

# 变系数移距变位方法及其在非圆齿轮传动中的应用\*

谭伟明

(佛山科学技术学院工学院机电工程系 佛山 528000)

**摘要:** 针对齿轮传动提出变系数随节曲线位置变化的设计方法,并应用于解决非圆齿轮传动的设计。首先建立具有移距变位量的生成齿条模型和节曲线纯滚动模型,而后用啮合方程将这两个模型结合起来,经坐标变换后在齿轮坐标系中获得变位非圆齿轮的齿廓曲线数学模型。根据非圆齿轮节曲线的曲率半径随节曲线位置变化的特点,提出一种由节曲线位置确定变位系数的变系数移距变位方法。以高阶椭圆齿轮的变位传动设计为例,设计了按余弦规律变化的变位系数函数,用计算机图形仿真的方法获得其齿廓曲线,验证了该方法的正确性。

**关键词:** 移距变位 生成齿条 图形仿真 非圆齿轮 高阶椭圆齿轮

**中图分类号:** TH132.424 TP391.9

## 0 前言

在圆柱齿轮和圆锥齿轮传动设计中,变位是一种常用的修正设计法。该方法主要用于消除根切、增大齿厚和调整中心距等。

当设计非圆齿轮传动时,消除根切、进行中心距调整的要求更为迫切。与圆形齿轮相比,非圆齿轮更容易存在曲率半径过小的区段,也就更容易发生根切,Chang<sup>[1]</sup>的研究结果证实了这一点。Chang指出,椭圆齿轮根切与否由其节曲线的最小曲率半径所决定。单个齿轮进行正变位能够有效地消除根切,对于非圆齿轮也理应如此,因为二者的齿廓成形原理是相同的<sup>[2]</sup>。

对于非圆齿轮实施正变位,相同的变位量在齿轮的不同区段所产生的效果是不同的,曲率半径小,则效果明显。因此,应当根据所在位置节曲线的曲率半径确定变位系数,才能够获得大致均匀的变位效果。另外,非圆齿轮在啮合传动中经常出现这种情形,即一个齿轮的节曲线曲率半径较小的区段与另一个齿轮的节曲线曲率半径较大的区段相对应。这样,应该在曲率半径小的区段上采用正变位,曲率半径较大的区段相应地采用负变位,同时保持变位系数之和为零。

借用一个假想的标准渐开线齿条(称为生成齿条)来获得非圆齿轮的齿廓曲线。首先建立标准齿条的数学模型,并给该齿条模型叠加一个随节曲线位置而变化的移距变位量,构成所需的生成齿条。而后将节曲线纯滚动模型和上述生成齿条模型结合起

来,从而在齿轮坐标系中获得移距变位的渐开线非圆齿轮齿廓曲线的数学模型。最后设计了一种按余弦变化的变位系数函数,用于处理高阶椭圆齿轮传动的变位问题,并且利用计算机图形仿真方法进行了验证,结果说明这种变位设计是有效的。

## 1 齿廓曲线数学模型

### 1.1 节曲线纯滚动数学模型

图1所示为非圆齿轮与生成齿条的节曲线运动关系示意图。利用文献[3]的结果,可以得到式(1)和式(2)所示的节曲线纯滚动模型。

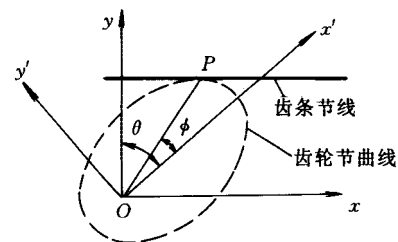


图1 非圆齿轮节曲线运动示意图

$$\left\{ \begin{aligned} s &= \int_0^{\phi} \sqrt{r^2 + (dr/d\phi)^2} d\phi - \frac{r dr/d\phi}{\sqrt{r^2 + (dr/d\phi)^2}} \\ \theta &= \phi + \arctan\left(-\frac{dr/d\phi}{r}\right) \\ x_p &= -\frac{r dr/d\phi}{\sqrt{r^2 + (dr/d\phi)^2}} \\ y_p &= \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + (dr/d\phi)^2}} \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} x'_p &= x_p \sin \theta + y_p \cos \theta \\ y'_p &= -x_p \cos \theta + y_p \sin \theta \end{aligned} \right. \quad (2)$$

\* 国家留学基金委员会留学资助项目(96862011)和佛山科学技术学院重点科研项目。20020517收到初稿,20021128收到修改稿

## 1.2 生成齿条的数学模型

生成齿条以标准齿条齿廓(图2)为基础,在齿条节线的垂直方向叠加一个移距变位量而构成的。

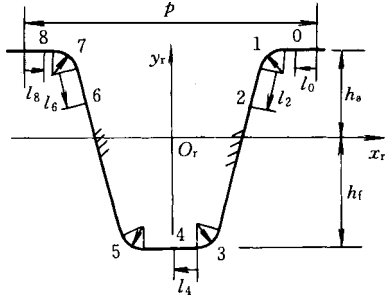


图2 标准齿条的几何形状

由文献[3]的标准齿条的数学模型进行适当修改,就可以获得生成齿条的数学模型如下。

0段和8段(参变量为 $l_0$ 和 $l_8$ )

$$x_{r,i} = \pm p/2 \mp l_i$$

$$y_{r,i} = h_a + \Delta y$$

$$l_{i,s} = 0$$

$$l_{i,e} = p/4 - (h_a - r_1 + r_1 \sin \alpha) \tan \alpha - r_1 \cos \alpha$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{r,i}}{\partial l_i} = \mp \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mp 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

式中, $l_i$ 分别代表0段的参变量 $l_0$ 或8段的参变量 $l_8$ 。上边的符号对应0段,下边的符号对应8段。下标中的s和e分别表示起点和终点。以下与此相似。

1段和7段(参变量为 $\lambda_1$ 和 $\lambda_7$ )

$$x_{r,i} = \pm p/4 \pm (h_a - r_1 + r_1 \sin \alpha) \tan \alpha \pm$$

$$r_1 \cos \alpha \mp r_1 \sin \lambda_i$$

$$y_{r,i} = h_a - r_1 + r_1 \cos \lambda_i + \Delta y$$

$$\lambda_{i,s} = 0$$

$$\lambda_{i,e} = \pi/2 - \alpha$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{r,i}}{\partial \lambda_i} = \mp \mathbf{i} r_1 \cos \lambda_i - \mathbf{j} r_1 \sin \lambda_i = r_1 \begin{bmatrix} \mp \cos \lambda_i \\ -\sin \lambda_i \end{bmatrix}$$

2段和6段(参变量为 $l_2$ 和 $l_6$ )

$$x_{r,i} = \pm p/4 + (h_a - r_1 + r_1 \sin \alpha) \tan \alpha \mp l_i \sin \alpha$$

$$y_{r,i} = (h_a - r_1 + r_1 \sin \alpha) - l_i \cos \alpha + \Delta y$$

$$l_{i,s} = 0$$

$$l_{i,e} = \frac{h_a - r_1 + r_1 \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{h_f - r_0 + r_0 \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{r,i}}{\partial l_i} = \mp \mathbf{i} \sin \alpha - \mathbf{j} \cos \alpha = \begin{bmatrix} \mp \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

3段和5段(参变量为 $\lambda_3$ 和 $\lambda_5$ )

$$x_{r,i} = \pm p/4 \mp (h_f - r_0 + r_0 \sin \alpha) \tan \alpha \mp$$

$$r_0 \cos \alpha \pm r_0 \sin \lambda_i$$

$$y_{r,i} = -(h_f - r_0 + r_0 \sin \alpha) + \Delta y$$

$$\lambda_{i,s} = 0$$

$$\lambda_{i,e} = \pi/2 - \alpha$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{r,i}}{\partial \lambda_i} = \pm \mathbf{i} r_0 \cos \lambda_i + \mathbf{j} r_0 \sin \lambda_i = r_0 \begin{bmatrix} \pm \cos \lambda_i \\ \sin \lambda_i \end{bmatrix}$$

4段(参变量为 $l_4$ )

$$x_{r,4} = p/4 - (h_f - r_0 + r_0 \sin \alpha) \tan \alpha - r_0 \cos \alpha - l_4$$

$$y_{r,4} = -h_f + \Delta y$$

$$l_{4,s} = 0$$

$$l_{4,e} = 2 \left[ p/4 - (h_f - r_0 + r_0 \sin \alpha) \tan \alpha - r_0 \cos \alpha \right]$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{r,4}}{\partial l_4} = -\mathbf{i} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 1.3 齿廓曲线数学模型

在本文中,Litvin提出的啮合方程的形式为<sup>[4]</sup>

$$\mathbf{r} = [\mathbf{M}] \mathbf{r}_{r,i} + \mathbf{r}_p$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{r,i} = \begin{bmatrix} x_{r,i} \\ y_{r,i} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_p = \begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & -s_r \sin \theta \\ \cos \theta & \sin \theta & s_r \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n_{x_{r,i}} \\ n_{y_{r,i}} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{r}_{r,i}}{\partial t_i} \times \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \partial y_{r,i} / \partial t_i \\ -\partial x_{r,i} / \partial t_i \end{bmatrix}$$

$$t_i = l_i \text{ 或 } \lambda_i$$

$$\frac{-s_r - x_{r,i}}{n_{x_{r,i}}} = \frac{0 - y_{r,i}}{n_{y_{r,i}}}$$

其中 $s_r$ 是齿条的相对位移量,它等于齿条总位移量 $s$ 与 $P$ 点沿 $x$ 轴方向的位移量之差。其数值若超出各段的范围,则意味着原位置的生成过程已经结束,应使齿条平移一个齿距。因此它的计算式为

$$s_r = s - x_p - jp = \int_0^\phi \sqrt{r^2 + (dr/d\phi)^2} d\phi - jp$$

式中 $j=1,2,\dots,z$ ,其中 $z$ 为齿轮齿数

利用啮合方程将节曲线纯滚动模型和生成齿条模型结合起来,经整理获得齿廓曲线的数学模型如下(含参变量 $s_r$ 的参数方程和参变量的取值范围)。

0段和8段

$$x'_i = x_p \sin \theta + (y_p + h_a + \Delta y) \cos \theta$$

$$y'_i = -x_p \cos \theta + (y_p + h_a + \Delta y) \sin \theta$$

$$s_{r,is} = \mp p/2$$

$$s_{r,ie} = \mp \left[ p/4 + (h_a - r_1 + r_1 \sin \alpha) \tan \alpha + r_1 \cos \alpha \right]$$

1段和7段

$$\lambda_i = \mp \arctan \left[ (s_r - s_{r,is}) / (h_a - r_1 + \Delta y) \right]$$

$$h_i = h_a - r_1 + r_1 \cos \lambda_i + \Delta y$$

$$\begin{aligned} x'_i &= (x_p \pm h_i \tan \lambda_i) \sin \theta + (y_p + h_i) \cos \theta \\ y'_i &= -(x_p \pm h_i \tan \lambda_i) \cos \theta + (y_p + h_i) \sin \theta \\ s_{r, is} &= \mp \left( p/4 + h_a \tan \alpha + r_1 \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \\ s_{r, ie} &= \mp \left( p/4 + \frac{h_a - r_1 + r_1 \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + \Delta y \cot \alpha \right) \end{aligned}$$

2 段和 6 段

$$\begin{aligned} h_i &= (s_r \pm p/4 \mp \Delta y \tan \alpha) \sin \alpha \cos \alpha \\ x'_i &= (x_p - h_i \cot \alpha) \sin \theta + (y_p \mp h_i) \cos \theta \\ y'_i &= -(x_p - h_i \cot \alpha) \cos \theta + (y_p \mp h_i) \sin \theta \\ s_{r, is} &= \mp \left( p/4 + \frac{h_a - r_1 + r_1 \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + \Delta y \cot \alpha \right) \\ s_{r, ie} &= \mp \left( p/4 - \frac{h_f - r_0 + r_0 \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + \Delta y \cot \alpha \right) \end{aligned}$$

3 段和 5 段

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \pm \arctan \left[ (s_r - s_{r, is}) / (h_f - r_0 - \Delta y) \right] \\ h_i &= h_f - r_0 + r_0 \cos \lambda_i - \Delta y \\ x'_i &= (x_p \mp h_i \tan \lambda_i) \sin \theta + (y_p - h_i) \cos \theta \\ y'_i &= -(x_p \mp h_i \tan \lambda_i) \cos \theta + (y_p - h_i) \sin \theta \\ s_{r, is} &= \mp \left( p/4 - h_f \tan \alpha - r_0 \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \\ s_{r, ie} &= \mp \left( p/4 - \frac{h_f - r_0 + r_0 \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + \Delta y \cot \alpha \right) \end{aligned}$$

4 段

$$\begin{aligned} x'_4 &= x_p \sin \theta + (y_p - h_f + \Delta y) \cos \theta \\ y'_4 &= -x_p \cos \theta + (y_p - h_f + \Delta y) \sin \theta \\ s_{r, 4s} &= - \left( p/4 - h_f \tan \alpha - r_0 \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \\ s_{r, 4e} &= p/4 - h_f \tan \alpha - r_0 \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

1.4 齿廓的加工问题

重点讨论变系数移距变位方法, 用假想的生成齿条来获得非圆齿轮的齿廓曲线进行验证。

作为渐开线齿廓的齿轮, 变位非圆齿轮仍然可以利用常用的齿轮加工方法及刀具, 在相应的数控机床上加工作获得其齿廓, 例如滚齿、插齿和铣齿等。

若采用滚齿法, 变位量与径向进给量方向相同, 二者可以直接叠加, 数学处理以及加工编程简单<sup>[2]</sup>。但必须保证加工过程中不发生干涉, 就要验证节曲线本身的非凹条件并考虑具体的变位情况。

若采用插齿法, 则要验证内凹段的最小曲率半径大于插齿刀盘半径, 有关研究已见到结果<sup>[5, 6]</sup>。

非圆齿轮铣削加工比较困难, 尽量不用。

想定的一般加工方法是电火花线切割加工。该方法适用于任意节曲线的直齿非圆齿轮, 但缺点是

加工效率比较低。若综合考虑效率、批量和工装等因素, 该方法仍然是比较合理的方法之一。

2 高阶椭圆齿轮变位设计

2.1 变位系数函数

高阶椭圆齿轮的节曲线具有自身成对共轭的特点, 即两个高阶椭圆能够相互对滚且保持中心距不变。共轭位置的极角相差  $\pi/n$ , 俗称为顶部对腰部, 如图 3 所示。

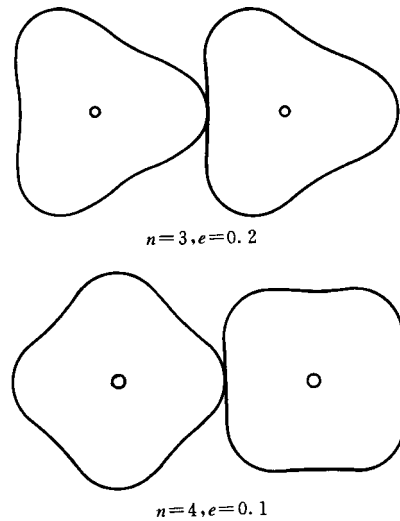


图 3 高阶椭圆共轭示意图

顶部是曲率半径较小的区域, 一般应进行正变位; 而腰部则相反, 是曲率半径较大的区域, 可以实施负变位。只要保证顶部和腰部的变位系数和为零, 则该位置的节点保持不变。依照此法实施, 节曲线仍然保持为同一高阶椭圆。

因此, 将顶部设计为正变位, 使得齿厚增大, 消除根切。从顶部开始向腰部推移, 逐渐地减小变位系数, 使得到达腰部时变位系数值恰好成为顶部点处的相反数。更为合理的做法是按照两个齿轮的节曲线对应位置的曲率半径情况进行计算得到二者的变位系数。为了能够简要地进行说明, 只是将函数假设为余弦函数, 自变量是节曲线的弧长, 符合节曲线纯滚动的前提。

2.2 高阶椭圆齿轮的图形仿真

使用高阶椭圆齿轮进行图形仿真, 其节曲线方程以及相应的仿真计算式为<sup>[2, 5]</sup>

$$\begin{aligned} r &= \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \phi} \\ s_r &= a(1 - e^2) \int_0^\phi \frac{B(\phi)}{(1 - e \cos \phi)^2} d\phi - jp \end{aligned}$$

$$\theta = \phi + \arctan\left(\frac{ne \sin n\phi}{1 - e \cos n\phi}\right)$$

$$x_p = r \frac{ne \sin n\phi}{B(\phi)}$$

$$y_p = \frac{a(1 - e^2)}{B(\phi)}$$

$$B(\phi) = \sqrt{n^2 e^2 \sin^2 n\phi + (1 - e \cos n\phi)^2}$$

设计一个按余弦规律变化的变位系数  $\Delta y = \Delta y_{\max} \cos(2\pi s_r / (c/n))$ , 其中  $c$  是节曲线的周长。由于高阶椭圆共轭的特点所决定, 另一个齿轮在共轭位置的变位系数恰好是  $-\Delta y$ , 满足变位系数之和等于零的条件, 节曲线不会因齿轮变位而改变。

图 4 所示为图形仿真结果, 同时给出无变位的结果作为对比。经比较可以得知, 齿厚分布、根切现象等均得到了合理的改善, 变位设计是成功的。

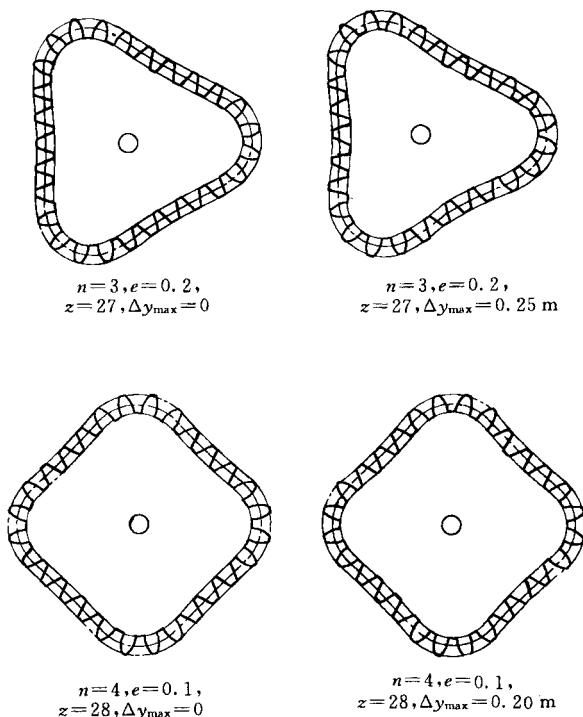


图 4 变系数变位的高阶椭圆齿轮齿廓

### 3 结论

(1) 建立的移距变位非圆齿轮齿廓曲线的数学模型符合齿廓啮合原理, 模型的层次清晰, 数学形式简单。

(2) 使用该模型可以获得非圆齿轮齿廓曲线, 供齿轮制造、工程分析等过程使用。

(3) 使用周期变化的变位系数解决高阶椭圆齿轮的变位设计问题, 结果是合理而且有效的。

(4) 采用电火花线切割法加工非圆齿轮的齿廓曲线, 比较方便、有效。

### 参 考 文 献

- 1 Chang S L, Tsay C B. Mathematical model and undercutting analysis of elliptical gears generated by rack cutters. *J. Mechanism and Mech. Theory*, 1996, 31 (7): 879~890
- 2 谭伟明, 胡赤兵, 冼伟杰, 等. 非圆齿轮滚切最简数学模型及其图形仿真. *机械工程学报*, 2001, 37(5): 26~
- 3 谭伟明, 梁燕飞, 安军, 等. 非圆齿轮的渐开线齿廓曲线数学模型. *机械工程学报*, 2002, 38(5): 75~79
- 4 Litvin F L. *Theory of Gearing*. Washington DC: NASA Publication, 1989
- 5 吴序堂, 王贵海. 非圆齿轮及非匀速比传动. 北京: 机械工业出版社, 1997
- 6 熊镇芹, 吴序堂, 毛世民, 等. 非圆齿轮插齿加工中的退刀干涉机理及规避方法研究. *机械工程学报*, 2002, 38(3): 152~155

## VARYING-COEFFICIENT PROFILE-SHIFT-MODIFICATION METHOD AND IT'S APPLICATION TO NON-CIRCULAR GEARS

Tan Weiming  
(Foshan University)

**Abstract:** A profile-shift-modification method for the involute gears is worked out, in which the modification coefficient varies with the position of the pitch-lines of gears, and is applied to design non-circular gear transmission. The model of the generating rack with a modification shift amount, and the pure-rolling model are set up separately, and then joined together by using the so-called equation of mesh, to obtain the mathematical model of tooth profile in the coordinate system of the gear. According to the feature that the curvature radius of the pitch-lines of the non-circular gears varies with the rolling points of the pitch-lines, it is put forward that the coefficients of profile-shifted-modification are determined by the pitch-lines. In the end, for the high-order elliptical gears, fabricating a modification coefficient with cosine function of the pitch-line position, their teeth profiles described to verify the correctness of the model.

**Key words:** Profile-shift-modification Conjugate rack  
Graphic simulation Non-circular gear  
High-order elliptical gears

作者简介: 谭伟明, 男, 1958 年生, 副教授, 工学硕士。主要研究方向为机械制造及其自动化设备、机电一体化。参与及完成国家和地方科技攻关项目共计 10 项, 发表论文 30 余篇。