

DOI: 10.3901/JME.2011.15.107

导重法求解单工况的拓扑优化问题*

李枝东 刘辛军

(清华大学精密仪器与机械学系 北京 100084)

摘要: 在拓扑优化中, 因为设计变量多并且目标函数和约束函数都是设计变量的隐函数, 求解难度较大, 所以寻找更快更好的求解方法一直都是拓扑优化问题的研究重点。为此, 将导重法引入到拓扑优化的求解中, 介绍质量约束下求结构最优性能问题和性能约束下求结构最小质量问题的导重法迭代准则, 采用密度惩罚(Solid isotropic material with penalization, SIMP)方法建立单工况下求最小柔度和最小质量这两类拓扑优化问题的优化模型, 推导出用导重法求解这两类问题的迭代公式并计算了相应的算例, 与 ANSYS 中采用的优化准则法(Optimality criteria, OC)和序列凸规划法(Sequential convex programming, SCP)进行对比分析。通过计算和对比分析显示出用导重法求解拓扑优化问题具有迭代公式简单、适用范围广、收敛速度快、求解效果好的优点。导重法为拓扑优化问题的求解提供了一条新的途径。

关键词: 拓扑优化 导重法 单工况

中图分类号: TP31 TH11

Guide-weight Method on Solving Topology Optimization Problems under Single Load Case

LI Zhidong LIU Xinjun

(Department of Precision Instruments and Mechanology, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract: About topology optimization, finding a good solution method for topology optimization problems is always paid attention to by the research field because they are subjected to the large number of the design variables and to the complexity that occurs because the objective and constraint functions are usually implicit with respect to design variables. Thus the guide-weight method is introduced into topology optimization. The iteration algorithms of the guide-weight method for solving problems seeking best structural performance under weight constraint and problems seeking least weight under structural performance constraint are described. Two kinds of topology optimization problems under single load case are constructed by solid isotropic material with penalization (SIMP) method and solved by the guide-weight method. Corresponding numerical examples are presented and comparison with the optimality criteria (OC) and sequential convex programming (SCP) methods employed in ANSYS is made. The examples and comparison demonstrate that the Guide-Weight method can solve topology optimization problems with simple iteration algorithm, wide availability, high efficiency and accuracy. This method provides alternative for solving topology optimization problems.

Key words: Topology optimization Guide-weight method Single load case

0 前言

自从 1988 年 BENDSOE 等^[1]提出了求解连续体

拓扑优化的均匀化方法以来, 拓扑优化就成为结构优化领域最热门和最具挑战性的研究课题^[2-5]。许多学者投入到该领域进行研究并取得了杰出的成果。澳大利亚学者 XIE 等^[6]于 1993 年提出了广受关注的渐进结构优化法 (Evolutionary structural optimization, ESO)。而当 BENDSOE 等^[7]在 1997 年阐释了不同的材料插值方法的物理意义后, 变密

* 摩擦学国家重点实验室自主研究课题(SKLT10C02)、国家高技术研究发展计划(863 计划, 2010AA101404)和国家科技重大专项(2010ZX04004-116)资助项目。20101020 收到初稿, 20110601 收到修改稿

度法便成为一种在工程领域应用广泛的方法。国内学者隋允康等^[8]提出的独立连续映射方法(Independent continuous mapping, ICM)在拓扑优化应用中时也取得了很好的效果。此外,水平集法^[9]也是一种正在逐步发展完善的方法。

均匀化方法、变密度法、ESO方法、ICM方法以及水平集法都是拓扑优化的建模方法,拓扑优化研究的另一方面是拓扑优化问题的求解方法。求解方法一般分为两类:一类为优化准则法,一类为数学规划法。左孔天等^[10]研究了使用准则法求解基于人工材料密度的拓扑优化问题,通过详尽推导和深入分析全面展示了准则法的优缺点。文献[11-12]分别应用数学规划法中的移动渐进线方法(Method of moving asymptotes, MMA)和混合的MMA-MGCMMA方法来求解拓扑优化问题,显示出数学规划法对单工况和多工况问题都能适用的能力及良好的收敛性。

通常来说,优化准则法的求解效率对设计变量的增加不敏感,优化速度较快。但是对不同的问题,优化准则法需要构建不同的准则,这使得此类方法的通用性大大降低。数学规划法的通用性较强,能够应用于不同的优化问题,但是其迭代次数多,求解效率不高。

针对优化准则法和数学规划法的上述不足,本文引入导重法来求解拓扑优化问题。导重法是陈树勋等^[13-15]于20世纪80年代提出的一种结构优化方法,主要用于天线结构的优化设计上,对天线结构做尺寸优化,取得了较好的效果。该方法克服了一般的准则法针对不同的优化问题需要构建不同的优化准则的缺点,同时也克服了数学规划法迭代次数多、求解效率不高的缺点,具有广泛的适用性和较高的求解效率。鉴于此,本文引入导重法来求解拓扑优化问题,以期能对拓扑优化问题达到简单高效的求解。

1 导重法

关于导重法更详细的内容可参阅文献[13-14],本节仅做简单介绍。

通常,单工况的结构优化问题可以写为以下形式

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (x_1, x_2, \dots, x_N)^T \in \mathbf{R}^N \\ f(\mathbf{X}) &\rightarrow \min \\ \text{s.t. } g(\mathbf{X}) &\leq 0 \\ x_i^L &\leq x_i \leq x_i^U \quad i=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1)$$

式中 \mathbf{X} —— N 维设计变量

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$$

$f(\mathbf{X}), g(\mathbf{X})$ —— 目标函数和约束函数,它们可以是质量、强度、精度、安全度、谐振频率、位移、应力等反映结构特性和静动力学性能的量

x_i^L, x_i^U —— 设计变量 x_i 的上下约束限

为求解该优化问题,首先构造拉格朗日方程

$$L = f(\mathbf{X}) + \lambda g(\mathbf{X}) \quad (2)$$

式中, λ 为拉格朗日乘子。

基于库恩—条件,在最优值 \mathbf{X}^* 处必须满足

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} \begin{cases} \leq 0 & x_i = x_i^U \\ = 0 & x_i^L < x_i < x_i^U \\ \geq 0 & x_i = x_i^L \end{cases} \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda g(\mathbf{X}) = 0 \text{ 且 } \begin{cases} \lambda = 0 & g(\mathbf{X}) < 0 \\ \lambda \geq 0 & g(\mathbf{X}) = 0 \end{cases} \\ g(\mathbf{X}) \leq 0 \\ x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i=1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (3)$$

从 $\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$ 可以得到

$$\frac{-\lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{-\lambda x_i \frac{\partial g}{\partial x_i}}{x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}} = 1 \quad (4)$$

结构优化问题可以分为两类:①在质量约束下求结构的最优性能;②在性能约束下求结构的最小质量。下面就分两种情况讨论。

1.1 质量约束下求结构最优性能的问题

在此类问题中, $f(\mathbf{X})$ 是表征结构性能的量, $g(\mathbf{X})$ 是结构质量或者体积等表征结构材料多少的量。根据式(4),令

$$H_i = \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad (5)$$

$$W_i = x_i H_i \quad (6)$$

$$G_i = -x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (7)$$

$$G = \sum_{i=1}^N G_i \quad (8)$$

式中 H_i —— x_i 的堆密度

W_i —— x_i 的等效质量

G_i —— x_i 的导重

G —— 总导重

将式(5)、(7)代入式(4)得

$$x_i = \frac{G_i}{\lambda H_i} \quad i=1,2,\dots,N \quad (9)$$

式(9)即为导重法的迭代准则，在迭代时将其写为

$$x_i^{(k+1)} = \left(\frac{G_i}{\lambda H_i} \right)^{(k)} \quad i=1,2,\dots,N \quad (10)$$

为保证迭代收敛，引入一个步长因子 α ，并考虑设计变量的上下限得

$$x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_i^U & x_i \geq x_i^U \\ \alpha \left(\frac{G_i}{\lambda H_i} \right)^{(k)} + (1-\alpha)x_i^{(k)} & x_i^L < x_i < x_i^U \\ x_i^L & x_i \leq x_i^L \end{cases} \quad i=1,2,\dots,N \quad (11)$$

式(11)为质量约束下求结构最优性能问题的导重法迭代式。

下面需要求拉格朗日乘子 λ 。根据式(9)，在最优值 \mathbf{X}^* 处有

$$\lambda = \frac{G_i}{x_i H_i} = \frac{G_i}{W_i} \quad i=1,2,\dots,N \quad (12)$$

即

$$\lambda = \frac{G_1}{W_1} = \frac{G_2}{W_2} = \dots = \frac{G_N}{W_N} = \frac{\sum_{i=1}^N G_i}{\sum_{i=1}^N W_i} = \frac{G}{\sum_{i=1}^N W_i} \quad (13)$$

因 W_i 为 x_i 的等效质量， $\sum_{i=1}^N W_i$ 可看做结构的等效总质量，故每次迭代时，可令

$$\lambda = \frac{G}{W_0} \quad (14)$$

式中， W_0 为结构材料用量的约束限，例如质量或体积约束。

根据式(11)、(14)，质量约束下求结构最优性能的优化问题便可求解。

1.2 性能约束下求结构最小质量的问题

在此类问题中， $f(\mathbf{X})$ 是结构质量或者体积等表征结构材料多少的量， $g(\mathbf{X})$ 是表征结构性能的量。根据式(4)，令

$$H_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (15)$$

$$W_i = x_i H_i \quad (16)$$

$$G_i = -x_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad (17)$$

$$G = \sum_{i=1}^N G_i \quad (18)$$

将式(15)、(17)代入式(4)得

$$x_i = \frac{\lambda G_i}{H_i} \quad i=1,2,\dots,N \quad (19)$$

在迭代时将其写为

$$x_i^{(k+1)} = \left(\frac{\lambda G_i}{H_i} \right)^{(k)} \quad i=1,2,\dots,N \quad (20)$$

为保证迭代收敛，引入一个步长因子 α ，并考虑设计变量的上下限得

$$x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_i^U & x_i \geq x_i^U \\ \alpha \left(\frac{\lambda G_i}{H_i} \right)^{(k)} + (1-\alpha)x_i^{(k)} & x_i^L < x_i < x_i^U \\ x_i^L & x_i \leq x_i^L \end{cases} \quad i=1,2,\dots,N \quad (21)$$

式(21)为性能约束下求结构最小质量问题的导重法迭代式。

下面需要求拉格朗日乘子 λ 。根据式(19)，在最优值 \mathbf{X}^* 处有

$$\lambda = \frac{x_i H_i}{G_i} = \frac{W_i}{G_i} \quad i=1,2,\dots,N \quad (22)$$

即

$$\lambda = \frac{W_1}{G_1} = \frac{W_2}{G_2} = \dots = \frac{W_N}{G_N} = \frac{\sum_{i=1}^N W_i}{\sum_{i=1}^N G_i} = \frac{\sum_{i=1}^N W_i}{G} \quad (23)$$

故每次迭代时可令

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^N W_i}{G_0} \quad (24)$$

式中， G_0 为结构性能的约束限。

根据式(21)、(24)，性能约束下求结构最小质量的优化问题便可求解。

由上面的推导过程可以看出，导重法的迭代准则是基于库恩-塔克条件构造的，导重为设计变量与表征结构性能的量的敏度的负乘积，堆密度为表征结构材料用量的量的敏度，而每次迭代设计变量与导重成正比，与堆密度成反比。对不同的优化问题，该准则都是适用的，并且最终的迭代公式也很简单。

2 最小柔度问题

单工况的拓扑优化问题可以按两种方式建立

优化模型：① 在质量约束下求最小柔度；② 在位移约束下求最小质量。本节讨论用导重法求解质量约束下的最小柔度问题。

本文采用 SIMP 方法建立拓扑优化的材料插值模型，故质量约束下求最小柔度的拓扑优化问题可写为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} &= (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N)^T \in \mathbf{R}^N \\ C(\boldsymbol{\rho}) &\rightarrow \min \\ \text{s.t. } m &\leq fm_0 \\ 0 < \rho_{\min} &\leq \rho_i \leq 1 \quad i=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (25)$$

式中 ρ_i ——第 i 个有限元的相对密度

ρ_{\min} ——设计变量的取值下限

N ——有限元的数量

C ——结构的柔度

m ——结构质量

m_0 ——结构初始质量

f ——约束因子

求解该优化问题关键在于求出柔度 C 和质量 m 相对于设计变量 $\boldsymbol{\rho}$ 的显式表达式。柔度可以写为

$$C = \mathbf{F}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{k} \mathbf{U} = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i \quad (26)$$

式中 \mathbf{F} ——载荷矢量

\mathbf{U} ——位移矢量

\mathbf{k} ——总体刚度矩阵

\mathbf{u}_i ——第 i 个单元的位移矢量

\mathbf{k}_i ——第 i 个单元的刚度矩阵

根据 SIMP 方法，有

$$\mathbf{k}_i = \rho_i^p \mathbf{k}_{i0} \quad (27)$$

式中 \mathbf{k}_{i0} ——第 i 个单元的初始刚度矩阵

p ——SIMP 方法的惩罚因子

将式(27)代入式(26)得

$$C = \sum_{i=1}^N \rho_i^p \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_{i0} \mathbf{u}_i \quad (28)$$

又有

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_i} = \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_i} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \rho_i} \right)^T \mathbf{U} \quad (29)$$

忽略载荷矢量 \mathbf{F} 随设计变量 $\boldsymbol{\rho}$ 的变化，得

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_i} = \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_i} \quad (30)$$

由 $\mathbf{k} \mathbf{U} = \mathbf{F}$ 可得

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \rho_i} \mathbf{U} + \mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_i} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \rho_i} = \mathbf{0} \quad (31)$$

将式(31)代入式(30)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \rho_i} &= -\mathbf{F}^T \mathbf{k}^{-1} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \rho_i} \mathbf{U} = -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \rho_i} \mathbf{U} = \\ &= -\sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j^T \frac{\partial \mathbf{k}_j}{\partial \rho_i} \mathbf{u}_j = -p \rho_i^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_{i0} \mathbf{u}_i \end{aligned} \quad (32)$$

质量 m 可用式(33)表达

$$m = \sum_{i=1}^N \rho_i v_i \quad (33)$$

式中， v_i 为第 i 个单元的体积。

由式(33)得

$$\frac{\partial m}{\partial \rho_i} = v_i \quad (34)$$

则根据导重法，依式(5)~(8)，定义

$$H_i = \frac{\partial m}{\partial \rho_i} = v_i \quad (35)$$

$$W_i = \rho_i H_i = \rho_i v_i \quad (36)$$

$$G_i = -\rho_i \frac{\partial C}{\partial \rho_i} = p \rho_i^p \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_{i0} \mathbf{u}_i \quad (37)$$

$$G = \sum_{i=1}^N G_i = \sum_{i=1}^N p \rho_i^p \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_{i0} \mathbf{u}_i = pC \quad (38)$$

则根据式(11)可得迭代式

$$\rho_i^{(k+1)} = \begin{cases} 1 & \rho_i \geq 1 \\ \alpha \left(\frac{p \rho_i^p \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_{i0} \mathbf{u}_i}{\lambda v_i} \right)^{(k)} + (1-\alpha) \rho_i^{(k)} & \rho_{\min} < \rho_i < 1 \\ \rho_{\min} & \rho_i \leq \rho_{\min} \end{cases} \quad (39)$$

λ 由式(14)得

$$\lambda = \frac{pC}{fm_0} \quad (40)$$

则根据式(39)、(40)，优化问题可得解。

下面根据上述方法计算两个算例。两个算例如图 1 和图 2 所示。设计域都为 $0.2\text{m} \times 0.1\text{m}$ 的矩形，图 1 中设计域的左端被约束，右端中点受竖直向下的拉力 $p=1000\text{N}$ ；图 2 中设计域的上部左右两端点被约束，下端中点受竖直向下的拉力 $p=1000\text{N}$ 。两个算例中都去除材料 70%，即约束因子 $f=0.3$ ，其他的参数见下表所示。

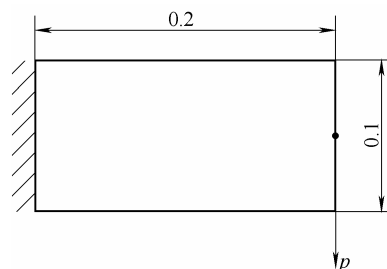


图 1 算例 1

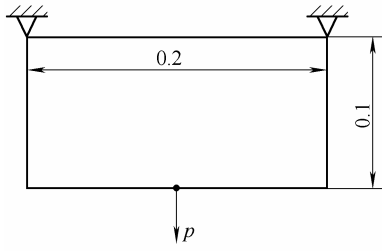


图 2 算例 2

表 拓扑优化的参数

参数	数值
弹性模量 E_0/GPa	206
泊松比 μ	0.3
惩罚因子 ρ_0	4
步长因子 α	0.5
设计变量的初值 ρ_0	(1,1,\dots,1)

图 3 和图 5 分别显示了两个算例的迭代过程，可以看出，用导重法求解最小柔度的拓扑优化问题可以达到比较快的收敛速度。

图 4 和图 6 分别显示了两个算例的拓扑优化图像。在画拓扑优化图像时，根据单元相对密度 ρ 的值赋给该单元颜色灰度值， ρ 越大，颜色越黑， ρ 越小，颜色越白。从图 4、6 可以看出，虽然得出的图像有些部分灰度值不均匀，但已经完全反映出了最优的拓扑结构。

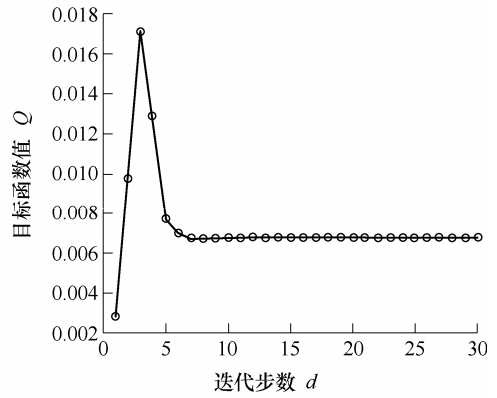


图 5 算例 2 按最小柔度问题建模并采用导重法求解的迭代过程

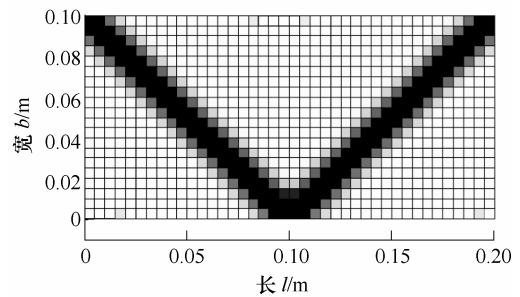


图 6 算例 2 按最小柔度问题建模并采用导重法求解的拓扑优化结果

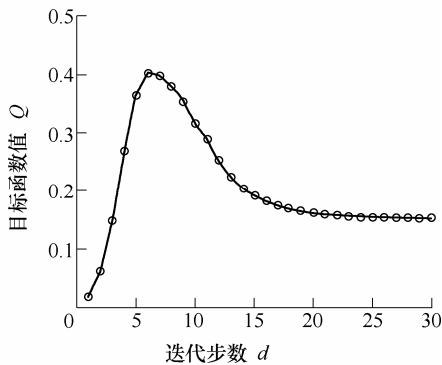


图 3 算例 1 按最小柔度问题建模并采用导重法求解的迭代过程

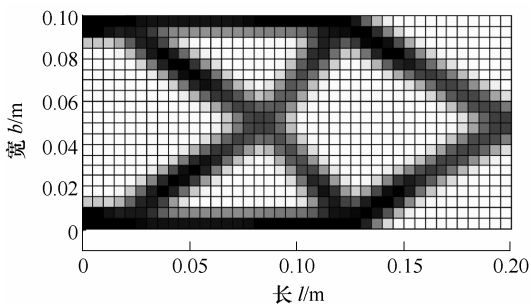


图 4 算例 1 按最小柔度问题建模并采用导重法求解的拓扑优化结果

3 最小质量问题

位移约束下求最小质量的拓扑优化问题可写为

$$\begin{aligned}
 &\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N)^T \in \mathbf{R}^N \\
 &m \rightarrow \min \\
 &\text{s.t. } u \leq u_0 \\
 &0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (41)
 \end{aligned}$$

式中 u ——位移
 u_0 ——位移的约束限

为求解此优化问题，需要将质量 m 和位移 u 写成设计变量 $\boldsymbol{\rho}$ 的显式表达式。

质量 m 及其敏感度关于设计变量 $\boldsymbol{\rho}$ 的显式表达式如式(33)和式(34)所示。对于位移 u ，根据 $kU = F$ 可知

$$U = k^{-1}F \quad (42)$$

在方程两边同乘 ${}^v F$ 可得

$$u = {}^v F^T k^{-1} F \quad (43)$$

式中， ${}^v F$ 为虚载荷矢量，它与位移 u 相应的那一项值为 1，其他项的值为 0。

因为 \mathbf{k}^{-1} 对称, 所以式(43)又可以写为

$$\mathbf{u} = (\mathbf{k}^{-1} \mathbf{v} \mathbf{F})^T \mathbf{k} \mathbf{U} \quad (44)$$

令

$$\mathbf{v} \mathbf{U} = \mathbf{k}^{-1} \mathbf{v} \mathbf{F} \quad (45)$$

式中, $\mathbf{v} \mathbf{U}$ 可以被认为是方程 $\mathbf{k} \mathbf{v} \mathbf{U} = \mathbf{v} \mathbf{F}$ 的解, 即结构在虚载荷 $\mathbf{v} \mathbf{F}$ 的作用下的位移。这样式(44)可以写为

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \mathbf{U}^T \mathbf{k} \mathbf{U} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v} \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i \quad (46)$$

将式(27)代入式(46)得

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \rho_i^p \mathbf{v} \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_{i0} \mathbf{u}_i \quad (47)$$

式中, $\mathbf{v} \mathbf{u}_i$ 为 $\mathbf{v} \mathbf{U}$ 中第 i 个单元的位移矢量。

式(47)就是位移 \mathbf{u} 的显式表达式, 接下来求 \mathbf{u} 的灵敏度。

根据式(31)可得

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_i} = -\mathbf{k}^{-1} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \rho_i} \mathbf{U} \quad (48)$$

两边同乘以 $\mathbf{v} \mathbf{F}$ 得

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_i} = -\mathbf{v} \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \rho_i} \mathbf{U} \quad (49)$$

将式(27)代入式(49)得

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_i} = -p \rho_i^{p-1} \mathbf{v} \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_{i0} \mathbf{u}_i \quad (50)$$

这样, 根据导重法, 依式(15)~(18), 定义

$$H_i = \frac{\partial m}{\partial \rho_i} = v_i \quad (51)$$

$$W_i = \rho_i H_i = \rho_i v_i \quad (52)$$

$$G_i = -\rho_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_i} = p \rho_i^p \mathbf{v} \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_{i0} \mathbf{u}_i \quad (53)$$

$$G = \sum_{i=1}^N G_i = p \sum_{i=1}^N \rho_i^p \mathbf{v} \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_{i0} \mathbf{u}_i = p \mathbf{u} \quad (54)$$

则根据式(21)可得迭代式

$$\rho_i^{(k+1)} = \begin{cases} 1 & \rho_i \geq 1 \\ \alpha \left(\frac{\lambda p \rho_i^p \mathbf{v} \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_{i0} \mathbf{u}_i}{v_i} \right)^{(k)} + (1-\alpha) \rho_i^{(k)} & \rho_{\min} < \rho_i < 1 \\ \rho_{\min} & \rho_i \leq \rho_{\min} \end{cases} \quad (55)$$

λ 由式(24)得

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^N \rho_i v_i}{p u_0} \quad (56)$$

则根据式(55)和式(56), 优化问题可得解。

下面根据上述方法计算图 1 和 2 中的两个算例。两个算例中受到载荷都为 $p=1000\text{N}$, 位移约束限 $u_0=0.000\text{m}$, 其他的参数如上表所示。图 7 和图 9 分别显示了两个算例的迭代过程, 图 8 和图 10 分别显示了两个算例的拓扑优化结果。从图 7~10 可以看出, 用导重法求解最小质量的拓扑优化问题也可以达到比较快的收敛速度, 并得到较好的拓扑优化结果。

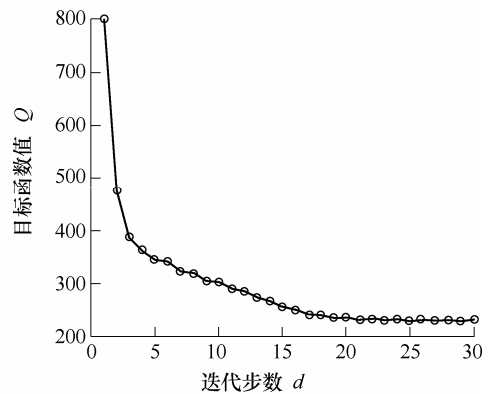


图 7 算例 1 按最小质量问题建模并采用导重法求解的迭代过程

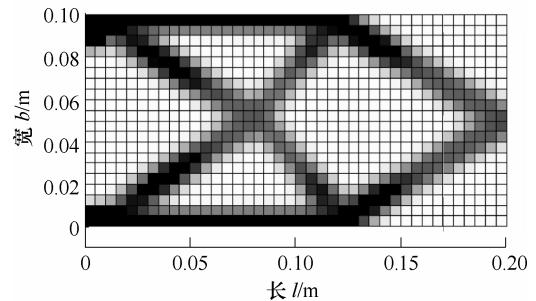


图 8 算例 1 按最小质量问题建模并采用导重法求解的拓扑优化结果

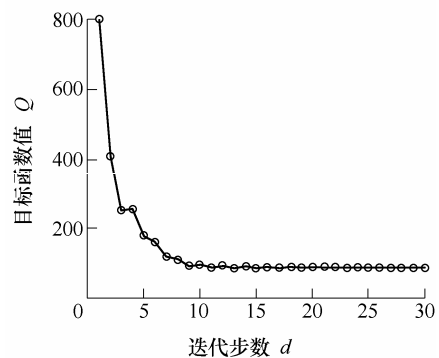


图 9 算例 2 按最小质量问题建模并采用导重法求解的迭代过程

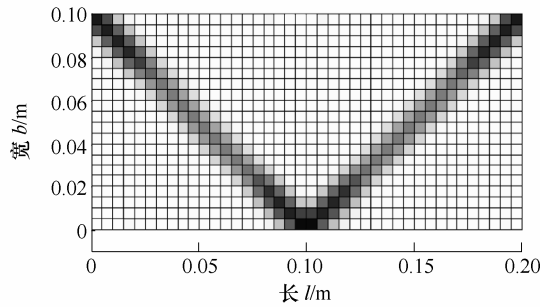


图 10 算例 2 按最小质量问题建模并采用导重法求解的拓扑优化结果

4 对比分析

采用 ANSYS 的拓扑优化功能对算例 1 进行了计算, 以与导重法的计算结果进行对比分析。在 ANSYS 中计算拓扑优化问题, 既可以按照最小柔度问题建模, 也可以按照最小质量问题建模。在求解时 ANSYS 提供了优化准则法(Optimality criteria, OC)和序列凸规划法(Sequential convex programming, SCP)两种方法。

图 11 是在 ANSYS 中按最小柔度问题建模并采用 OC 方法求解的迭代过程, 图 12 是按最小柔度问题建模并采用 SCP 方法求解的迭代过程, 图 13 是按最小质量问题建模并采用 SCP 方法求解的迭代过程。比较图 3 与图 11 可以看出, 按最小柔度问题建模求解, 导重法与 OC 方法的求解效率差不多。但是考虑到 OC 方法不能求解最小质量问题, 导重法在适用范围上显然比 OC 方法更具优势。比较图 3 与图 12、图 7 与图 13 可以看出, 不管是求解最小柔度问题还是求解最小质量问题, 导重法的求解效率都比 SCP 方法高。

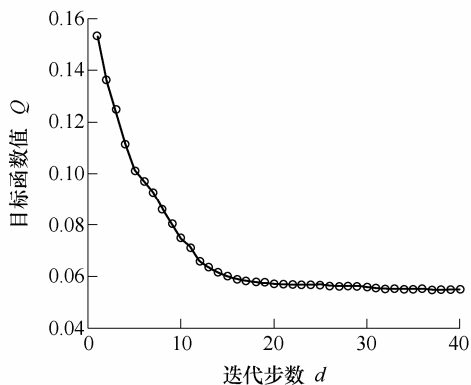


图 11 算例 1 在 ANSYS 中按最小柔度问题建模并采用 OC 方法求解的迭代过程

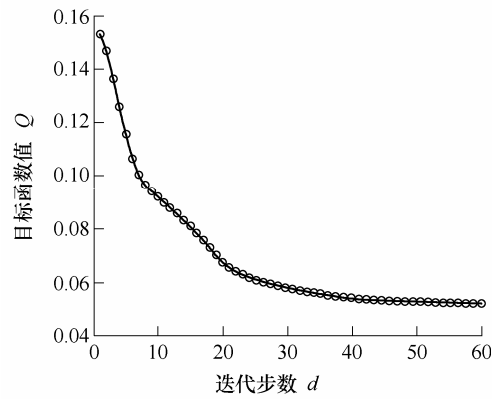


图 12 算例 1 在 ANSYS 中按最小柔度问题建模并采用 SCP 方法求解的迭代过程

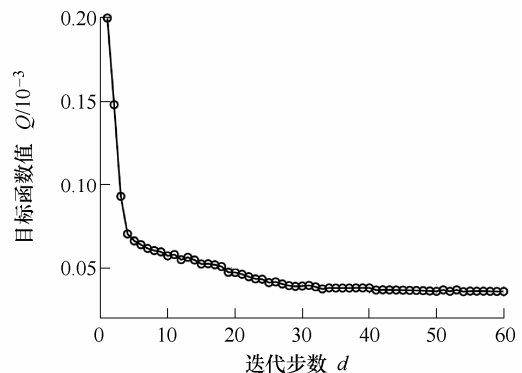


图 13 算例 1 在 ANSYS 中按最小质量问题建模并采用 SCP 方法求解的迭代过程

因此, 通过上述比较可以得出, 导重法相比于 OC 方法和 SCP 方法在适用范围和求解效率上都具有更大的优势。

5 结论

本文将导重法引入到拓扑优化中, 推导了用导重法求解两类单工况拓扑优化问题的迭代公式并计算了两个算例, 通过与 ANSYS 中采用的 OC 和 SCP 方法进行比较可以看出导重法在求解拓扑优化问题时具有迭代公式简单、适用范围广、收敛速度快、求解效果好的优点。该方法为拓扑优化问题的求解提供了一条新的途径。

参考文献

- [1] BENDSOE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using homogenization method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, 71(2): 197-224.
- [2] ZHANG Xianmin, OUYANG Gaofei, WANG Hua. Topology optimization of multiple inputs and multiple outputs compliant mechanisms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 20(1): 82-85.

- [3] BENDSOE M P, SIGMUND O. Topology optimization: theory, methods and applications[M]. Berlin: Springer, 2003.
- [4] 龚曙光, 刘翔, 谢桂兰, 等. 多载荷工况下无网格 Galerkin 法的拓扑优化[J]. 机械工程学报, 2009, 45(12): 137-142.
GONG Shuguang, LIU Xiang, XIE Guilan, et al. Topology optimization under multi-load cases based on element-free Galerkin method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(12): 137-142.
- [5] 隋允康, 叶红玲, 杜家政. 结构拓扑优化的发展及其模型转化为独立层次的迫切性[J]. 工程力学, 2005(22): 107-118.
SUI Yunkang, YE Hongling, DU Jiazheng. Development of structural topological optimization and imminency of its model transformation into independent level[J]. Engineering Mechanics, 2005(22): 107-118.
- [6] XIE Y M, STEVEN G P. A Simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. Computers and Structures, 1993, 49: 885-896.
- [7] BENDSOE M P, SIGMUND O. Material interpolation schemes in topology optimization[J]. Archive of Applied Mechanics, 1999, 69: 635-654.
- [8] 隋允康, 彭细荣. 结构拓扑优化 ICM 方法的改善[J]. 力学学报, 2005, 37(2): 190-198.
SUI Yunkang, PENG Xirong. The improvement for the ICM method of structural topology optimization[J]. Acta Mechanica Sinica, 2005, 37(2): 190-198.
- [9] MEI Yulin, WANG Xiaoming. Level set method for topological optimization applying to structure, mechanism and material designs[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 17(2): 200-209.
- [10] 左孔天, 陈立平, 钟毅芳, 等. 基于人工材料密度的新型拓扑优化理论和算法研究[J]. 机械工程学报, 2004, 40(12): 31-37.
ZUO Kongtian, CHEN Liping, ZHONG Yifang, et al. New theory and algorithm research about topology optimization based on artificial material density[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 40(12): 31-37.
- [11] 王晓慧, 荣见华, 赵志军, 等. 基于移动渐近线展开式的结构位移拓扑优化[J]. 长沙理工大学学报, 2009, 6(2): 33-38.
WANG Xiaohui, RONG Jianhua, ZHAO Zhijun, et al. Structure topological optimization design with displacement constraints based on the approximation of moving asymptotes[J]. Journal of Changsha University of Science and Technology, 2009, 6(2): 33-38.
- [12] ZUO Kongtian, ZHAO Yudong, CHEN Liping, et al. New HMM algorithm for topology optimization[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 18(3): 346-350.
- [13] 陈树勋. 精密复杂结构的几种现代设计方法[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1992.
CHEN Shuxun. Some modern design methods of precise and complex structures[M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 1992.
- [14] 陈树勋. 工程结构系统的分析、综合与优化设计[M]. 中国香港: 中国科学文化出版社, 2008.
CHEN Shuxun. Analysis, synthesis and optimization of engineering structural systems[M]. Hongkong, China: China Science Culture Publishing House, 2008.
- [15] 叶尚辉, 陈树勋. 天线结构优化设计的最佳准则法[J]. 西北电讯工程学院学报, 1982, 9(1): 11-28.
YE Shanghui, CHEN Shuxun. An optimality criterion method for antenna structure design[J]. Journal of Northwest Telecommunication Engineering Institute, 1982, 9(1): 11-28.

作者简介: 李枝东, 男, 1986 年出生。主要研究方向为结构拓扑优化。

E-mail: lzd08@mails.tsinghua.edu.cn

刘辛军(通信作者), 男, 1971 年出生, 博士, 副研究员, 博士研究生导师。主要研究方向为机构学和先进制造装备。

E-mail: xinjunliu@mail.tsinghua.edu.cn