

准双曲面齿轮点接触齿面啮合分析的理论公式*

吴训成 胡 宁 陈志恒

(上海工程技术大学汽车工程学院 上海 200336)

摘要：提供了一套点接触齿面啮合分析的理论公式，这些公式不包含机床调整参数，只涉及到接触点相对于齿轮副的位置以及齿面的一阶和二阶参数，适用于齿面啮合的任何接触点。利用这些公式，能够非常方便地在设计齿面副参数的同时对齿面进行啮合分析。此外，通过这些公式，从理论上清楚地阐明了点接触齿面副的失配机理，这对点接触齿面副的设计具有重要的指导意义。

关键词：准双曲面齿轮 齿面 啮合分析 理论公式

中图分类号：TH132.41

0 前言

传统的齿面啮合分析方法是齿面接触分析(TCA)，但它是一种数值分析方法，需要进行大量的计算才能得到分析结果。此外，TCA是以机床的调整参数为基础的，当采用齿面主动设计技术^[1]来设计齿面参数时，并不知道机床的调整参数，因此，在齿面参数设计过程中无法用传统的TCA来分析齿面的啮合情况。为了在齿面参数设计时就能对齿面的接触传动进行分析计算，同时也为了从理论上揭示点接触齿面的啮合规律，有必要建立点接触齿面啮合分析的理论计算公式。限于论文的篇幅，略去导出这些公式的中间过程。给出的理论公式是齿面主动设计理论和技术的的重要组成部分。

1 齿面上接触点位置变动量计算公式

如图 1 所示，齿面 $S^{(1)}$ 和 $S^{(2)}$ 在 M 点相切接触， e_{t1} 和 e_{t2} 是接触点公切面内任意两个相互垂直方向的单位矢量，且满足 $e_n = e_{t1} \times e_{t2}$ ， e_n 是接触点处的单位公法线矢量。令 $k_{n1}^{(i)}$ 和 $k_{n2}^{(i)}$ 为齿面 $S^{(i)}$ ($i=1,2$) 分别在 e_{t1} 和 e_{t2} 方向的法曲率， $t_{g1}^{(i)}$ 为曲面 $S^{(i)}$ 在 e_{t1} 方向的短程挠率。

在图 2 中， e_{a1} 和 e_{a2} 分别是小齿轮 1 齿面 $S^{(1)}$ 和大齿轮 2 齿面 $S^{(2)}$ 旋转轴上的单位矢量， e_{a3} 是两轴线间最短距离线上的单位矢量，并且 $e_{a3} = e_{a1} \times e_{a2} / \sin s$ ， s 是两轴线 e_{a1} 和 e_{a2} 之间的夹角(轴交角)。 C_1 和 C_2 分别是 e_{a1} 轴和 e_{a2} 轴与 e_{a3} 轴的

交点。 O_1 和 O_2 分别是与齿轮 1 和齿轮 2 固连的坐标系的原点，根据研究问题的方便性可在各自轴线上任意确定，但一经确定就必须与相应的齿轮保持位置固定。 r_1 和 r_2 分别是 C_1 点和 C_2 点到接触点 M 的位置矢量。 $r^{(1)}$ 和 $r^{(2)}$ 分别是 M 点在与齿轮 1 和齿轮 2 固连的坐标系中的径矢。 a_1 是从 C_1 点到 O_1 点的距离； a_2 是从 C_2 点到 O_2 点的距离； a_3 是从 C_1 点到 C_2 点的距离，即偏置距(或中心距)。 a_1 、 a_2 、 a_3 和 s 决定了齿面副的安装位置(即齿轮副的安装位置)，称为安装参数。对于确定的点接触齿面副，接触点的位置取决于安装参数和齿面 $S^{(1)}$ 绕轴线 e_{a1} 的转角 j_1 ，也就是说，接触点位置是这五个参数的函数。通常情况下，不同的接触点位置对应不同的齿面参数，因而将决定不同的啮合运动，因此，齿轮副的啮合运动也是这五个参数的函数。

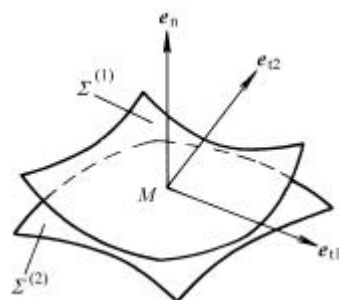


图 1 $S^{(1)}$ 和 $S^{(2)}$ 在 M 点相切接触

由图 2 可见，齿面接触点满足

$$a_1 e_{a1} + r^{(1)} = a_3 e_{a3} + a_2 e_{a2} + r^{(2)}$$

利用矢量的绝对微分与相对微分运算关系，对上式以及接触点处的单位公法线矢量 e_n 微分并整理后可得^[2,3]

$$ds_j^{(i)} = \frac{\partial s_j^{(i)}}{\partial j_1} dj_1 + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial s_j^{(i)}}{\partial a_k} da_k + \frac{\partial s_j^{(i)}}{\partial s} ds \quad (1)$$

* 上海市教育委员会重点学科第四期资助项目(2001ZDXK-2)。20040826 收到初稿，20050120 收到修改稿

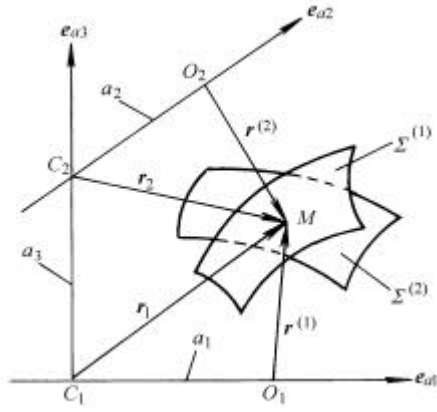


图2 齿面接触点M的位置关系

式中 $ds_j^{(i)}$ —— 齿面 $S^{(i)}$ ($i=1, 2$) 上的接触点在 e_{tj} ($j=1, 2$) 方向的位置变动量微分

$\partial s_j^{(i)} / \partial j_1$ —— 转角 j_1 的单位变化量引起的齿面 $S^{(i)}$ 上的接触点在 e_{tj} 方向的位置变动量

$\partial s_j^{(i)} / \partial a_k$ —— 安装参数 a_k ($k=1, 2, 3$) 的单位变化量引起的齿面 $S^{(i)}$ 上的接触点在 e_{tj} 方向的位置变动量

$\partial s_j^{(i)} / \partial s$ —— 安装参数 s 的单位变化量引起的齿面 $S^{(i)}$ 上的接触点在 e_{tj} 方向的位置变动量

$$\frac{\partial s_1^{(i)}}{\partial j_1} = \frac{1}{k^{(21)}} (c_{11}^{(i)} v_0^{(21)} \cdot e_{t1} + c_{12}^{(i)} v_0^{(21)} \cdot e_{t2} + t_{g1}^{(21)} w_0^{(21)} \cdot e_{t1} + k_{n2}^{(21)} w_0^{(21)} \cdot e_{t2}) \quad (2a)$$

$$\frac{\partial s_2^{(i)}}{\partial j_1} = \frac{1}{k^{(21)}} (c_{21}^{(i)} v_0^{(21)} \cdot e_{t1} + c_{22}^{(i)} v_0^{(21)} \cdot e_{t2} - k_{n1}^{(21)} w_0^{(21)} \cdot e_{t1} - t_{g1}^{(21)} w_0^{(21)} \cdot e_{t2}) \quad (2b)$$

$$\frac{\partial s_1^{(i)}}{\partial a_1} = \frac{1}{k^{(21)}} [c_{11}^{(i)} (b_1 e_{a1} \cdot e_n - e_{a1} \cdot e_{t1}) + c_{12}^{(i)} (b_2 e_{a1} \cdot e_n - e_{a1} \cdot e_{t2}) + t_{g1}^{(21)} b_3 e_{a1} \cdot e_n + k_{n2}^{(21)} b_4 e_{a1} \cdot e_n] \quad (2c)$$

$$\frac{\partial s_1^{(i)}}{\partial a_2} = \frac{1}{k^{(21)}} [c_{11}^{(i)} (e_{a2} \cdot e_{t1} - b_1 e_{a2} \cdot e_n) + c_{12}^{(i)} (e_{a2} \cdot e_{t2} - b_2 e_{a2} \cdot e_n) - t_{g1}^{(21)} b_3 e_{a2} \cdot e_n - k_{n2}^{(21)} b_4 e_{a2} \cdot e_n] \quad (2d)$$

$$\frac{\partial s_1^{(i)}}{\partial a_3} = \frac{1}{k^{(21)}} [c_{11}^{(i)} (e_{a3} \cdot e_{t1} - b_1 e_{a3} \cdot e_n) + c_{12}^{(i)} (e_{a3} \cdot e_{t2} - b_2 e_{a3} \cdot e_n) - t_{g1}^{(21)} b_3 e_{a3} \cdot e_n - k_{n2}^{(21)} b_4 e_{a3} \cdot e_n] \quad (2e)$$

$$\frac{\partial s_1^{(i)}}{\partial s} = \frac{1}{k^{(21)}} \{ c_{11}^{(i)} [(e_{t1}, e_{a3}, r_2) - b_1 (e_n, e_{a3}, r_2)] + c_{12}^{(i)} [(e_{t2}, e_{a3}, r_2) - b_2 (e_n, e_{a3}, r_2)] + t_{g1}^{(21)} [e_{a3} \cdot e_{t1} - b_3 (e_n, e_{a3}, r_2)] + k_{n2}^{(21)} [e_{a3} \cdot e_{t2} - b_4 (e_n, e_{a3}, r_2)] \} \quad (2f)$$

$$\frac{\partial s_2^{(i)}}{\partial a_1} = \frac{1}{k^{(21)}} [c_{21}^{(i)} (b_1 e_{a1} \cdot e_n - e_{a1} \cdot e_{t1}) + c_{22}^{(i)} (b_2 e_{a1} \cdot e_n - e_{a1} \cdot e_{t2}) - k_{n1}^{(21)} b_3 e_{a1} \cdot e_n - t_{g1}^{(21)} b_4 e_{a1} \cdot e_n] \quad (2g)$$

$$\frac{\partial s_2^{(i)}}{\partial a_2} = \frac{1}{k^{(21)}} [c_{21}^{(i)} (e_{a2} \cdot e_{t1} - b_1 e_{a2} \cdot e_n) + c_{22}^{(i)} (e_{a2} \cdot e_{t2} - b_2 e_{a2} \cdot e_n) + k_{n1}^{(21)} b_3 e_{a2} \cdot e_n + t_{g1}^{(21)} b_4 e_{a2} \cdot e_n] \quad (2h)$$

$$\frac{\partial s_2^{(i)}}{\partial a_3} = \frac{1}{k^{(21)}} [c_{21}^{(i)} (e_{a3} \cdot e_{t1} - b_1 e_{a3} \cdot e_n) + c_{22}^{(i)} (e_{a3} \cdot e_{t2} - b_2 e_{a3} \cdot e_n) + k_{n1}^{(21)} b_3 e_{a3} \cdot e_n + t_{g1}^{(21)} b_4 e_{a3} \cdot e_n] \quad (2i)$$

$$\frac{\partial s_2^{(i)}}{\partial s} = \frac{1}{k^{(21)}} \{ c_{21}^{(i)} [(e_{t1}, e_{a3}, r_2) - b_1 (e_n, e_{a3}, r_2)] + c_{22}^{(i)} [(e_{t2}, e_{a3}, r_2) - b_2 (e_n, e_{a3}, r_2)] - k_{n1}^{(21)} [e_{a3} \cdot e_{t1} - b_3 (e_n, e_{a3}, r_2)] - t_{g1}^{(21)} [e_{a3} \cdot e_{t2} - b_4 (e_n, e_{a3}, r_2)] \} \quad (2j)$$

式中

$$k^{(21)} = k_{n1}^{(21)} k_{n2}^{(21)} - (t_{g1}^{(21)})^2 \quad (3)$$

$$\begin{cases} k_{n1}^{(21)} = k_{n1}^{(2)} - k_{n1}^{(1)} \\ k_{n2}^{(21)} = k_{n2}^{(2)} - k_{n2}^{(1)} \\ t_{g1}^{(21)} = t_{g1}^{(2)} - t_{g1}^{(1)} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} c_{11}^{(1)} = k_{n2}^{(21)} k_{n1}^{(2)} - t_{g1}^{(21)} t_{g1}^{(2)} \\ c_{12}^{(1)} = k_{n2}^{(21)} t_{g1}^{(2)} - t_{g1}^{(21)} k_{n2}^{(2)} \\ c_{21}^{(1)} = k_{n1}^{(21)} t_{g1}^{(2)} - t_{g1}^{(21)} k_{n1}^{(2)} \\ c_{22}^{(1)} = k_{n1}^{(21)} k_{n2}^{(2)} - t_{g1}^{(21)} t_{g1}^{(2)} \end{cases} \quad (5a)$$

$$\begin{cases} c_{11}^{(2)} = k_{n2}^{(21)} k_{n1}^{(1)} - t_{g1}^{(21)} t_{g1}^{(1)} \\ c_{12}^{(2)} = k_{n2}^{(21)} t_{g1}^{(1)} - t_{g1}^{(21)} k_{n2}^{(1)} \\ c_{21}^{(2)} = k_{n1}^{(21)} t_{g1}^{(1)} - t_{g1}^{(21)} k_{n1}^{(1)} \\ c_{22}^{(2)} = k_{n1}^{(21)} k_{n2}^{(1)} - t_{g1}^{(21)} t_{g1}^{(1)} \end{cases} \quad (5b)$$

$$b_1 = \frac{(e_{t1}, e_{a2}, r_2)}{(e_n, e_{a2}, r_2)} \quad (6a)$$

$$b_2 = \frac{(e_{t2}, e_{a2}, r_2)}{(e_n, e_{a2}, r_2)} \quad (6b)$$

$$b_3 = \frac{\mathbf{e}_{a2} \cdot \mathbf{e}_{t1}}{(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{a2}, \mathbf{r}_2)} \quad (6c)$$

$$b_4 = \frac{\mathbf{e}_{a2} \cdot \mathbf{e}_{t2}}{(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{a2}, \mathbf{r}_2)} \quad (6d)$$

$$\mathbf{v}_0^{(21)} = i_{21} \mathbf{e}_{a2} \times \mathbf{r}_2 - \mathbf{e}_{a1} \times \mathbf{r}_1 \quad (7)$$

$$\mathbf{w}_0^{(21)} = i_{21} \mathbf{e}_{a2} - \mathbf{e}_{a1} \quad (8)$$

$$i_{21} = \frac{(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{a1}, \mathbf{r}_1)}{(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{a2}, \mathbf{r}_2)} \quad (9)$$

上述公式不包含机床调整参数，只涉及到接触点相对于齿轮副的位置以及齿面的一阶和二阶参数，适用于齿面啮合的任何接触点。利用这些公式，可在不知道设计齿面具体方程式的情况下，只要知道接触点相对于齿轮副的位置以及齿面的一阶和二阶参数，就能方便容易地进行齿面啮合分析计算。

接触点在齿面上的移动方向是齿面啮合的一个重要参数。在齿面设计时，通过 $\partial s_j^{(i)} / \partial j_1$ 和 $\partial s_j^{(i)} / \partial a_k$ 能够很容易地确定接触点在齿面 $S^{(i)}$ 上的移动方向。

2 传动比变化量的计算公式

式(9)是齿轮2相对于齿轮1的瞬时传动比 i_{21} 的计算公式，将 $\mathbf{r}_1 = a_1 \mathbf{e}_{a1} + \mathbf{r}^{(1)}$ 和 $\mathbf{r}_2 = a_2 \mathbf{e}_{a2} + \mathbf{r}^{(2)}$ 代入式(9)并进行微分运算后可得

$$di_{21} = \frac{\partial i_{21}}{\partial j_1} dj_1 + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial i_{21}}{\partial a_k} da_k + \frac{\partial i_{21}}{\partial \mathbf{s}} d\mathbf{s} \quad (10)$$

式中 di_{21} —— 传动比变化量微分

$\partial i_{21} / \partial j_1$ —— 转角 j_1 的单位变化量引起的传动比变化量，即齿轮副的传动比变化率

$\partial i_{21} / \partial a_k$ —— 安装参数 a_k ($k=1,2,3$) 的单位变化量引起的传动比变化量

$\partial i_{21} / \partial \mathbf{s}$ —— 安装参数 \mathbf{s} 的单位变化量引起的传动比变化量

$$\frac{\partial i_{21}}{\partial j_1} = \frac{1}{(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{a2}, \mathbf{r}_2)} \left(h_1^{(1)} \frac{\partial s_1^{(1)}}{\partial j_1} + h_2^{(1)} \frac{\partial s_2^{(1)}}{\partial j_1} - \left(i_{21} h_1^{(2)} \frac{\partial s_1^{(2)}}{\partial j_1} - i_{21} h_2^{(2)} \frac{\partial s_2^{(2)}}{\partial j_1} \right) \right) \quad (11a)$$

$$\frac{\partial i_{21}}{\partial a_k} = \frac{1}{(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{a2}, \mathbf{r}_2)} \left(h_1^{(1)} \frac{\partial s_1^{(1)}}{\partial a_k} + h_2^{(1)} \frac{\partial s_2^{(1)}}{\partial a_k} - \left(i_{21} h_1^{(2)} \frac{\partial s_1^{(2)}}{\partial a_k} - i_{21} h_2^{(2)} \frac{\partial s_2^{(2)}}{\partial a_k} \right) \right) \quad (11b)$$

$$\frac{\partial i_{21}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{1}{(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{a2}, \mathbf{r}_2)} \left(h_1^{(1)} \frac{\partial s_1^{(1)}}{\partial \mathbf{s}} + h_2^{(1)} \frac{\partial s_2^{(1)}}{\partial \mathbf{s}} - \left(i_{21} h_1^{(2)} \frac{\partial s_1^{(2)}}{\partial \mathbf{s}} - i_{21} h_2^{(2)} \frac{\partial s_2^{(2)}}{\partial \mathbf{s}} \right) \right)$$

$$\left. \begin{aligned} & i_{21} h_1^{(2)} \frac{\partial s_1^{(2)}}{\partial \mathbf{s}} - i_{21} h_2^{(2)} \frac{\partial s_2^{(2)}}{\partial \mathbf{s}} \end{aligned} \right) \quad (11c)$$

式中

$$\begin{cases} h_1^{(i)} = (\mathbf{e}_{t1}, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{ai}) - (\mathbf{e}_{t1}, \mathbf{e}_{ai}, \mathbf{r}_i) \mathbf{k}_{n1}^{(i)} - (\mathbf{e}_{t2}, \mathbf{e}_{ai}, \mathbf{r}_i) \mathbf{t}_{g1}^{(i)} \\ h_2^{(i)} = (\mathbf{e}_{t2}, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{ai}) - (\mathbf{e}_{t2}, \mathbf{e}_{ai}, \mathbf{r}_i) \mathbf{k}_{n2}^{(i)} - (\mathbf{e}_{t1}, \mathbf{e}_{ai}, \mathbf{r}_i) \mathbf{t}_{g1}^{(i)} \end{cases} \quad i=1, 2 \quad (12)$$

同样，上述公式不包含机床调整参数，只涉及到接触点相对于齿轮副的位置以及齿面的一阶和二阶参数，适用于齿面啮合的任何接触点。

传动比变化率是齿面副啮合的重要性能参数之一。在齿面设计时，通过 $\partial i_{21} / \partial j_1$ 的公式能够方便地计算确定齿面副啮合的传动比变化率。

3 接触点迹线位置变动量的计算公式

点接触齿面副啮合传动时，接触点在齿面上的运动轨迹形成接触点迹线。正确制造的点接触齿面副在理论安装位置条件下啮合传动时，其实际的接触点迹线与理论设计的接触点迹线一致。在实际安装位置条件下，当齿面副的安装位置存在误差时，实际接触点迹线将偏离理论接触点迹线。实际安装位置条件下，保持理论安装位置条件下对应的瞬时传动比不变而产生的理论接触点位置的变动量称为接触点迹线位置变动量。在式(10)中，令 $di_{21} = 0$ ，可得 dj_1 ，将其代入式(1)即可得到存在安装误差 da_k 和 $d\mathbf{s}$ 时理论接触点位置的变动量 $dS_j^{(i)}$ (用 $dS_j^{(i)}$ 代替 $ds_j^{(i)}$ 以示区别)

$$dS_j^{(i)} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial S_j^{(i)}}{\partial a_k} da_k + \frac{\partial S_j^{(i)}}{\partial \mathbf{s}} d\mathbf{s} \quad (13)$$

式中 $\partial S_j^{(i)} / \partial a_k$ —— a_k ($k=1,2,3$) 的单位安装误差引起的齿面 $S^{(i)}$ ($i=1, 2$) 上的理论接触点在 \mathbf{e}_{tj} ($j=1, 2$) 方向的位置变动量

$\partial S_j^{(i)} / \partial \mathbf{s}$ —— \mathbf{s} 的单位安装误差引起的齿面 $S^{(i)}$ 上的理论接触点在 \mathbf{e}_{tj} 方向的位置变动量

$\partial S_j^{(i)} / \partial a_k$ 和 $\partial S_j^{(i)} / \partial \mathbf{s}$ 统称为理论接触点位置的误差敏感度，按下列公式确定

$$\frac{\partial S_j^{(i)}}{\partial a_k} = \frac{\partial s_j^{(i)}}{\partial a_k} - \frac{\partial s_j^{(i)}}{\partial j_1} \frac{\partial i_{21}}{\partial a_k} \bigg/ \frac{\partial i_{21}}{\partial j_1} \quad (14a)$$

$$\frac{\partial S_j^{(i)}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial s_j^{(i)}}{\partial \mathbf{s}} - \frac{\partial s_j^{(i)}}{\partial j_1} \frac{\partial i_{21}}{\partial \mathbf{s}} \bigg/ \frac{\partial i_{21}}{\partial j_1} \quad (14b)$$

在误差敏感度计算公式中都包含有分母项

$k^{(21)}$ ，由式(3)可知， $k^{(21)}$ 是接触点处的差曲面的全曲率(诱导曲率的全曲率)。线接触齿面副的 $k^{(21)}$ 为零，点接触齿面副的 $k^{(21)}$ 因在接触线方向有失配而不为零。点接触齿面副在一定受力下的接触椭圆长轴尺寸越大， $k^{(21)}$ 越小，误差敏感度的绝对值越大。随着 $k^{(21)}$ 趋近于零，点接触齿面副的啮合传动就趋近于线接触齿面副，误差敏感度的数值将趋近于无穷大。这就是线接触齿面副的误差敏感性比点接触齿面副的误差敏感性大的原因。

在误差敏感度计算公式中还包含有分母项 $\partial i_{21}/\partial j_1$ ，它是齿轮副的传动比变化率，也就是齿

面副啮合的传动比变化率。瞬时传动比为定值的齿面副， $\partial i_{21}/\partial j_1$ 等于零。对于复合失配的点接触齿面副， $\partial i_{21}/\partial j_1$ 不等于零。随着 $\partial i_{21}/\partial j_1$ 趋近于零时，瞬时传动比趋近于定值，误差敏感度的数值将趋近于无穷大。因此，为了降低误差敏感性，点接触齿面副的瞬时传动比不能为定值而必须具有一定的变化率。

某齿面副理论接触点迹线中点位置的误差敏感度数据见表 1~4，其中，表 1 和表 2 反映的是接触椭圆长轴尺寸对误差敏感性的影响，表 3 和表 4 反映的是传动比变化率对误差敏感性的影响。

表 1 不同接触椭圆长轴尺寸下大轮齿面齿高方向的误差敏感度数据

接触椭圆长轴长度 l_2 /mm	全曲率 $k^{(21)}$ / mm^{-1}	误差敏感度 $\frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial a_1} / (\text{mm} \cdot \text{mm}^{-1})$	误差敏感度 $\frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial a_2} / (\text{mm} \cdot \text{mm}^{-1})$	误差敏感度 $\frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial a_3} / (\text{mm} \cdot \text{mm}^{-1})$	误差敏感度 $\frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial s} / (\text{mm} \cdot (^\circ)^{-1})$
12	0.000 010 722	-3.392	0.066	-5.974	-11.525
15	0.000 006 840	-4.530	0.967	-9.249	-15.076
18	0.000 004 741	-5.920	2.068	-13.252	-19.417

表 2 不同接触椭圆长轴尺寸下大轮齿面齿长方向的误差敏感度数据

接触椭圆长轴长度 l_2 /mm	全曲率 $k^{(21)}$ / mm^{-1}	误差敏感度 $\frac{\partial S_2^{(2)}}{\partial a_1} / (\text{mm} \cdot \text{mm}^{-1})$	误差敏感度 $\frac{\partial S_2^{(2)}}{\partial a_2} / (\text{mm} \cdot \text{mm}^{-1})$	误差敏感度 $\frac{\partial S_2^{(2)}}{\partial a_3} / (\text{mm} \cdot \text{mm}^{-1})$	误差敏感度 $\frac{\partial S_2^{(2)}}{\partial s} / (\text{mm} \cdot (^\circ)^{-1})$
12	0.000 010 722	-1.681	5.025	-14.285	-11.062
15	0.000 006 840	-4.620	7.352	-22.744	-20.234
18	0.000 004 741	-8.212	10.195	-33.082	-31.444

表 3 不同传动比变化率下大轮齿面齿高方向的误差敏感度数据

传动比变化率 $\frac{\partial i_{21}}{\partial j_1} / \text{rad}^{-1}$	误差敏感度 $\frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial a_1} / (\text{mm} \cdot \text{mm}^{-1})$	误差敏感度 $\frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial a_2} / (\text{mm} \cdot \text{mm}^{-1})$	误差敏感度 $\frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial a_3} / (\text{mm} \cdot \text{mm}^{-1})$	误差敏感度 $\frac{\partial S_1^{(2)}}{\partial s} / (\text{mm} \cdot \text{mm}^{-1})$
-0.000 02	-243.049	-99.569	-50.249	-468.153
-0.000 20	-26.273	-9.447	-10.200	-55.121
-0.002 00	-4.596	-0.434	-6.196	-13.818

表 4 不同传动比变化率下大轮齿面齿长方向的误差敏感度数据

传动比变化率 $\frac{\partial i_{21}}{\partial j_1} / \text{rad}^{-1}$	误差敏感度 $\frac{\partial S_2^{(2)}}{\partial a_1} / (\text{mm} \cdot \text{mm}^{-1})$	误差敏感度 $\frac{\partial S_2^{(2)}}{\partial a_2} / (\text{mm} \cdot \text{mm}^{-1})$	误差敏感度 $\frac{\partial S_2^{(2)}}{\partial a_3} / (\text{mm} \cdot \text{mm}^{-1})$	误差敏感度 $\frac{\partial S_2^{(2)}}{\partial s} / (\text{mm} \cdot \text{mm}^{-1})$
-0.000 02	480.654	205.550	74.830	907.955
-0.000 20	44.372	24.170	-5.772	76.687
-0.002 00	0.743	6.032	-13.835	-6.441

4 结论

(1) 点接触齿面啮合分析的理论公式不包含机床调整参数，适用于齿面啮合的任何接触点。只要知道接触点相对于齿轮副的位置以及齿面的一阶和二阶参数，就能方便容易地用这些公式进行齿面啮合分析计算。

(2) 为了降低误差敏感性，点接触齿面副的接

触椭圆长轴尺寸不能太大，而且，其瞬时传动比也不能为定值而必须具有一定的变化率。

参 考 文 献

- 1 吴训成, 毛世民, 吴序堂. 点啮合齿面主动设计研究. 机械工程学报, 2000, 36(4): 70~73
- 2 吴训成, 毛世民, 吴序堂. 点接触齿面在控制误差敏感性条件下的二阶参数设计. 西安交通大学学报, 1999, 33(11): 86~89

- 3 Wu X C, Mao S M, Wu X T. Study on the meshing analysis of point-contact tooth surfaces. In : Jiang Z D ed. Proceedings of 1999 International Conference on Advanced Manufacturing Technology , Xi'an , China , 1999 , Science Press , 1999 : 421 ~ 424

THEORETICAL FORMULAE FOR THE MESHING ANALYSIS OF POINT-CONTACT TOOTH SURFACES OF HYPOID GEARS

Wu Xuncheng Hu Ning Chen Zhiheng

(College of Automobile Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 200336)

Abstract : A set of theoretical formulae for the meshing

analysis of point-contact tooth surfaces is presented. The formulae without machine settings are only related to the parameters within second order of a pair of tooth surfaces and are suitable for any contact point on the tooth surfaces. With these formulae, the meshing analysis of a pair of tooth surfaces can be done very easily at the same time as the parameters of the tooth surfaces are designed. Moreover, through these formulae a clear explanation of the mismatch mechanism for point-contact tooth surfaces is given in theory, which is very important for the design of point-contact tooth surfaces.

Key words : Hypoid gear Tooth surface Meshing analysis
Theoretical formula

作者简介：吴训成，男，1964 年出生，博士，副教授，高级工程师。主要从事车辆传动技术方面的研究，获省部级科技成果奖 6 次，发表论文近 20 篇。

E-mail : wuxuncheng@yahoo.com.cn