

基于疲劳裂纹形成曲线的 裂纹扩展分析数值方法*

杨继运 张行

(北京航空航天大学固体力学研究所 北京 100083)

张珉

(中国航天科工集团三十一研究所 北京 100074)

摘要: 通过损伤力学将裂纹形成与裂纹扩展两个过程有机结合在一起。根据裂纹形成阶段的疲劳曲线, 获取损伤演化方程中的材质参量, 通过损伤力学—有限元法, 确定了裂纹扩展阶段中裂纹尺寸与载荷循环次数之间的关系, 从而将裂纹萌生与扩展由当作两个独立过程纳入一个统一的理论体系。因此, 在裂纹形成与裂纹扩展两阶段的任一试验数据已知的情况下, 均可根据损伤力学—有限元法获取另一阶段数据, 这就大大减少试验数量, 并可弥补试验手册数据的不足。

关键词: 损伤力学 疲劳曲线 裂纹扩展 有限元法

中图分类号: TG113.25

0 前言

在一般的疲劳分析, 构件的疲劳失效过程可以分为裂纹形成与裂纹扩展两个阶段。对于裂纹形成阶段, 目前的分析方法主要建立在试验与统计相结合的基础上^[1~3]; 对于裂纹扩展阶段则采用断裂力学的方法, 通过试验建立由应力强度因子或守恒积分控制的各种类型的裂纹扩展速率经验公式进行分析^[4,5]。因此, 在现行的疲劳分析框架中, 不论是在建模上还是在采集试验数据上, 均将裂纹形成与裂纹扩展作为两个彼此独立的过程分别进行处理。实质上, 从损伤力学的观点出发, 两者同属于一个连续的疲劳失效过程^[6,7]。

力图通过损伤力学的方法, 把疲劳失效的两个阶段有机地结合在一起。使用裂纹形成阶段的 $S \sim N$ 曲线, 拟合损伤演化方程中的材质参量, 在通过其他类型试件进行有效性验证的基础上, 利用损伤力学—有限元法进行裂纹扩展阶段性能的数值计算。最后, 通过与裂纹扩展速率试验数据相比较, 证明该方法的可行性。

1 疲劳损伤耦合理论

疲劳损伤耦合理论基本方程如下。

(1) 平衡方程

小变形情况下, 应力与体力的关系为

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_{bi} = 0 \quad (1)$$

式中 σ_{ij} ——应力分量的变程

F_{bi} ——体力分量的变程

(2) 几何方程

小变形情形下的位移与应变关系为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

式中 u_i, u_j ——位移分量的变程

ε_{ij} ——应变分量的变程

(3) 本构关系

损伤互耦的应力与应变关系为

$$\sigma_{ij} = S_{ijkl} (1 - D) \varepsilon_{kl} \quad (3)$$

式中 S_{ijkl} ——弹性常数

D ——损伤度, 金属材料的损伤度可以看作一标量, 取值范围为 [0,1]

ε_{kl} ——应变分量的变程

(4) 损伤演化方程

引入等效应力变程

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (4)$$

式中 s_{ij} ——应力偏量分量的变程

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{rs} \sigma_{rs} \quad (5)$$

式中 δ_{ij}, δ_{rs} ——Kronecker 符号

* 教育部博士点基金资助项目(1999000607)。20030818 收到初稿, 20040211 收到修改稿

σ_{rs} ——应力分量的变程

一般情况下损伤演化方程具有如下形式^[7]

$$\frac{dD}{dN} = \begin{cases} 0 & \sigma_{Me} < \sigma_{th} \\ \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{1}{2E}\right)^{p+1} \left(\frac{1}{1-D}\right)^{2p+2} (\sigma_{Me}^{2p+2} - \sigma_{th}^{2p+2}) & \sigma_{Me} > \sigma_{th} > \sigma_{me} \\ \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{1}{2E}\right)^{p+1} \left(\frac{1}{1-D}\right)^{2p+2} (\sigma_{Me}^{2p+2} - \sigma_{me}^{2p+2}) & \sigma_{Me} > \sigma_{me} > \sigma_{th} \end{cases} \quad (6)$$

式中 N ——应力循环次数

σ_{Me} ——材料受到最大载荷时对应的等效应力

σ_{me} ——材料受到最小载荷时对应的等效应力

E ——材料的弹性模量

α, p ——材料的损伤力学参数

σ_{th} ——应力门槛值, 可由材料的疲劳性能曲线确定

应力门槛值可被表示为如下形式

$$\sigma_{th} = \sigma_{th0}(1-D)^{0.5+\nu} \quad (7)$$

式中 σ_{th0} ——无初始损伤情况对应的应力门槛值

ν ——材料的损伤参数

将式(7)代入式(6)中的第二式, 有

$$\frac{dD}{dN} = \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{1}{2E}\right)^{p+1} \left(\frac{1}{1-D}\right)^{2p+2} \left[\sigma_{Me}^{2p+2} - \sigma_{th0}^{2p+2}(1-D)^{(0.5+\nu)(2p+2)} \right] \quad (8)$$

(5) 边界条件

力的边界条件为

$$\sigma_{ij}l_j = F_i \quad \text{在 } S_p \text{ 上} \quad (9)$$

式中 F_i ——静力边界 S_p 上给定面力分量的变程

l_j ——边界外法线方向余弦

位移的边界条件为

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{在 } S_u \text{ 上} \quad (10)$$

式中 \bar{u}_i ——位移边界 S_u 上给定位移分量的变程

2 损伤力学—有限元法

在应用损伤力学方法解决疲劳裂纹扩展问题时, 必然要涉及到两类问题: 其一, 在损伤场已知的情况下, 构件应力场、位移场和应变场的分析; 其二, 在应力场已知的情况下, 损伤场的分析与裂纹扩展寿命的预估。下面对这两类内容分别进行阐述, 并推导出相应的有限元算法。

2.1 给定损伤场时的应力分析

将式(3)展开, 有

$$\sigma_{ij} = S_{ijkl}\epsilon_{kl} - DS_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (11)$$

假设无损伤时体元应力为 σ_{ij}^0 , 即 $\sigma_{ij}^0 = S_{ijkl}\epsilon_{kl}$ 。

令 $\sigma_{ij}^D = -DS_{ijkl}\epsilon_{kl}$, 则式(11)转化为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^D \quad (12)$$

将式(12)代入平衡方程式(1), 有

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + F_{bi} + F_{bi}^D = 0 \quad (13)$$

式中 F_{bi}^D ——由于损伤引起的附加体力

$$F_{bi}^D = \frac{\partial \sigma_{ij}^D}{\partial x_j} \quad (14)$$

将式(12)代入静力边界条件式(9), 有

$$\sigma_{ij}^0 l_j = F_i + F_i^D \quad \text{在 } S_p \text{ 上} \quad (15)$$

式中 F_i^D ——由于损伤引起的附加面力

$$F_i^D = -\sigma_{ij}^D l_j \quad (16)$$

式(13)与式(15)表明, 对于给定损伤场的应力分析问题, 可以通过引入附加体力与附加面力, 把问题转化为无损伤的情况加以解决。

2.2 附加载荷有限元法

根据上述给定损伤场的应力分析原理, 给出其相应的有限元解法——附加载荷有限元法。

引入常应变元, 由几何方程可将单元应变表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}_e \quad (17)$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}$ ——单元应变列阵

$\boldsymbol{\delta}_e$ ——单元节点位移列阵

\mathbf{B} ——单元几何矩阵

单元应力可通过本构关系式(11)表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta}_e + \boldsymbol{\sigma}^D \quad (18)$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}$ ——单元应力列阵

\mathbf{E} ——材料的弹性矩阵

$\boldsymbol{\sigma}^D$ ——由损伤引起的单元附加应力列阵

$$\boldsymbol{\sigma}^D = -D_e \mathbf{E}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta}_e \quad (19)$$

式中 D_e ——单元的损伤度

利用虚功原理, 单元节点力可表示为

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{k}_e \boldsymbol{\delta}_e - \mathbf{F}_e^D \quad (20)$$

式中 \mathbf{F}_e ——单元节点力列阵

\mathbf{k}_e ——单元的无损伤弹性刚度矩阵

$$\mathbf{k}_e = S_e \mathbf{B}^T \mathbf{E}\mathbf{B} \quad (21)$$

S_e ——单元面积

\mathbf{F}_e^D ——由损伤引起的单元附加节点力列阵

$$\mathbf{F}_e^D = D_e \mathbf{k}_e \boldsymbol{\delta}_e \quad (22)$$

令 $\boldsymbol{\delta}$ 为总体位移列阵, 则通过位移协调条件可以

建立单元位移列阵与总体位移列阵的关系

$$\delta_e = A_e \delta \quad (23)$$

式中 A_e ——协调矩阵

进一步, 根据虚功原理可以得出总体外力的表达式

$$F = k\delta - F^D \quad (24)$$

式中 F ——总体外力列阵

k ——总体的无损伤弹性刚度矩阵

$$k = \sum_e A_e^T k_e A_e \quad (25)$$

F^D ——由损伤引起的总体附加外力列阵

$$F^D = (\sum_e D_e A_e^T k_e A_e) \delta \quad (26)$$

整理式(24), 有

$$k\delta = F + F^D \quad (27)$$

由此可见, 给定损伤场的位移分析问题, 在引入附加外力列阵 F^D 后, 可以转化为无损伤的位移分析问题。

2.3 给定损伤场与应力场时的损伤演化分析

假设临界单元 e_i 的损伤度及其增长量分别用 $D(e_i)$ 与 $\Delta D(e_i)$ 表示, 某单元 x 的损伤度及其增长量分别用 $D(x)$ 与 $\Delta D(x)$ 表示, 则根据式(8), 有

$$\begin{aligned} \Delta D(x) = \Delta D(e_i) \{ [1 - D(e_i)] / [1 - D(x)] \}^{2p+2} \times \\ \{ \{ [\sigma_{Me}(x)]^{2p+2} - \sigma_{th0}^{2p+2} [1 - D(x)]^{(0.5+\nu)(2p+2)} \} / \\ \{ [\sigma_{Me}(e_i)]^{2p+2} - \sigma_{th0}^{2p+2} [1 - D(e_i)]^{(0.5+\nu)(2p+2)} \} \} \end{aligned} \quad (28)$$

2.4 预估裂纹扩展寿命的算法

如将 $(dD/dN)_i$ 视为单元 i 的绝对损伤演化率, 那么 $(dD/dN)_i / (1 - D_i)$ 就是单元 i 的相对损伤演化率。在一个损伤场中, 如果某个单元的相对损伤演化率较其他所有单元的都要大, 那么该单元必然损伤演化最快, 此单元即为临界单元。因此, 临界单元的判别准则可表示为

$$\max_{i \in [1, n]} \{ (dD/dN)_i / (1 - D_i) \} \quad (29)$$

式中 n ——单元个数

对于临界单元损伤度的每一次增长, 所需要的相应载荷循环次数可通过式(8)计算, 即

$$\begin{aligned} \Delta N = \Delta D / \{ \alpha / [(p+1)(2E)^{p+1} (1-D)^{2p+2}] \times \\ [\sigma_{Me}^{2p+2} - \sigma_{th0}^{2p+2} (1-D)^{(0.5+\nu)(2p+2)}] \} \end{aligned} \quad (30)$$

在具体预估裂纹扩展寿命时, 往往要从裂纹形成开始计算, 以便获得构件完整的损伤场。

假设所需计算的损伤单元个数为 m 。在算法中所使用符号的具体含义说明如下。

(1) 带括号上标表示损伤演化序列, 如 $\Delta D_0^{(1)}(e_1)$

中(1)表示第一个临界单元的损伤演化。

(2) 不带括号下标则为在一个临界单元的损伤演化过程中损伤步长的编号, 如 $\Delta D_0^{(1)}(e_1)$ 中 0 表示损伤演化的第一步。

(3) 右边括号表示构件的单元序列。

下面给出具体的算法。

步骤 1: 应用附加载荷有限元法, 对于具有初始损伤的构件, 分析相应的位移场、应变场和应力场, 分别以 $u_{i0}^{(1)}$ 、 $\varepsilon_{ij0}^{(1)}$ 和 $\sigma_{ij0}^{(1)}$ 表示之。并根据判别准则式(29)确定临界单元, 记为 e_1 。

步骤 2: 确定临界单元损伤度的增长量步长 $\Delta D_0^{(1)}(e_1)$ (该步长远小于 1, 下同)。由式(30)可确定相应的载荷循环次数为

$$\begin{aligned} \Delta N_0^{(1)} = \Delta D_0^{(1)}(e_1) / \{ \alpha / \{ (p+1)(2E)^{p+1} [1 - D_0^{(1)}(e_1)]^{2p+2} \} \times \\ \{ [\sigma_{Me0}^{(1)}(e_1)]^{2p+2} - \sigma_{th0}^{2p+2} [1 - D_0^{(1)}(e_1)]^{(0.5+\nu)(2p+2)} \} \} \end{aligned} \quad (31)$$

由式(28)确定任意单元的损伤度增长量为

$$\begin{aligned} \Delta D_0^{(1)}(x) = \Delta D_0^{(1)}(e_1) \{ [1 - D_0^{(1)}(e_1)] / [1 - D_0^{(1)}(x)] \}^{2p+2} \times \\ \{ \{ [\sigma_{Me0}^{(1)}(x)]^{2p+2} - \sigma_{th0}^{2p+2} [1 - D_0^{(1)}(x)]^{(0.5+\nu)(2p+2)} \} / \\ \{ [\sigma_{Me0}^{(1)}(e_1)]^{2p+2} - \sigma_{th0}^{2p+2} [1 - D_0^{(1)}(e_1)]^{(0.5+\nu)(2p+2)} \} \} \end{aligned} \quad (32)$$

步骤 3: 分析损伤场

$$\begin{cases} D_1^{(1)}(e_1) = D_0^{(1)}(e_1) + \Delta D_0^{(1)}(e_1) \\ D_1^{(1)}(x) = D_0^{(1)}(x) + \Delta D_0^{(1)}(x) \end{cases} \quad (33)$$

由此应用附加载荷有限元法分析损伤演化后的位移场、应变场与应力场, 并以 $u_{i1}^{(1)}$ 、 $\varepsilon_{ij1}^{(1)}$ 和 $\sigma_{ij1}^{(1)}$ 表示。

步骤 4: 确定临界单元损伤度的增长量步长 $\Delta D_1^{(1)}(e_1)$ 。由式(30)可确定相应的载荷循环次数为

$$\begin{aligned} \Delta N_1^{(1)} = \Delta D_1^{(1)}(e_1) / \{ \alpha / \{ (p+1)(2E)^{p+1} [1 - D_1^{(1)}(e_1)]^{2p+2} \} \times \\ \{ [\sigma_{Me1}^{(1)}(e_1)]^{2p+2} - \sigma_{th0}^{2p+2} [1 - D_1^{(1)}(e_1)]^{(0.5+\nu)(2p+2)} \} \} \end{aligned} \quad (34)$$

由式(28)确定任意单元的损伤度增长量为

$$\begin{aligned} \Delta D_1^{(1)}(x) = \Delta D_1^{(1)}(e_1) \{ [1 - D_1^{(1)}(e_1)] / [1 - D_1^{(1)}(x)] \}^{2p+2} \times \\ \{ \{ [\sigma_{Me1}^{(1)}(x)]^{2p+2} - \sigma_{th0}^{2p+2} [1 - D_1^{(1)}(x)]^{(0.5+\nu)(2p+2)} \} / \\ \{ [\sigma_{Me1}^{(1)}(e_1)]^{2p+2} - \sigma_{th0}^{2p+2} [1 - D_1^{(1)}(e_1)]^{(0.5+\nu)(2p+2)} \} \} \end{aligned} \quad (35)$$

步骤 5: 重复步骤 3 和步骤 4, 一直计算到 $D_{k_1}^{(1)}(e_1) = 1$ 为止。此时有

$$D_{k_1}^{(1)}(x) = D_{k_1-1}^{(1)}(x) + \Delta D_{k_1-1}^{(1)}(x) \quad (36)$$

由此应用附加载荷有限元法分析增加损伤后的位移场、应变场与应力场, 并以 $u_{ik_1}^{(1)}$ 、 $\varepsilon_{ijk_1}^{(1)}$ 和 $\sigma_{ijk_1}^{(1)}$ 表

示。第一个临界单元 e_1 完全损伤时的载荷循环次数, 即裂纹形成寿命, 为

$$N_1 = \sum_{i=0}^{k_1} \Delta N_i^{(1)} \quad (37)$$

步骤 6: 根据判别准则(29)确定第二个临界单元, 记为 e_2 。这时的损伤场就是上述裂纹形成所对应的损伤场, 即

$$\begin{cases} D_0^{(2)}(e_2) = D_{k_1}^{(1)}(e_2) \\ D_0^{(2)}(x) = D_{k_1}^{(1)}(x) \end{cases} \quad (38)$$

同样, 此时的位移场、应变场与应力场也分别是裂纹形成所对应的位移场、应变场与应力场, 即

$$\begin{cases} u_{i0}^{(2)}(x) = u_{ik_1}^{(1)}(x) \\ \varepsilon_{ij0}^{(2)}(x) = \varepsilon_{ijk_1}^{(1)}(x) \\ \sigma_{ij0}^{(2)}(x) = \sigma_{ijk_1}^{(1)}(x) \end{cases} \quad (39)$$

步骤 7: 确定临界单元损伤度的增长量步长 $\Delta D_0^{(2)}(e_2)$ 。由式(30)可确定相应的载荷循环次数为 $\Delta N_0^{(2)} = \Delta D_0^{(2)}(e_2) / \{ \alpha / \{ (p+1)(2E)^{p+1} [1 - D_0^{(2)}(e_2)]^{2p+2} \} \times \{ [\sigma_{Me0}^{(1)}(e_2)]^{2p+2} - \sigma_{th0}^{2p+2} [1 - D_0^{(2)}(e_2)]^{(0.5+\nu)(2p+2)} \} \}$

由式(28)确定任意单元的损伤度增长量为 $\Delta D_0^{(2)}(x) = \Delta D_0^{(2)}(e_2) \{ [1 - D_0^{(2)}(e_2)] / [1 - D_0^{(2)}(x)] \}^{2p+2} \times \{ \{ [\sigma_{Me0}^{(2)}(x)]^{2p+2} - \sigma_{th0}^{2p+2} [1 - D_0^{(2)}(x)]^{(0.5+\nu)(2p+2)} \} / \{ [\sigma_{Me0}^{(2)}(e_2)]^{2p+2} - \sigma_{th0}^{2p+2} [1 - D_0^{(2)}(e_2)]^{(0.5+\nu)(2p+2)} \} \}$

步骤 8: 重复类似步骤 3 和步骤 4 的步骤, 一直计算到 $D_{k_2}^{(2)}(e_2) = 1$ 为止。此时有

$$D_{k_2}^{(2)}(x) = D_{k_2-1}^{(2)}(x) + \Delta D_{k_2-1}^{(2)}(x) \quad (42)$$

由此应用附加载荷有限元法分析增加损伤后的位移场、应变场与应力场, 并以 $u_{ik_2}^{(2)}$ 、 $\varepsilon_{ijk_2}^{(2)}$ 和 $\sigma_{ijk_2}^{(2)}$ 表示。临界单元 e_2 完全损伤时的载荷循环次数为

$$N_2 = \sum_{i=0}^{k_2} \Delta N_i^{(2)} \quad (43)$$

步骤 9: 根据判别准则式(29)确定第三个临界单元, 记为 e_3 。采用类似的方法, 可以计算临界单元 e_3 完全损伤时的载荷循环次数 N_3 。

步骤 10: 重复以上步骤, 直到第 m 个临界单元 e_m , 其完全损伤时的载荷循环次数为 N_m 。

在进行裂纹扩展性能研究时, 构件的初始裂纹长度是已知的。首先, 根据已知的初始裂纹长度, 考虑构件的具体单元划分, 可以获取对应于该初始裂纹长度的单元序号; 然后, 把该单元作为初始临界单元, 只取该单元以后临界单元对应的载荷循环次数进行累加; 最后, 将累加后的疲劳寿命与相应

的裂纹扩展长度对应, 即可获得一系列的裂纹扩展尺寸与载荷循环次数的关系。此关系可称为 $a \sim N$ 曲线。

3 损伤参量拟合

为了确定损伤演化方程中的损伤参量, 考虑单轴重复加载情况下无应力集中光滑试样的疲劳曲线。此时, 由式(4)知 $\sigma_e = \sigma$, $\sigma_{Me} = \sigma_{max}$ 。若 $\sigma_{max} > \sigma_{th} > \sigma_{min} > 0$, 由式(6)可得损伤演化方程

$$\frac{dD}{dN} = \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{1}{2E} \right)^{p+1} \left(\frac{1}{1-D} \right)^{2p+2} (\sigma_{max}^{2p+2} - \sigma_{th}^{2p+2}) \quad (44)$$

假设构件初始损伤为 D_0 , 在 $[D_0, 1]$ 上积分 dD , 有

$$\int_{D_0}^1 (1-D)^{2p+2} dD = \frac{\alpha}{p+1} \left(\frac{1}{2E} \right)^{p+1} (\sigma_{max}^{2p+2} - \sigma_{th}^{2p+2}) N_f \quad (45)$$

式中 N_f ——试件从初始损伤 D_0 到完全损伤情形下所需的循环次数

整理式(45), 有

$$(\sigma_{max}^{2p+2} - \sigma_{th}^{2p+2}) N_f = K \quad (46)$$

式中

$$K = \frac{p+1}{2p+3} \frac{(2E)^{p+1} (1-D_0)^{2p+3}}{\alpha} \quad (47)$$

进一步, 相应的理论中值疲劳曲线可以使用下式表示

$$(\sigma_{max}^{2p+2} - \sigma_{thm}^{2p+2}) N_{fm} = K_m \quad (48)$$

式中

$$K_m = \frac{p+1}{2p+3} \frac{(2E)^{p+1} (1-D_{0m})^{2p+3}}{\alpha} \quad (49)$$

$$\sigma_{thm} = \sigma_{th0} (1-D_{0m})^{0.5+\nu} \quad (50)$$

式中 σ_{thm} ——中值疲劳曲线对应的应力门槛值

D_{0m} ——中值疲劳曲线对应的初始损伤大小
当 $D_0 = 0$ 时, σ_{th} 等于无初始损伤情况对应的应力门槛值 σ_{th0} , 此时疲劳曲线为理论理想疲劳曲线, 其表达式为

$$(\sigma_{max}^{2p+2} - \sigma_{th0}^{2p+2}) N_{f0} = K_0 \quad (51)$$

式中

$$K_0 = \frac{p+1}{2p+3} \frac{(2E)^{p+1}}{\alpha} \quad (52)$$

各损伤演化参量具体确定的过程如下。

首先, 通过中值疲劳曲线确定参数。根据一组中值疲劳试验数据 $(\sigma_{max_i}, N_{fm_i})$, 通过式(48)利用最小二乘法可拟合损伤参数 p 以及 K_m 的值。

其次, 假定疲劳试验数据最远点为 $(\sigma_{max}^*, N_{f0}^*)$,

此点对应于 $D_0 = 0$ ，故由式(51)可得

$$[(\sigma_{\max}^*)^{2p+2} - \sigma_{\text{th0}}^{2p+2}]N_{f0}^* = K_0 \quad (53)$$

由式(49)和式(52)可知

$$K_0 = \frac{K_m}{(1 - D_{0m})^{2p+3}} \quad (54)$$

由式(50)知

$$\sigma_{\text{th0}} = \frac{\sigma_{\text{thm}}}{(1 - D_{0m})^{0.5+\nu}} \quad (55)$$

将式(54)和式(55)代入式(53)，有

$$\left\{ (\sigma_{\max}^*)^{2p+2} - \left[\frac{\sigma_{\text{thm}}}{(1 - D_{0m})^{0.5+\nu}} \right]^{2p+2} \right\} N_{f0}^* = \frac{K_m}{(1 - D_{0m})^{2p+3}} \quad (56)$$

整理得

$$(\sigma_{\max}^*)^{2p+2} (1 - D_{0m})^{2p+3} - \sigma_{\text{thm}}^{2p+2} (1 - D_{0m})^{2p-\nu+2.5} = \frac{K_m}{N_{f0}^*} \quad (57)$$

在给定调节参数 ν 的情况下，式(57)中只有参数 D_{0m} 是未知的。求解式(57)，可以得到对应中值疲劳曲线的初始损伤 D_{0m} 。进一步将 D_{0m} 值代入式(54)和式(55)，可以确定 K_0 和 σ_{th0} 。

最后，根据式(52)，可知

$$\alpha = \frac{p+1}{2p+3} \frac{(2E)^{p+1}}{K_0} \quad (58)$$

将 p 和 K_0 代入式(58)，可得到损伤演化参量 α 。

通过上述过程，损伤演化方程式(8)中的损伤参量 α 、 p 和 σ_{th0} 以及初始损伤 D_{0m} 就被确定了。

4 算例

选取两种材料 LY12 铝合金板材^[8]与 LC4 高强度铝合金板材^[9,10]作为算例进行上述计算方法的验证。首先考虑 LY12。

根据 $S \sim N$ 曲线，拟合损伤演化方程中的参数值。手册提供了几组 $S \sim N$ 曲线，选用 $K_t = 1$ 时的数据进行参数拟合，并使用 $K_t = 2$ 时的数据进行参数验证。

(1) 在 $K_t = 1$ 时，手册中提供了 $R = 0.02$ 与 $R = 0.6$ 两组 $S \sim N$ 曲线。由于裂纹扩展试验是在 $R = 0.2$ 情况下进行的，所以需要 $R = 0.2$ 下的 (σ_{\max}, N) 数据。计算依据 $R = 0.02$ 与 $R = 0.6$ 情况下的等寿命曲线图(如图 1 所示)来完成，具体方法如下。

从等寿命示意图上可以看出，把 AB 段近似线性处理，可以得出如下比例关系式

$$\frac{\sigma_{a3} - \sigma_{a2}}{\sigma_{m2} - \sigma_{m3}} = \frac{\sigma_{a1} - \sigma_{a2}}{\sigma_{m2} - \sigma_{m1}} \quad (59)$$

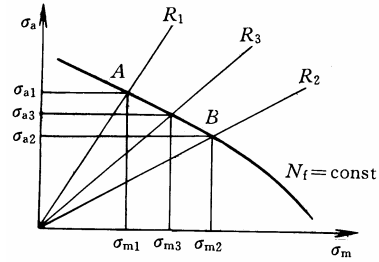


图 1 不同应力比下的等寿命示意图

根据疲劳试验中各参数关系，将平均应力与应力幅分别以应力比和最大应力表示，有

$$\begin{cases} \sigma_m = \frac{1-R}{2} \sigma_{\max} \\ \sigma_a = \frac{1+R}{2} \sigma_{\max} \end{cases} \quad (60)$$

使用式(60)，将式(59)用对应的应力比和最大应力表示，有

$$\frac{(1 - R_3)\sigma_{\max 3} - (1 - R_2)\sigma_{\max 2}}{(1 + R_2)\sigma_{\max 2} - (1 + R_3)\sigma_{\max 3}} = \frac{(1 - R_1)\sigma_{\max 1} - (1 - R_2)\sigma_{\max 2}}{(1 + R_2)\sigma_{\max 2} - (1 + R_1)\sigma_{\max 1}} \quad (61)$$

在式(61)中， R_1 、 $\sigma_{\max 1}$ 与 R_2 、 $\sigma_{\max 2}$ 已知，通过该式可求等疲劳寿命情况下特定应力比 R_3 所对应的 $\sigma_{\max 3}$ 。计算结果如表 1 所示。

表 1 LY12 的疲劳数据 ($K_t = 1, R = 0.2$)

| 最大载荷 σ_{\max} /MPa | 疲劳寿命 N /次 |
|---------------------------|-----------------|
| 193.2 | 6×10^5 |
| 183.8 | 8×10^5 |
| 177.6 | 1×10^6 |
| 163.6 | 2×10^6 |
| 147.4 | 1×10^7 |

根据手册，选取 $\sigma_{\text{thm}} = 147.4$ MPa 与最远点 $(215.7, 8 \times 10^5)$ ，拟合损伤演化方程中的参数。考虑 ν 值的不同对计算结果的影响，选择了 $\nu = 0.5$ 与 $\nu = 1.0$ 两种情况分别进行计算。计算结果如表 2 所示。

表 2 LY12 的损伤演化方程参数表

| 参数 ν | 参数 $2p+2$ | 参数 α | 损伤度 D_{0m} | 应力门槛值 σ_{th0} /MPa |
|----------|-----------|--------------------------|--------------|----------------------------------|
| 0.5 | 2.764 5 | $4.124 5 \times 10^{-6}$ | 0.128 0 | 169.04 |
| 1.0 | 2.764 5 | $4.538 3 \times 10^{-6}$ | 0.105 6 | 174.26 |

(2) 使用 $K_t = 2$ 时的数据进行上述参数的验证。在 $K_t = 2$ 时，参考文献[8]提供了 $\sigma_m = 70$ MPa 与

$\sigma_m = 210 \text{ MPa}$ 两组 $S \sim N$ 曲线。由特定平均应力情况下的疲劳数据来计算特定应力比的疲劳数据,也是依据等寿命图来完成的。根据等寿命图,可以得到针对某一个特定应力比在不同寿命下所对应的 (σ_m, σ_a) 数据,如图2所示。

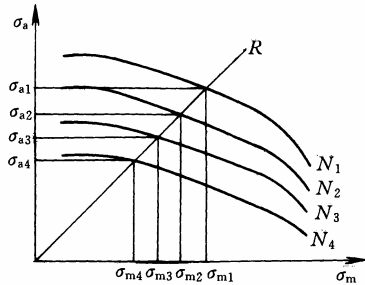


图2 由特定平均应力时的疲劳数据计算特定应力比下疲劳数据的等寿命示意图

这样,通过特定应力比下一系列的 (σ_m, σ_a) 数据,利用 $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$, 就可以获得其对应的一组 (σ_{\max}, N) 数据。计算的 $R = 0.2$ 下 (σ_{\max}, N) 数据如图3、4所示。

以下,针对 $K_t = 2$ 的情况,利用损伤力学—有限元法进行疲劳裂纹形成寿命的预估,并把相应的估算结果与试验获得数据进行比较。 $\nu = 0.5$ 与 $\nu = 1.0$ 两种情况的比较结果见图3。

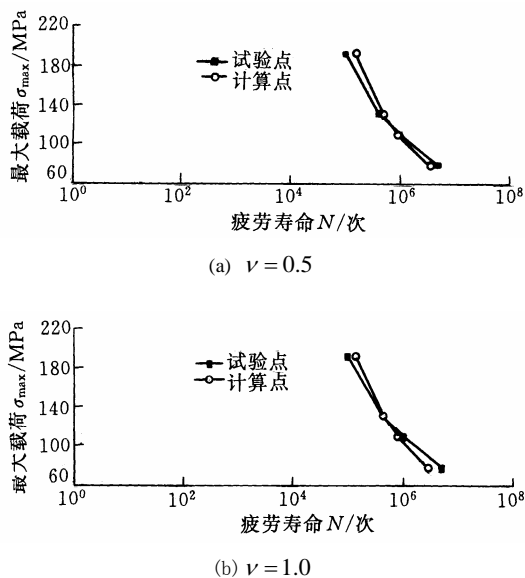


图3 LY12, $K_t = 2$ 试件计算与试验疲劳曲线比较

从图3可以看出,根据 $K_t = 1$ 时的疲劳数据拟合的损伤演化方程参数,利用损伤力学—有限元法计算出的 $K_t = 2$ 试件疲劳数据,两种 ν 值对应的计算结果与试验数据相比都基本吻合,可以证明上述拟合参数皆适用于疲劳计算。

基于上述拟合的损伤演化方程参数,利用裂纹扩展的损伤力学—有限元法进行计算,获取裂纹扩

展尺寸与载荷循环次数的关系,即 $a \sim N$ 曲线。

根据手册提供试件的尺寸,建立相应的有限元计算模型,如图4所示。

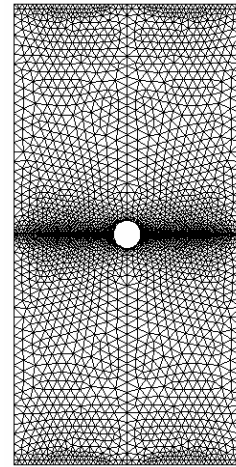


图4 裂纹扩展有限元计算模型

为了验证以上损伤力学方法的可行性,利用断裂力学方法由手册提供的试验数据及 Paris 公式拟合线,通过积分的方法计算出相应的 (a, N) 数据,并将由此所得之计算结果与由损伤力学所得之结果进行比较。 $\nu = 0.5$ 与 $\nu = 1.0$ 两种情况的比较结果如图5所示。

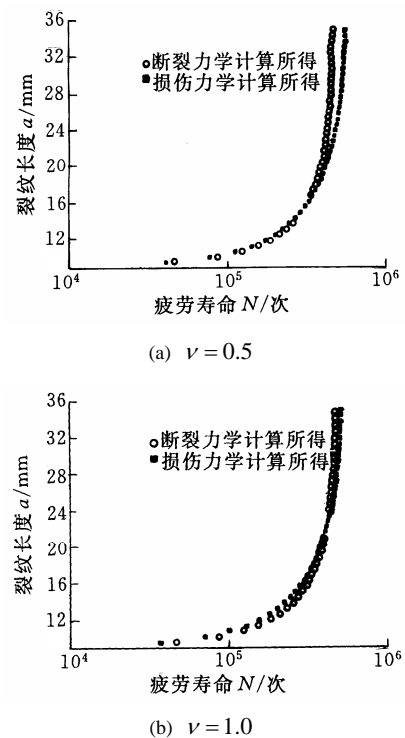


图5 LY12 裂纹扩展曲线比较

$\nu = 0.5$ 与 $\nu = 1.0$ 两种情况下损伤力学计算结果与断裂力学计算结果的误差见表3。

从图5以及表3可以看出,通过损伤力学—有

限元法计算的裂纹扩展结果与断裂力学计算结果相比，相对误差较小，完全处在工程计算许可范围之内。比较 $\nu=0.5$ 与 $\nu=1.0$ 两种情况，发现 $\nu=1.0$ 时计算结果与断裂力学计算结果误差更小，尤其是在裂纹扩展长度已经达到 34.8 mm 时，其相对误差仍然小于 10%。

表 3 LY12 裂纹扩展损伤力学计算结果与断裂力学计算结果的相对误差

| 裂纹扩展长度 a/mm | 相对误差($\nu=0.5$) $e_1/\%$ | 相对误差($\nu=1.0$) $e_2/\%$ |
|-------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 10.8 | 9.230 | 17.450 |
| 15.6 | 0.265 | 8.750 |
| 22.2 | 9.900 | 0.066 |
| 27.6 | 14.880 | 4.620 |
| 34.8 | 18.920 | 8.320 |

再对 LC4 高强度铝合金板材进行计算，计算步骤同 LY12。

使用前述疲劳数据处理方法，计算 $R=0.1$ 下的 (σ_{\max}, N) 数据。如表 4 所示。

表 4 LC4 的疲劳数据 ($K_t=1, R=0.1$)

| 最大载荷 σ_{\max}/MPa | 疲劳寿命 $N/\text{次}$ |
|---------------------------------|-------------------|
| 320 | 5×10^4 |
| 257 | 1×10^5 |
| 188 | 3×10^5 |
| 145 | 1×10^6 |
| 123 | 1×10^7 |

根据手册，选取 $\sigma_{\text{thm}}=123 \text{ MPa}$ 与最远点 $(250.2, 1.8 \times 10^5)$ ，拟合损伤演化方程中的参数。取 $\nu=0.5$ ，计算结果如表 5 所示。

表 5 LC4 的损伤演化方程参数表 ($\nu=0.5$)

| 参数 ν | 参数 $2p+2$ | 参数 α | 损伤度 D_{0m} | 应力门槛值 $\sigma_{\text{th}}/\text{MPa}$ |
|----------|-----------|--------------------------|--------------|---------------------------------------|
| 0.5 | 2.582 6 | $7.002 3 \times 10^{-6}$ | 0.118 2 | 139.49 |

同样，给出 $K_t=2$ 时的参数验证。将损伤力学—有限元法所得之疲劳裂纹形成寿命估算结果与由疲劳试验获得数据进行比较，如图 6 所示。

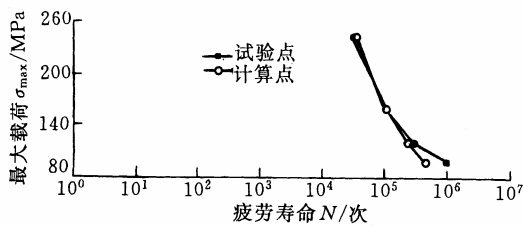


图 6 LC4, $K_t=2$ 试件计算与试验疲劳曲线比较 ($\nu=0.5$)

由图 6 可以看出，对于 LC4 而言，将 ν 值取为 0.5，所得计算结果与试验结果也是一致的。

采用与 LY12 同样的有限元模型，计算 LC4 的裂纹扩展性能。计算结果与试验比较以及相对误差分别见于图 7 和表 6。

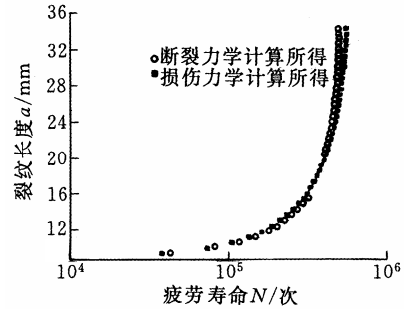


图 7 LC4 裂纹扩展曲线比较 ($\nu=0.5$)

表 6 LC4 裂纹扩展损伤力学计算结果与断裂力学计算结果的相对误差

| 裂纹扩展长度 a/mm | 相对误差 $e_r/\%$ |
|----------------------|---------------|
| 10.8 | 9.69 |
| 15.0 | 4.00 |
| 18.6 | 0.09 |
| 25.2 | 5.73 |
| 34.2 | 9.86 |

从图 7 和表 6 可以看出，在 $\nu=0.5$ 时，通过损伤力学—有限元法计算的 LC4 裂纹扩展结果与断裂力学计算结果相比，相对误差已非常小，在工程许可的误差范围之内。

从以上两例可以发现，在 $\nu=0.5$ 情况下计算的裂纹扩展数据已经能够满足工程需要。同时，可以通过优化 ν 值的大小，来达到更高的工程要求。

5 结论

利用裂纹形成阶段的疲劳寿命试验数据，拟合损伤演化方程中的损伤参量。然后，通过损伤力学—有限元法，计算同样条件下的裂纹扩展，获得反映扩展性能的 (a, N) 数据。最后，通过比较计算结果与裂纹扩展试验数据，验证了整个分析计算过程的可行性，从而改变了裂纹形成与裂纹扩展两者被单独处理的现状，使其成为一个完整统一的分析过程。

参 考 文 献

- 1 Bannantine J A, Comer J J, Handrock J L. Fundamentals of Metal Fatigue Analysis. New Jersey: Prentice Hall Englewood Cliffs, 1990
- 2 徐灏. 疲劳强度. 北京: 高等教育出版社, 1988
- 3 姚卫星. 结构疲劳寿命分析. 北京: 国防工业出版社, 2003
- 4 Broek D. Elementary Engineering Fracture Mechanics.

Leyden: Noordhoff International Publishing, 1974

- 5 张行. 断裂力学. 北京: 宇航出版社, 1990
- 6 余寿文, 冯西桥. 损伤力学. 北京: 清华大学出版社, 1997
- 7 张行, 赵军. 金属构件应用疲劳损伤力学. 北京: 国防工业出版社, 1998
- 8 高镇同, 蒋新桐, 熊峻江, 等. 疲劳性能试验设计和数据处理. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1999
- 9 吴学仁. 飞机结构金属材料力学性能手册(第 1 卷, 静强度, 疲劳、耐久性). 北京: 航空工业出版社, 1996
- 10 吴学仁. 飞机结构金属材料力学性能手册(第 2 卷, 损伤容限). 北京: 航空工业出版社, 1996

NUMERICAL METHOD FOR CRACK EXTENSION ANALYSIS BASED ON FA- TIGUE CRACK FORMATION CURVE

Yang Jiyun Zhang Xing

*(Institute of Solid Mechanics, Beijing University of
Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)*

Zhang Min

*(The 31st Research Institute, China Aerospace
Science and Industry Corporation, Beijing 100074)*

Abstract: Two phases, fatigue crack initiation and extension, are rightly associated by damage mechanics method. Based on material parameters in the damage evolution equation computed by means of fatigue curve in the crack initiation process, the relation between crack length and fatigue life in the crack extension process may be obtained by the damage mechanics-finite element method. The above two phases being separately dealt in existing researches are brought into a uniform theoretical frame. By the damage mechanics-finite element method, if one of two sets of test data in crack initiation process and crack extension process is known, another one is acquired. Then, the work of test to obtain fatigue properties are reduced and the handbook of material behavior would be complemented by additional data computed by this method.

Key words: Damage mechanics Fatigue curve

Crack extension Finite element method

作者简介: 杨继运, 男, 1975 年出生, 博士研究生。研究方向为断裂力学与损伤力学。

E-mail: yhahay@sina.com