

少自由度并联机器人机构的静力分析*

李永刚 宋轶民 黄田 张策
(天津大学机械工程学院 天津 300072)

摘要: 与 6 自由度并联机器人不同, 少自由度并联机器人机构的支链不仅传递驱动力, 同时还要向末端提供约束力, 然而在对此类机构进行静力分析时, 现有的研究都忽略了约束力的传递特性。为此, 以微分流形理论为基础, 分析指出少自由度并联机器人末端的完整力空间应包括驱动力子空间和约束力子空间, 并以此为基础, 利用虚功原理, 给出一种建立此类机构输入与输出广义力间完整映射的方法。此完整力映射包括驱动力映射矩阵和约束力映射矩阵。通过计算这两个矩阵的条件数, 可以分别分析此类机构驱动力和约束力的传递特性。该分析方法的物理意义和数学理论相统一, 且概念清晰, 便于深入理解少自由度并联机构静力传递的特性。最后, 以 3-UPU 并联机器人机构为例进行实例分析。

关键词: 并联机器人 少自由度 静力分析 微分流形
中图分类号: TP242

0 前言

少自由度并联机器人一般是指自由度数为 3、4 和 5 的并联机器人。与 6 自由度并联机器人相比, 少自由度并联机器人具有结构简单、制造成本低、控制相对容易等优点, 并因此成为机器人机构学新兴的研究热点^[1]。

静力分析是并联机器人设计的基础。通过静力分析确定力传递特性, 进而为尺度综合等运动学设计提供依据^[2]。针对少自由度并联机器人的静力传递特性, 已有学者进行了一些研究。GOSSELIN^[3]建立了并联机器人工作空间内反映静力传递特性的刚度映射。高峰等^[4]利用雅可比矩阵分析了一种 5 自由度解耦并联机构力传递的各向同性。赵辉等^[5]用矢量分析法得出了一种新型 5 自由度并联机床的静力传递雅可比矩阵。张华等^[6]根据微分误差模型, 建立了平面 3 自由度并联机构的静刚度映射矩阵。然而, 这些研究都只是研究了驱动力的传递特性, 而最新研究表明, 对于少自由度并联机器人的设计, 仅考虑运动和驱动力的传递特性是严重不足的^[7]。这是因为少自由度并联机器人的自由度数小于 6, 其执行机构的支链不仅传递运动和驱动力, 同时还要向末端提供约束力, 以限制一些不期望的自由度^[1,8]。由此可知, 约束力的传递特性也影响着机器人的性能。这一点与 6 自由度并联机器人是不同的, 因为 6 自由度并联机器人机构的支链只传递运动和

驱动力, 不提供约束力。

此外, 作为现代微分几何的重要分支, 微分流形理论在描述刚体运动时具有明显的物理意义。因此以微分流形理论为工具来分析机构的静力传递特性, 有助于深入地理解和研究少自由度并联机器人机构的静力传递特性。为此, 本文首先以微分流形理论为基础, 阐释了少自由度并联机器人末端完整的力空间构成, 即该力空间由驱动力和约束力两个正交的子空间构成。因此其静力分析应包括驱动力分析和约束力分析两部分。以此为基础, 利用虚功原理, 给出一种建立输入广义力与末端输出广义力之间完整映射的方法。利用该方法既可以建立机构输入端与末端之间的驱动力映射关系, 又可以建立约束力映射关系。根据这两个力映射矩阵的代数特征就可以构造机构静力传递性能的评价指标, 在这里将矩阵的条件数作为分析静力传递特性的依据。最后, 以 3-UPU 并联机器人机构为例进行了实例分析。

1 力空间分析

利用微分流形理论, 通过分析少自由度并联机器人末端约束子流形的余切空间的形成, 可以揭示少自由度并联机器人末端的力空间构成^[9-12]。

由文献[10]可知, 转动副的位形空间为 S^1 (单位圆); 移动副的位形空间为 R^1 ; 万向铰的位形空间为 $S^1 \times S^1$; 球副的位形空间为 $SO(3)$ (三维旋转群)。对于没有闭环约束的开链机构, 其末端的整体位形空间 E 自然就是所有关节位形空间的笛卡尔乘积。然而, 由于少自由度并联机器人机构中存在闭环约

* 国家自然科学基金(50535010、50675151)、国家科技支撑计划重点(2006BAF01B00)和教育部高校博士点基金(20060056018) 资助项目。
20060830 收到初稿, 20070405 收到修改稿

束, 因此, 其末端的可实现位形空间只是其整体位形空间(所有关节位形空间的笛卡尔乘积)的一个约束子流形。令 $\theta \in \mathbf{R}^m$ 为 E 的局部广义坐标, $h(\theta)$ 表示少自由度并联机构的环路约束方程, 则

$$H: E \rightarrow \mathbf{R}^l \quad \theta \mapsto H(\theta) = \begin{pmatrix} h_1(\theta) \\ \vdots \\ h_l(\theta) \end{pmatrix} \quad (1)$$

显然, 少自由度并联机器人机构末端的可实现位形空间即为约束子流形

$$Q = H^{-1}(\theta) \quad (2)$$

此外, 令 $T_\theta E$ 和 $T_\theta Q$ 分别为位形空间 E 和 Q 的切空间, 其物理意义是机构末端的广义速度空间; 令 $T_\theta^* E$ 和 $T_\theta^* Q$ 分别为位形空间 E 和 Q 的余切空间, 其物理意义对应的是机构末端的广义力空间。它们之间的相互关系为

$$T_\theta E = T_\theta Q \oplus T_\theta Q^\perp \quad (3)$$

$$T_\theta^* E = T_\theta^* Q \oplus T_\theta^* Q^\perp \quad (4)$$

式中, $T_\theta Q$ 是机构末端所允许的自由速度矢量 v_2 所张成的 n 维线性空间(n 为机构的自由度数), $T_\theta Q^\perp$ 是机构末端被约束的速度矢量 v_1 张成的 $6-n$ 维线性空间; 相应地, $T_\theta^* Q$ 是机构末端的驱动广义力 f_a 张成的 n 维线性空间, 以实现机构末端在自由速度矢量方向的运动; 而 $T_\theta^* Q^\perp$ 是由机构末端的约束力 f_c 张成的 $6-n$ 维线性空间, 以限制机构末端在约束速度方向矢量上的运动。

利用切空间与余切空间之间的对偶性, 力空间的定义可用数学式描述如下

$$T_\theta^* Q = \{f_a \in T_\theta^* E \mid \langle f_a, v_1 \rangle = 0, \forall v_1 \in T_\theta Q^\perp\} \quad (5)$$

$$T_\theta^* Q^\perp = \{f_c \in T_\theta^* E \mid \langle f_c, v_2 \rangle = 0, \forall v_2 \in T_\theta Q\} \quad (6)$$

由此不难看出, 力空间 $T_\theta^* Q$ 和 $T_\theta^* Q^\perp$ 分别是速度空间 $T_\theta Q$ 和 $T_\theta Q^\perp$ 的零化空间。

2 静力分析

并联机器人的运动关节可分为主动关节和被动关节两种。在不考虑关节的摩擦力和杆件重力的影响时, 被动关节的反力将不做功, 因此利用虚功原理就可以得出机构输入端广义力和末端广义力之间的映射关系^[3]。

令 $f = (f_c^T \quad f_a^T)^T$ 为机构末端输出的广义力, 其中, f_c 和 f_a 分别表示输出的约束广义力和驱动广义力, 与之相对应的广义虚位移为 $\delta x = (\delta x_c^T \quad \delta x_a^T)^T$ 。输入端输入的广义力矢量表示为

$\tau = (\tau_c^T \quad \tau_a^T)^T$, 其中, τ_c 和 τ_a 分别表示输入约束广义力和驱动广义力, 与之相对应的广义虚位移为 $\delta q = (\delta q_c^T \quad \delta q_a^T)^T$ 。 f 、 δx 、 τ 和 δq 均为 6×1 矢量, f_a 、 δx_a 、 τ_a 和 δq_a 均为 $n \times 1$ 矢量, f_c 、 δx_c 、 τ_c 和 δq_c 均为 $(6-n) \times 1$ 矢量。

由虚功原理可得

$$\tau^T \delta q - f^T \delta x = 0 \quad (7)$$

则有

$$\begin{pmatrix} \tau_c \\ \tau_a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \delta q_c \\ \delta q_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_c \\ f_a \end{pmatrix}^T \delta x = 0 \quad (8)$$

由式(5)、(6)可知, 广义力 f_a 和 f_c 分别与虚位移 δx_c 、 δx_a 是相互零化的关系, 因此, 联合式(5)、(6)、(8)可得

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \tau_a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \theta \\ \delta q_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \theta \\ f_a \end{pmatrix}^T \delta x = 0 \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_c \\ \theta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \delta q_c \\ \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_c \\ \theta \end{pmatrix}^T \delta x = 0 \quad (10)$$

根据少自由度并联机器人机构完整的雅可比矩阵^[13], 可知

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \delta q_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ J_x \end{pmatrix} \delta x \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} \delta q_c \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_c \\ \theta \end{pmatrix} \delta x \quad (12)$$

式中, J_x 和 J_c 分别为少自由度并联机器人机构的 $n \times 6$ 维运动子雅可比矩阵和 $(6-n) \times 6$ 维约束子雅可比矩阵。

将式(11)、(12)分别代入式(9)、(10), 并整理可得

$$\left(\begin{pmatrix} \theta \\ \tau_a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \theta \\ J_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \theta \\ f_a \end{pmatrix}^T \right) \delta x = 0 \quad (13)$$

$$\left(\begin{pmatrix} \tau_c \\ \theta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} J_c \\ \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_c \\ \theta \end{pmatrix}^T \right) \delta x = 0 \quad (14)$$

由式(13)、(14)可以得出

$$f_a = J_{xx}^T \tau_a \quad (15)$$

$$f_c = J_{cc}^T \tau_c \quad (16)$$

式中, J_{xx} 为 $n \times n$ 矩阵, 是 J_x 的后 n 列; J_{cc} 为 $(6-n) \times (6-n)$ 矩阵, 是 J_c 的前 $6-n$ 列。

式(15)、(16)分别表示少自由度并联机器人的输入端与末端之间的驱动力以及约束力的映射关系。

根据这两个映射矩阵可以分别定义矩阵条件数

$$k_{J_x} = \|J_{xx}\| \|J_{xx}^{-1}\| \quad (17)$$

$$k_{J_c} = \|J_{cc}\| \|J_{cc}^{-1}\| \quad (18)$$

式中, $\|\cdot\|$ 是矩阵范数, k_{J_x} 和 k_{J_c} 为矩阵条件数。

由并联机器人机构学理论可知^[2,4], 这两个力映射矩阵的条件数可以作为度量并联机器人驱动力和约束力各向同性的性能指标。其中, k_{J_x} 和 k_{J_c} 均为大于或等于 1 的数, 即 $1 \leq k_{J_x} < \infty$, $1 \leq k_{J_c} < \infty$ 。在进行并联机器人机构的几何参数优化设计时, 应该使机构的这些矩阵条件数在其工作空间内尽量取较小的值, 当其等于 1 时, 机构被认为具有最佳的力传递性能。

3 实例分析

3-UPU 并联机器人机构如图 1 所示, 它由定平台 $A_1A_2A_3$, 动平台 $B_1B_2B_3$ 以及连接两个平台的三条支链组成。定平台与动平台均采用等边三角形布局, 外接圆半径分别为 a 和 b 。支链的结构形式为 UPU(万向铰—移动副—万向铰)。其中移动副是主驱动关节。在定平台和动平台上分别以各自几何中心为原点建立坐标系, 如图 1 所示。图 1 中, $s_{1,i} = s_{5,i}$, $s_{2,i} = s_{4,i}$, 因此, 该机构动平台有 3 个平动自由度^[13], 其中, $s_{j,i}$ 是第 i 个支链中第 j 个关节螺旋轴的单位矢量, 此外, $s_{1,i}$ 相切于定平台的外接圆, $s_{2,i} \perp s_{1,i}$ 且 $s_{2,i}$ 与定平台的夹角为 α 。

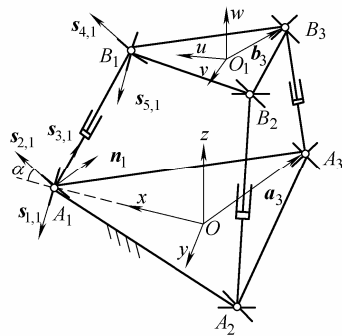


图 1 3-UPU 并联机器人机构简图

由文献[13]可知该机构的约束子雅可比矩阵为

$$J_c = \begin{pmatrix} n_1^T & \theta \\ n_2^T & \theta \\ n_3^T & \theta \end{pmatrix} \quad (19)$$

式中, n_i 是一个 3×1 单位矢量, 方向由 $s_{2,i} \times s_{1,i}$ (或 $s_{4,i} \times s_{5,i}$) 决定。

此外, 由文献[13]可知该机构的运动子雅可比矩阵为

$$J_x = \begin{pmatrix} (a_1 \times s_{3,1})^T & s_{3,1}^T \\ (a_2 \times s_{3,2})^T & s_{3,2}^T \\ (a_3 \times s_{3,3})^T & s_{3,3}^T \end{pmatrix} \quad (20)$$

式中 $a_i = OA_i$

由式(15)、(16)、(19)、(20), 可得

$$J_{cc} = \begin{pmatrix} n_1^T \\ n_2^T \\ n_3^T \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$J_{xx} = \begin{pmatrix} s_{3,1}^T \\ s_{3,2}^T \\ s_{3,3}^T \end{pmatrix} \quad (22)$$

式中, J_{xx}, J_{cc} 均为 3×3 矩阵。

联合式(17)、(18), 可得

$$k_{J_x} = \|J_{xx}\| \|J_{xx}^{-1}\| \quad (23)$$

$$k_{J_c} = \|J_{cc}\| \|J_{cc}^{-1}\| \quad (24)$$

根据式(23)、(24)通过计算条件数可以分析 3-UPU 机构的静力传递特性与几何参数之间的关系。

令定平台外接圆半径 $a = 350 \text{ mm}$, 定、动平台外接圆半径比 $\lambda = a/b$, 给定机构位形: $x = y = 0$, $z = 700 \text{ mm}$ 。另外, 由式(21)、(22)中的矩阵 J_{xx} 、 J_{cc} 不难看出, J_{cc} 与几何参数 α 紧密相关, J_{xx} 与几何参数 λ 紧密相关。因此这里只将 λ 和 α 分别作为条件数 k_{J_x} 和 k_{J_c} 的灵敏几何参数进行分析, 如图 2、3 所示。

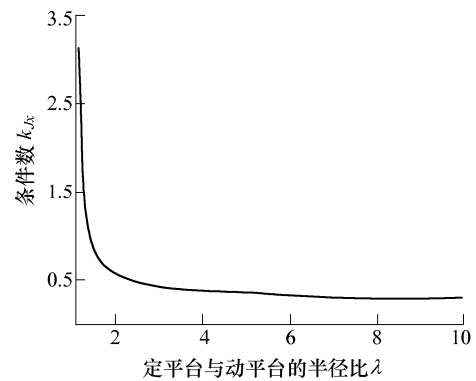


图 2 条件数 k_{J_x} 与定、动平台半径比 λ 的关系

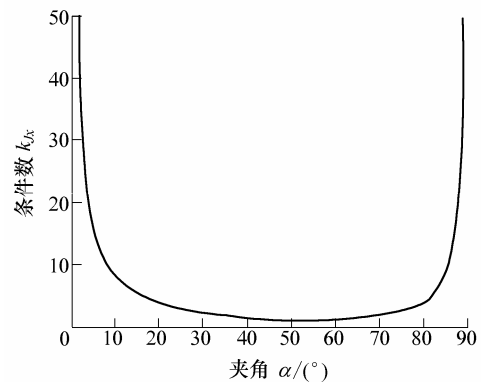


图 3 条件数 k_{J_c} 与夹角 α 的关系

从图2不难看出,在此给定位形时,随着定平台与动平台的外接圆半径比值增大,条件数 k_{Jc} 越来越小。这表明定、动平台的外接圆半径比值大时,该机构的驱动力传递特性好。从图3可以看到,随着夹角 α 的不断增大,条件数 k_{Jc} 先是减小进而增大,且在 $\alpha=55^\circ$ 时条件数 k_{Jc} 取最小值。这表明该机构的约束力传递特性在 $\alpha=55^\circ$ 附近较好。在 $\alpha=0^\circ$ 和 $\alpha=90^\circ$ 时条件数 k_{Jc} 的值都有突变,这是因为该机构在 $\alpha=0^\circ$ 和 $\alpha=90^\circ$ 时发生约束奇异,此时机构约束力空间的维数减小,不能完全限制机构末端的转动自由度。

4 结论

(1) 少自由度并联机器人机构末端的完整力空间为6维线性空间,由两个线性子空间构成,即驱动力子空间和约束力子空间。

(2) 基于虚功原理,可建立少自由度并联机器人包含驱动力和约束力在内的完整静力映射。进而分别利用驱动力和约束力映射矩阵的条件数可以分析这两个广义力的传递特性。

(3) 3-UPU的实例分析验证了该方法的可行性,结果表明,影响机构驱动力和约束力传递特性的灵敏几何参数各不相同,因此在对少自由度并联机构进行几何参数优化设计时,约束力传递特性分析不可忽略。

参 考 文 献

- [1] 黄真,李秦川.少自由度并联机器人机构的型综合原理[J].中国科学(E辑),2003,33(9):813-819.
- [2] TSAI L W. Robot analysis: The mechanics of serial and parallel manipulators[M]. New York: John Wiley & Sons, 1999.
- [3] GOSSELIN C M. Stiffness mapping for parallel manipulators[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(3): 377-382.
- [4] 高峰,陈玉龙,彭斌彬,等.新型解耦和各向同性五维力传感器性能分析[J].机械工程学报,2004,40(9):71-74.
- [5] 赵辉,高峰,张建军,等.新型五自由度并联机构静力学分析[J].机械设计,2004,21(6):54-57.
- [6] 张华,李育文,王立华,等.龙门式混联机床的静刚度分析[J].清华大学学报(自然科学版),2004,44(2):182-185.
- [7] MERLET J P. Jacobian, manipulability, condition number, and accuracy of parallel robots[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2006, 128(1): 199-206.
- [8] 黄田,李蒙,吴梦丽,等.可重构PKM模块的选型原则——理论与实践[J].机械工程学报,2005,41(8):36-41.
- [9] ZLATANOV D, BONEV I A, GOSSELIN C M.

International conference on robotics and automation[C]// ICRA 2002: Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation, DC, May 11-15, 2002, Washington. New York: IEEE, 2002.

- [10] RICHARD M, LI Z X, SASTRY S S. A mathematical introduction to robotic manipulation[M]. Florida: CRC Press, 1994.
- [11] BOOTHY W. An introduction to differentiable manifold and Riemannian geometry[M]. New York: Academic, 1975.
- [12] LIU G F, LI Z X. A unified geometric approach to modeling and control of constrained mechanical systems [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2002, 18(4): 574-587.
- [13] JOSHI S A, TSAI L W. Jacobian analysis of limited-DOF parallel manipulators[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2002(124): 254-258.

STATIC FORCE ANALYSIS OF LOWER-MOBILITY PARALLEL MANIPULATORS

LI Yonggang SONG Yimin HUANG Tian
ZHANG Ce

(School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072)

Abstract: Different from the parallel manipulators with 6 DOFs, the limbs of the lower-mobility parallel manipulators not only transmit motion and actuation force or moment but also provide constraint force or moment for their end-effectors. However, the latter one is often neglected in the past studies on static force of this class of parallel manipulators. By making use of the theory of differential manifold, it is revealed clearly that the generalized force space of the manipulators' end-effector consists of both actuation and constraint force sub spaces. On the basis of the above analysis, the overall mappings of generalized force between input and output of manipulator are built up by use of the principle of virtual work, which consists of actuation and constraint forces mappings, i.e., two matrices. Through investigating the condition numbers of these matrices, characteristics of actuation and constraint forces transmission of the manipulator can be obtained. Moreover, this method is unified and distinct in physics and mathematics, in which it is easy to deeply understand the essence of the static force of this class of parallel manipulators. At last, the 3-UPU parallel manipulator is used as an example to demonstrate the methodology.

Key words: Parallel manipulator Lower-mobility

Static force analysis Differential manifold

作者简介:李永刚,男,1975年出生,博士。主要研究方向为并联机器人设计及理论。

E-mail: lygang1975@163.com