1^B = \omega_B^E + A_{B1}(0 \ 0 \ \dot{\theta}_1)^T \\ \omega_2^E = \omega_B^E + \omega_1^B + \omega_2^B = \\ \quad \omega_B^E + A_{B1}(0 \ 0 \ \dot{\theta}_1)^T + A_{B2}(0 \ 0 \ \dot{\theta}_2)^T \\ \vdots \\ \omega_i^E = \omega_B^E + \omega_1^B + \dots + \omega_i^{B-1} = \omega_B^E + \sum_{j=1}^i A_{Bj}(0 \ 0 \ \dot{\theta}_j)^T \end{cases} \quad (11)$$

式中 $\omega_i^E$ 为第 $i$ 个环节相对惯性坐标系的角速度在鱼体坐标系 $O_B x_B y_B z_B$ 下的表示, $\omega_0^B$ 、 $\omega_1^B$ 分别为第0、1环节相对鱼体坐标系的角速度,依此类推。

鱼体相对惯性坐标系的线速度在鱼体坐标系 $O_B x_B y_B z_B$ 中表示为

$$v_B^E = v_x \hat{x}_B + v_y \hat{y}_B + v_z \hat{z}_B \quad (12)$$

则各环节质心相对惯性坐标系的线速度在鱼体坐标系 $O_B x_B y_B z_B$ 中表示为

$$v_i^E = v_B^E + \sum_{j=1}^{i-1} A_{Bj}(0 \ l_j \ \dot{\theta}_j \ 0)^T + A_{Bi}(0 \ r_i \ \dot{\theta}_i \ 0)^T \quad (13)$$

式中 $l_j$ 为第 $j$ 个环节的长度; $r_i$ 为第 $i$ 个环节的质心 $C_i$ 到铰链点 $O_i$ 间的距离,如图5所示。

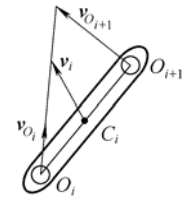


图5 速度递推关系图

(2) 加速度及角加速度分析。鱼体相对惯性坐标系的角加速度在鱼体坐标系 $O_B x_B y_B z_B$ 中表示为

$$\alpha_B^E = \frac{d\omega_B^E}{dt} = \dot{\omega}_x \hat{x}_B + \dot{\omega}_y \hat{y}_B + \dot{\omega}_z \hat{z}_B \quad (14)$$

则各环节的角加速度为

$$\alpha_i^E = \frac{d\omega_i^E}{dt} + \omega_B^E \times \omega_i^E \quad (15)$$

式中 $\alpha_i^E$ 为第 $i$ 个环节相对惯性坐标系的角加速度在鱼体坐标系 $O_B x_B y_B z_B$ 中的表示,依此类推。

鱼体相对惯性坐标系的加速度在鱼体坐标系 $O_B x_B y_B z_B$ 中表示为

$$a_B^E = \frac{dv_B^E}{dt} + \omega_B^E \times v_B^E \quad (16)$$

各环节质心加速度在鱼体坐标系 $O_B x_B y_B z_B$ 中表示为

$$\mathbf{a}_i^E = \frac{d\mathbf{v}_i^E}{dt} + \boldsymbol{\omega}_B^E \times \mathbf{v}_i^E = \mathbf{a}_B^E + \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{A}_{Bj} (0 \ l_j \ \ddot{\theta}_j \ 0)^T + \mathbf{A}_{Bi} (0 \ r_i \ \ddot{\theta}_i \ 0)^T + \sum_{j=1}^{i-1} \dot{\mathbf{A}}_{Bj} (0 \ l_j \ \dot{\theta}_j \ 0)^T + \dot{\mathbf{A}}_{Bi} (0 \ r_i \ \dot{\theta}_i \ 0)^T \quad (17)$$

式中  $\mathbf{a}_i^E$  为第  $i$  个环节相对惯性坐标系在鱼体坐标系  $O_B x_B y_B z_B$  中表示的角加速度, 依此类推。

### 3.3 受力分析

(1) 广义惯性力。对于鱼体运动的各个环节, 在 Kane 方法中, 引入偏角速度  $\partial \boldsymbol{\omega}_i^E / \partial \dot{q}_r$  和偏速度  $\partial \mathbf{v}_i^E / \partial \dot{q}_r$ , 则广义惯性力可表示为

$$K^{*(r)} = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{\partial \mathbf{v}_i^E}{\partial \dot{q}_r} \mathbf{R}_i^* + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i^E}{\partial \dot{q}_r} \mathbf{T}_i^* \right) \quad r=1, 2, \dots, n+6 \quad (18)$$

式中  $\mathbf{R}_i^*$  为各环节上的惯性力列阵;  $\mathbf{T}_i^*$  为各环节上的惯性力矩列阵;  $n+6$  为鱼体广义坐标的维数。

则各个环节的惯性力、惯性力矩可以表示为

$$\mathbf{R}_i^* = -m_i \mathbf{a}_i^E \quad \mathbf{T}_i^* = -J_i \boldsymbol{\alpha}_i^E \quad (19)$$

式中  $m_i$  为第  $i$  个环节的质量,  $J_i$  为第  $i$  个环节的中心惯性矩阵。

考虑流体附加质量对鱼体作用的影响, 将其视为广义惯性力处理。假设鱼体关于  $Oxz$ 、 $Oxy$  平面对称, 则附加质量  $\lambda$  的形式<sup>[22-23]</sup>可以表示为

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{26} \\ 0 & 0 & \lambda_{33} & 0 & \lambda_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{53} & 0 & \lambda_{55} & 0 \\ 0 & \lambda_{62} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{66} \end{pmatrix} \quad (20)$$

这里需要引入鱼体和流场之间相对速度和相对加速度的定义, 对于鱼体的各个环节, 相对速度  $\mathbf{v}_i^r$  和相对加速度  $\mathbf{a}_i^r$  分别表示为

$$\begin{cases} \mathbf{v}_i^r = \mathbf{v}_i^E - \mathbf{v}_f^E \\ \mathbf{a}_i^r = \mathbf{a}_i^E - \mathbf{a}_f^E \end{cases} \quad (21)$$

式中  $\mathbf{v}_f^E$  为鱼体周围流体的速度,  $\mathbf{a}_f^E$  为鱼体周围流体的加速度。

由于附加质量作用引起的惯性力、惯性力矩为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{Ai}^* \\ \mathbf{T}_{Ai}^* \end{pmatrix} = -\lambda_i \begin{pmatrix} \mathbf{a}_i^r \\ \boldsymbol{\alpha}_i^r \end{pmatrix} + \lambda_i \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_i^E \times \mathbf{v}_i^r \\ \boldsymbol{\omega}_B^E \times \boldsymbol{\omega}_i^E \end{pmatrix} \quad (22)$$

所以, 作用在鱼体上总的广义惯性力为

$$K^{*(r)} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_i^E}{\partial \dot{q}_r} (\mathbf{R}_i^* + \mathbf{R}_{Ai}^*) + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i^E}{\partial \dot{q}_r} (\mathbf{T}_i^* + \mathbf{T}_{Ai}^*) \right] \quad r=1, 2, \dots, n+6 \quad (23)$$

(2) 广义主动力。在 Kane 方法中, 引入偏角速度  $\partial \boldsymbol{\omega}_i^E / \partial \dot{q}_r$  和偏速度  $\partial \mathbf{v}_i^E / \partial \dot{q}_r$ , 则广义主动力定义为

$$K^{(r)} = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{\partial \mathbf{v}_i^E}{\partial \dot{q}_r} \mathbf{R}_i + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i^E}{\partial \dot{q}_r} \mathbf{T}_i \right) \quad r=1, 2, \dots, n+6 \quad (24)$$

鱼体在流场中所受的重力可以视为主动力处理, 各个环节的重力为

$$\mathbf{R}_{Gi} = -m_i \mathbf{g}^E \quad (25)$$

式中  $\mathbf{g}^E$  为重力加速度在鱼体坐标系中的表示。

同样, 鱼体在流场中所受的浮力可以视为主动力处理, 各个环节的浮力为

$$\mathbf{R}_{Bi} = \rho V_i \mathbf{g}^E \quad (26)$$

式中  $\rho$  为流体密度,  $V_i$  为第  $i$  个环节排开流体的体积。

由于鱼体在流场中的运动引起了周围部分流体的加速运动, 因此考虑流体加速的作用力称为弗劳德-克里洛夫力(Froude-Kriloff)<sup>[22-23]</sup>, 表示为

$$\mathbf{R}_{FKi} = -\rho V_i \mathbf{a}_f^E \quad (27)$$

同时, 考虑鱼体在流场中游动受到阻力的作用, 图 6 给出了环节  $i$  在运动过程中受到的阻力特征, 由此得到其阻力表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{Dxi} = \frac{1}{2} \rho \int_0^{b_i} [C_D(a_i dy) |\mathbf{v}_i^r(y)| \mathbf{v}_i^r(y)] \\ \mathbf{R}_{Dyi} = \frac{1}{2} \rho \int_0^{l_i} [C_D(a_i dx) |\mathbf{v}_i^r(x)| \mathbf{v}_i^r(x)] \end{cases} \quad (28)$$

式中  $\mathbf{R}_{Dxi}$ 、 $\mathbf{R}_{Dyi}$  为第  $i$  个环节沿  $x$ 、 $y$  方向的阻力,  $C_D$  为阻力系数,  $a_i dy$ 、 $a_i dx$  为沿  $x$ 、 $y$  方向的投影面积,  $\mathbf{v}_i^r(x)$ 、 $\mathbf{v}_i^r(y)$  为相对速度沿  $x$ 、 $y$  方向的分量。

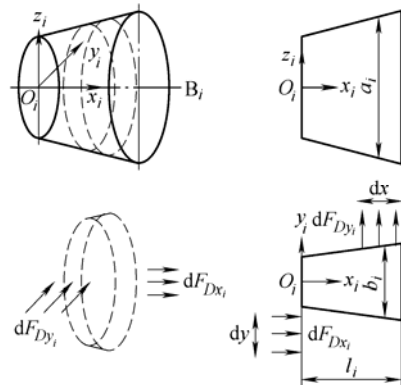


图 6 环节  $i$  阻力特征示意图

由  $Oxy$  平面内的阻力, 可以得到绕  $z$  轴的阻力矩为

$$\mathbf{T}_{Di} = \mathbf{R}_{Dxi} y + \mathbf{R}_{Dyi} x \quad (29)$$

作用在各环节上的主动力矩如图 7 所示, 其中  $M_0$  是头部摆动力矩,  $M_k$ 、 $M'_k$  ( $k=1,2,\dots,n-2$ ) 是身体部分各环节摆动力矩,  $M_{n-1}$ 、 $M'_{n-1}$  是尾鳍摆动力矩。所有力矩均为主动控制变量, 故对于每个环节, 要产生预定的动作, 所需作用力矩为

$$\mathbf{T}_{M_i} = (0 \ 0 \ M_i - M_{i+1})^T \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad M_n \equiv 0 \quad (30)$$

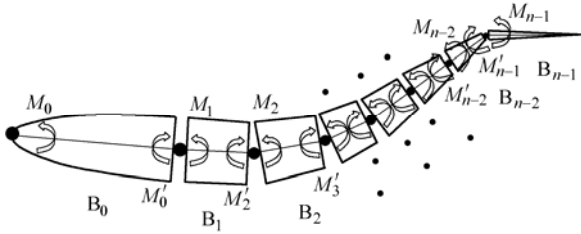


图 7 鱼体上各环节主动力矩示意图

所以, 鱼体作用的总的广义主动力

$$K^{(r)} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_i^E}{\partial \dot{q}_r} (\mathbf{R}_{Gi} + \mathbf{R}_{Bi} + \mathbf{R}_{FKi} + \mathbf{R}_{Di}) + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i^E}{\partial \dot{q}_r} (\mathbf{T}_{Di} + \mathbf{T}_{Mi}) \right] \quad r=1,2,\dots,n+6 \quad (31)$$

### 3.4 动力学模型

通过推导得到的广义主动力和广义惯性力方程, 根据 Kane 方法建立动力学方程为

$$K^{(r)} + K^{*(r)} = 0 \quad (32)$$

将其合并得到由  $n$  个环节组成的鱼体游动过程的动力学方程为

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_i^E}{\partial \dot{q}_r} (\mathbf{R}_i^* + \mathbf{R}_{Ai}^* + \mathbf{R}_{Gi} + \mathbf{R}_{Bi} + \mathbf{R}_{FKi} + \mathbf{R}_{Di}) + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i^E}{\partial \dot{q}_r} (\mathbf{T}_i^* + \mathbf{T}_{Ai}^* + \mathbf{T}_{Di} + \mathbf{T}_{Mi}) \right] = 0 \quad (33)$$

式(33)中包含  $n+6$  个方程, 共有  $2n+6$  个变量。当给定  $n$  个环节的摆动角速度, 可求解出鱼体各环节的作用力矩, 游动过程中的阻力。

### 3.5 能量方程

为了研究方便, 将仿鱼机器人各个环节受到的主动力投影到鱼体坐标系  $O_B x_B y_B z_B$  的  $x$  和  $y$  方向, 这里忽略  $z$  方向上互相平衡的重力和浮力。在鱼体游动过程中, 环节  $i$  的  $x$  方向合力记为  $F_{xi}$ ,  $y$  方向合力记为  $F_{yi}$ , 绕  $z$  轴的作用力矩记为  $T_i$ , 则整个鱼体在  $x$  方向的合力(称为“推进力”)表示为

$$F_B = \sum_{i=0}^{n-1} F_{xi} \quad (34)$$

鱼体在  $y$  方向的合力(称为“侧向力”)为

$$F_L = \sum_{i=0}^{n-1} F_{yi} \quad (35)$$

鱼体在波状游动过程中, 对流体做功的功率(称为“总功率”, 记为  $P_{in}$ )分为三部分: ① 鱼体向前游动过程中为了克服周围流体阻力和使流体加速的功耗, 记为  $P_x = F_B u$ ; ② 鱼体各环节在做横向运动时克服流体横向反作用力的功耗  $P_y$ ; ③ 鱼体各环节在做摆动运动时克服流体反作用力矩的功耗  $P_t$ 。其中,  $P_y$  和  $P_t$  可以表示为

$$P_y = - \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^T F_{yi} v_i^E dt \quad (36)$$

$$P_t = - \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^T T_i \omega_i^E dt \quad (37)$$

根据得到的推进力功率、侧向力功率和力矩功率, 可以计算鱼体在游动过程中的总功率  $P_{in} = P_x + P_y + P_t$ , 同时定义推进效率为

$$\eta = \left| \frac{P_x}{P_{in}} \right| \quad (38)$$

由于  $P_x$  与  $P_y$ 、 $P_t$  符号相反, 为保证推进效率恒为正值, 故将式(38)加上绝对值。

## 4 计算结果与讨论

### 4.1 物理模型

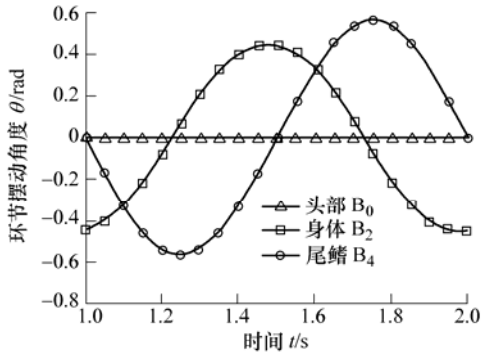
本算例中, 仿鱼机器人沿身体纵向划分为 5 个环节, 分别用  $B_0 \sim B_4$  表示。其中头部和尾鳍各 1 个环节, 作平动—摆动复合运动; 身体 3 个环节, 用于拟合行波运动。整个鱼体的三维几何尺寸  $x \times y \times z = 0.8 \text{ m} \times 0.1 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}$ , 其中头部长度  $L_h = 0.24 \text{ m}$ , 身体长度  $L_b = 0.42 \text{ m}$ , 尾鳍长度  $L_{cf} = 0.14 \text{ m}$ 。周围流体介质为水, 立方体水槽的三维几何尺寸  $x \times y \times z = 3.0 \text{ m} \times 1.0 \text{ m} \times 0.8 \text{ m}$ 。

给定鱼体沿  $x$  方向的游动速度为  $u = 0.5 \text{ m/s}$ , 各环节的摆动频率为  $f = 1 \text{ Hz}$ , 身体波波长为  $\lambda = 1 \text{ m}$ , 尾鳍摆动轴幅值  $H = 0.12 \text{ m}$ , 尾鳍平动与摆动运动相位差  $\varphi = 90^\circ$ , 最大击水角度  $\alpha_{\max} = 25^\circ$ 。为了计算简便, 不考虑头部摆动运动, 按照鱼体波状游动的运动学方程并进一步离散得到各环节的运动规律。

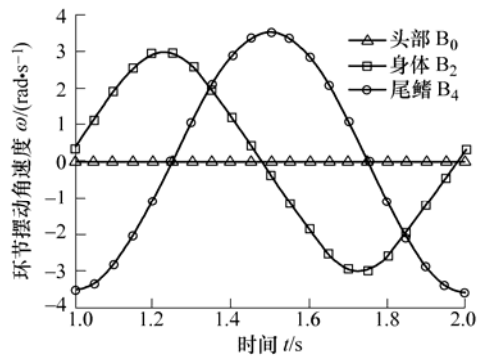
### 4.2 环节运动规律和作用力矩的变化

图 8 表示鱼体游动过程中在 1 个周期内头部  $B_0$ 、身体  $B_2$  和尾鳍  $B_4$  的摆动角度、角速度和角加速度变化规律。图 9 是根据给定的计算模型利用动力学方程求出的头部  $B_0$ 、身体  $B_2$  和尾鳍  $B_4$  的作用

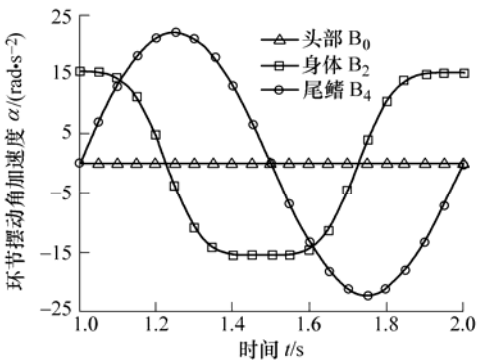
力矩。根据图8、9，可以得到如下结论。



(a) 各环节摆动角度变化



(b) 各环节摆动角速度变化



(c) 各环节摆动角加速度变化

图8 各环节运动规律变化

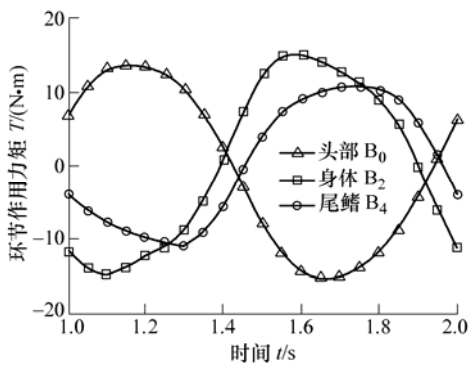


图9 各环节作用力矩变化

(1) 鱼体在游动过程中，尾鳍的运动滞后于身体环节的运动，并且尾鳍运动的幅值大于身体环节运动的幅值，这可从摆角图中看出。当时间为1s

时尾鳍的摆角为0，身体环节的摆角接近最大值，此时对应的状态是尾鳍处于某一侧的极限位置，正因为尾鳍平动与摆动的相位差为90°，所以此时尾鳍的摆角为0。从角速度图中可看出此时尾鳍的角速度达到最大值，这可以解释为尾鳍在极限位置时需要瞬间完成击水角度的过渡，为下一时刻的击水动作提供合适的击水角度，而此时身体的角速度接近最小值。在角加速度图中可看出此时尾鳍的角加速度为0，而身体的角加速度接近最大值。

(2) 当时间为1.25s时尾鳍的摆角达到最大值，此时尾鳍处于平衡位置，瞬时角速度为0，角加速度达到最大值。而此时身体环节的摆角接近于0，角速度接近最大值，角加速度接近于0。

(3) 从环节力矩图上来看，除了头部以外，身体和尾鳍的力矩变化规律基本是一致的，且与正弦形式相似，这说明各环节在克服流体反作用力的过程中是协调运动的。当尾鳍处于极限位置时，由于此时的角加速度为0，因此所需的作用力矩很小；当尾鳍处于平衡位置时，由于角加速度最大，因此所需的作用力矩亦达到最大。

### 4.3 仿鱼机器人能量变化情况

对仿鱼机器人而言，最受人们关注的则是鱼体在游动过程中产生的推进力和推进效率的变化。图10所示为头部B<sub>0</sub>、身体B<sub>2</sub>和尾鳍B<sub>4</sub>在1个周期内的推进力变化情况，图11所示为在1个周期内鱼体游动过程中的推进力功率、侧向力功率和力矩功率的变化情况，以及鱼体产生的推进力和推进效率的时间历程曲线。由图10、11，可以得出以下结论。

(1) 各环节产生的推进力均为正弦规律变化，且周期较运动规律减半。其中头部在整个周期中均产生阻力作用，而身体在部分时间内产生推力作用，在部分时间内产生阻力作用，尾鳍在整个周期内基本都产生推进作用。因此，从平均推进力的角度来看，头部产生阻力作用，身体产生较小的推进作用，尾鳍产生绝大部分的推进作用。

(2) 推进力功率、侧向力功率和力矩功率的变化均为正弦形式，周期与推进力变化相同。在整个周期内的推进力功率均为正值，这可以解释为鱼体在游动过程中始终产生推进作用；而侧向力功率和力矩功率均为负值，这可以理解为鱼体各环节在作横向平动和摆动时均需克服流体反作用力做功。

(3) 由鱼体各环节组成的仿鱼机器人的推进力在1个周期内基本维持正值，且按照正弦规律变化。对于鱼体的推进效率而言，呈现周期性变化，当尾鳍处于极限位置附近时，具有很高的瞬时推进效率，

而当尾鳍自极限位置向平衡位置运动时, 其推进效率逐渐降低。

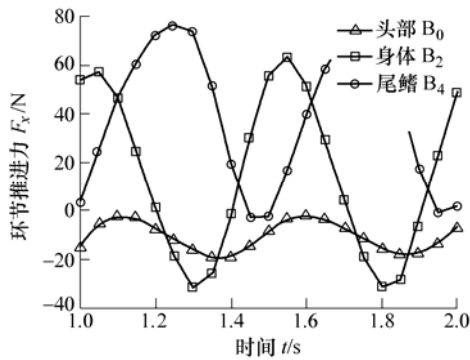
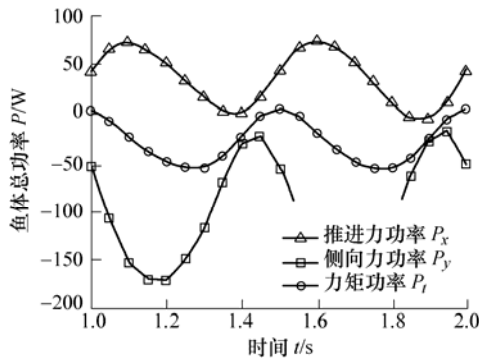
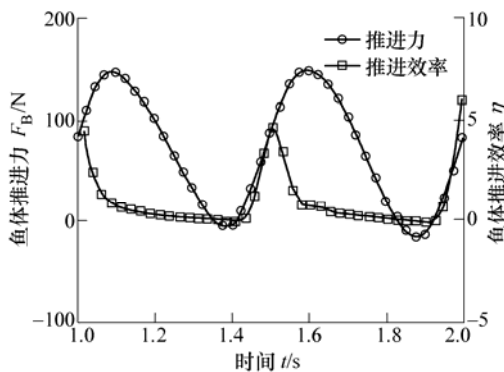


图 10 各环节推进力变化



(a) 推进力功率、侧向力功率和力矩功率变化



(b) 推进力和推进效率变化

图 11 仿鱼机器人功率及效率变化曲线

#### 4.4 高效动作设计

在以上工作的基础上, 可以进一步设计仿鱼机器人各环节的运动规律, 使得鱼体能够产生最大的推进力或获得最高的推进效率, 提高仿鱼机器人的加速性能或巡游性能。并利用动力学方程计算作用力矩, 进而给出产生预定动作的运动控制方法。

## 5 结论

(1) 将鱼体离散为刚性头部、柔性身体和摆动尾鳍并划分为多个运动环节进行分析, 考虑鱼体周围流场的环境作用并将其等效为各个环节受到的广

义主动力和惯性力, 建立了仿鱼机器人波状游动的动力学模型。

(2) 以 5 个环节的仿鱼机器人为例进行了数值计算。计算结果表明, 该动力学模型能够有效地实现给定鱼体各环节的运动规律求解出作用力矩, 给定作用力矩求解出运动规律, 是一种切实可行的理论模型。

(3) 该动力学模型的建立对研究仿鱼机器人的运动控制算法和规划算法, 揭示鱼体利用流场能量的动力学机理具有理论指导意义。

## 参 考 文 献

- [1] 喻俊志, 陈尔奎, 王硕, 等. 仿生机器人研究的进展及分析[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(4): 485-491.  
YU Junzhi, CHEN Erkui, WANG Shuo, et al. Research evolution and analysis of biomimetic robot fish[J]. Control Theory and Applications, 2003, 20(4): 485-491.
- [2] LONG J H. Biomimetic robotics: Self-propelled physical models test hypotheses about the mechanics and evolution of swimming vertebrates[J]. J. Mech. Eng. Sci., 2007, 221(10): 1 193-1 200.
- [3] ALVARADO P V, YOUCEF T K. Design of machines with compliant bodies for biomimetic locomotion in liquid environments[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 2006, 128: 3-13.
- [4] 王田苗, 梁建宏. 基于理想推进器理论的尾鳍推力和效率估算[J]. 机械工程学报, 2005, 41(8): 18-23.  
WANG Tianmiao, LIANG Jianhong. Computational method of the propulsive force and efficiency of tail-fin propulsion based on ideal propeller theory[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(8): 18-23.
- [5] KORAY K S, GEORGE G A. Dynamic modeling and hydrodynamic performance of biomimetic underwater robot locomotion[J]. Autonomous Robotics, 2002, 13: 223-240.
- [6] EUNJUNG K, YOUNGIL Y. Design and dynamic analysis of fish robot: PoTuna[C]// 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation, April 26-May 1, 2004, New Orleans, LA, United States. Piscataway, NJ: IEEE, 2004: 4 887-4 892.
- [7] GRAY J. Studies in animal locomotion VI: The propulsive powers of the dolphin[J]. J. Exp. Biol., 1936, 13: 192-199.
- [8] TAYLOR G. Analysis of the swimming of long narrow animals[J]. Proc. R. Soc. Lond. A, 1952, 214: 158-183.
- [9] LIGHTHILL M J. Note on the swimming of slender

- fish[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1960, 9: 305-317.
- [10] WU T Y. Swimming of a waving plate[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1961, 10: 321-344.
- [11] CHENG J Y, ZHUANG L X, TONG B G. Analysis of swimming 3-D waving plate[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1991, 232: 341-355.
- [12] SANDBERG W, RAMAMURTI R. Unsteady flow computations for oscillating fins: A status report[J]. *International Symposium on UUS Technology*, 1999: 182-194.
- [13] NAKASHIMA M, ONO K. A simple calculation method to analyze the dynamics of carangiform propulsion[J]. *International symposium on UUS technology*, 1999: 320-329.
- [14] TARN T J, SHOULTS G A, YANG S P. A dynamic model of underwater vehicle with a robotic manipulator using Kane's method[J]. *Autonomous Robotics*, 1996, 3: 269-283.
- [15] KAREN A H, MATTHEW D B, SHERYL G. Modeling the dynamics of spring-driven oscillating-foil propulsion [J]. *IEEE J. Ocean. Eng.*, 1998, 23(3): 285-296.
- [16] ZHU Q, WOLFGANG M J, TRIANTAFYLLOU M S. Three-dimensional flow structures and vorticity control in fish-like swimming[J]. *J. Fluid Mech.*, 2002, 468: 1-28.
- [17] GALLS S F, REDINIOTIS O K. Development of a computational hydrodynamic model for a biomimetic underwater autonomous vehicle[J]. *AIAA Journal*, 2007, 45(5): 961-971.
- [18] KANE T R, LIKENS P W, LEVINSON D A. *Spacecraft dynamics*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1983.
- [19] 张鸣远, 景思睿, 李国君. 高等工程流体力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2006.
- ZHANG Mingyuan, JING Sirui, LI Guojun. *Advanced engineering fluid mechanics*[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2006.
- [20] DENG J, REN A L, ZHOU J F, et al. Three-dimensional flow around two circular cylinders in tandem arrangement [J]. *Fluid Dynamic Research*, 2006, 38(6): 386-404.
- [21] LU X Y, YIN X Z. Propulsive performance of a fishlike teavelling wavy wall[J]. *Acta Mechanica*, 2005, 175: 197-215.
- [22] FOSSEN T I. *Nonlinear modelling and control of underwater vehicles*[D]. Norwegian: Norwegian Institute of Technology, 1987.
- [23] 洪嘉振, 杨长俊. 理论力学[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 1999.
- HONG Jiazhen, YANG Changjun. *Theoretical mechanics* [M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 1999.
- 
- 作者简介: 夏丹(通信作者), 男, 1982年出生, 博士研究生。主要研究方向为机器人动力学。  
E-mail: jadenhit@126.com
- 陈维山, 男, 1965年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为仿生机器人。  
E-mail: cws@hit.edu.cn