

局部投影算法及其在非线形时间序列分析中的应用

徐金梧 吕 勇 王海峰

(北京科技大学机械工程学院 北京 100083)

摘要: 引入了非线性时间序列的局部投影消噪算法。该算法将时间序列先进行相重构, 在高维的相空间上采用局部投影的方法将相空间分解成正交的子空间, 来分离时序中不同的分量。通过 Lorenz 模型的数值仿真分析, 证实了该算法在消除非线性时间序列中随机噪声的效果。此外还讨论了局部投影算法在提取微弱特征信号中的应用。

关键词: 局部投影 消噪 弱特征信号 非线性时间序列

中图分类号: TP206 TH133

0 前言

非线性动力学的研究目前主要通过解析方法或数值计算方法来研究确定性系统在相空间中的奇点, 奇点的形态和奇点的稳定性, 不同参数和初始条件对系统长期行为的影响。这类问题属于正问题, 即以系统的数学物理方程为基础来研究确定性系统的动力学行为。但在工程中大量需要研究的是逆问题, 因为事先很难对某些工程问题建立一个确定的数学模型, 所能获得的只是一些描述系统在不同状态下、不同时间和空间点的动力学行为的时间序列。从本质上讲, 这些时间序列具有非线性时间序列的特征, 所以需要研究非线性时间序列分析方法。

一般来说, 机械设备都是复杂的非线性系统。当设备出现故障时, 系统的状态会发生变化, 这些变化通常可以从设备上所测到的时间序列上反映出来。但在多数的情况下, 由于故障所引起的时间序列的微弱变化被淹没在强背景信号中, 尤其是在设备出现早期故障时, 这种微弱的变化很难被识别出来。传统的时间序列分析方法和信号处理方法都是基于线性系统的, 这样由于故障所引起的微弱特征信号往往作为噪声被滤掉。

将非线性时间序列通过相重构, 在高维的相空间上利用局部投影算法将背景信号, 特征信号和噪声分解到不同的子空间上, 利用子空间的重构, 分离出背景信号, 特征信号, 同时抑制时间序列中的随机噪声分量以凸显消除噪声和分解背景信号及特征信号的目的。

1 局部投影算法基本原理

非线性时间序列分析方法是 20 世纪 90 年代逐步形成的。1990 年 Tony 等提出非线性的 ARMA 模型^[1], Tuffillaro、Artuso^[2,3]等解释了非线性时间序列中计算分形维数、熵、Lyapunov 指数的各种算法, Kanty、Schreiber^[4]等将非线性时间序列分析的各种算法编写成 C 和 FORTRAN 语言, 屈梁生教授研究了设备早期故障振动信号状态变化特征^[5], 吕志民、徐金梧^[6,7]等研究了混沌振子在微弱特征信号检测方法和非线性信号处理方法。

对于任一时间序列 $\{x_i\} (i \in N)$ 可以重构一个 m 维的相空间, 已经证明重构后 m 维相空间与系统动力学行为是微分同胚的, 即重构的相空间具有与系统同样的动力学特征。重构的相空间可以表示为

$$X_n = (x_{n-(m-1)\tau}, x_{n-(m-2)\tau}, \dots, x_n) \quad (1)$$

式中 X_n ——第 n 个相点, 表示 m 维相空间的一个态

m ——嵌入维的维数

τ ——延滞时间

假若系统是确定的, 在理想的无噪声情况下, 那么 x_n 存在下面的近似的估计值

$$x_n = F(x_{n-m}, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) \quad (2)$$

式(2)表示 m 维相空间的映射关系, 式(2)也可以表示为

$$\bar{F}(x_{n-m}, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0 \quad (3)$$

当存在噪声时, 系统实际测到的值

$$s_n = x_n + \delta_n$$

式中 δ_n ——噪声

有噪声情况下，式(3)可表示为

$$\hat{F}(s_{n-m}, \dots, s_{n-1}, s_n) = 0 \quad (4)$$

式(2)在 X_n 点邻域的线性化展开式为

$$a^n R(X_n - \bar{X}^n) = 0 + \theta(\|X_n - \bar{X}^n\|^2) \quad (5)$$

式中 $\theta(\|X_n - \bar{X}^n\|^2)$ ——高阶误差

$$\bar{X}^n = |\mu_n|^{-1} \sum_{n \in \mu_n} X_{n'} \quad \text{——在 } X_n \text{ 邻近域 } \mu_n \text{ 内相点的}$$

质心

R ——对角权重矩阵

R 的作用主要抑制相点的第一个元素和最后一个元素所产生的畸变，保留最稳定的中间元素项， a^n 为方向矩阵。同理，在存在噪声的情况下，式(4)在 S_n 点邻近域的线性化展开为

$$a^n R(S_n - \bar{S}^n) = \eta_n \quad (6)$$

式中 η_n ——噪声总和

式(6)表明在 m 维相空间中，存在一个超平面，相点与超平面的偏差代表了噪声部分。在这个 m 维相空间中，由系统动力学所形成的吸引子只局限于一个低维的子空间 m_0 中，吸引子 m 维数是由吸引子的分形维数确定的。也就是说，在无噪声情况下，相空间中存在着零子空间 $Q = m - m_0$ 。当存在噪声时，吸引子所占据的子空间不会延伸到零子空间中，零子空间中的分量必定是由噪声产生的。局部投影消噪算法的基本原理就是找出这个零子空间，然后在时间序列去掉这部分噪声成分。

假设零子空间是 Q 维的，那么只需要找出 Q 个正交的矢量 a^q ($q = 1, 2, \dots, Q$) 使得 $R(S_n - \bar{S}^n)$ 在

这些矢量上的局部投影为最小值。设 $Z_n = R(S_n - \bar{S}^n)$ ， Z_n 在零子空间的投影为 $\sum_{q=1}^Q a^q (a^q \cdot Z_n)$ ，其中 a^q 为归一化矢量。由于投影是局限相点 S_n 邻近域 μ_n 内，选择合适的 a^q 使 $\sum_{n \in \mu_n} [\sum_{q=1}^Q a^q (a^q \cdot Z_n)]^2$ 为最小。由于 a^q 为正交矢量， $a^q \cdot a^{q'} = 0$ ， $q \neq q'$ 。如果引入拉格朗日乘子 λ^q ，且有 $\|a^q\| = 1$ ，则最小化拉格朗日算子

$$L = \sum_{n \in \mu_n} \left\{ \sum_{q=1}^Q a^q \cdot [a^q \cdot Z_n'] \right\}^2 - \sum_{q=1}^Q \lambda^q (a^q \cdot a^q - 1) \quad (7)$$

对于每个独立的 q ，有

$$C a^q - \lambda^q a^q = 0 \quad q = 1, \dots, Q \quad (8)$$

式中 C ——矢量 Z_n' 在邻近域 μ_n 内 $m \times m$ 阶协方差矩阵

$$C_{ij} = \sum_{n \in \mu_n} [Z_{n'}]_i [Z_{n'}]_j \quad (9)$$

从方程式(8)中可以求出 C 矩阵的特征矢量 a 及特征值 λ 。从理论上讲，这 Q 个最小的特征值所对应的特征矢量是由噪声引起的分量，应当从所测得的时间序列中减去这个分量

$$\hat{S}_n = S_n - \sum_{q=1}^Q a^q (a^q \cdot Z_n) \quad (10)$$

局部投影消噪算法最终形式为

$$\hat{S}_n = S_n - R^{-1} \sum_{q=1}^Q a^q [a^q \cdot R(S_n - \bar{S}^n)] \quad (11)$$

表 Lorenz 系统加噪的信号降噪前后维数对比

嵌入维数 信噪比/dB	3		4		5		6	
	降噪前	降噪后	降噪前	降噪后	降噪前	降噪后	降噪前	降噪后
∞	1.58	1.58	1.61	1.61	1.63	1.63	1.64	1.64
17.9	2.66	1.43	3.37	1.48	4.05	1.60	4.76	1.63
11.9	2.90	1.45	3.77	1.61	4.64	1.70	5.60	1.73
8.4	2.90	1.55	3.86	1.68	4.85	1.76	5.85	1.82
5.9	2.94	1.64	3.83	1.79	4.66	1.88	5.20	1.97
3.9	2.83	1.59	3.87	1.69	4.83	1.80	5.70	1.86
2.4	3.00	1.59	3.91	1.72	4.70	1.81	4.87	1.90
1.0	2.97	1.66	3.88	1.83	4.39	1.96	6.38	2.06
-0.1	2.93	1.59	3.76	1.71	4.67	1.79	5.22	1.88
-1.2	2.99	1.66	3.84	1.77	4.82	1.90	6.89	2.00

2 局部投影消噪算法的步骤

局部投影算法是将 m 维相空间分解成两个正交的子空间，系统吸引子由若干个最大的特征值对应的特征矢量所张成。而剩余的较小的特征值所张成的零子空间是由于噪声引起，这部分分量应从信号

中减去。局部投影消噪算法的步骤如下。

- (1) 选定嵌入维数 m ，延滞时间 τ ，确定 R 矩阵 $R_{11} = R_{mm} = 10^3$ ，其余 $R_{ii} = 1$ 。重构 m 维相空间。
- (2) 给定邻域半径 r ，找出每个相点在邻域内的所有邻近点，并计算邻域的质心。
- (3) 根据式(9)计算每个相点的协方差矩阵 C 。
- (4) 用标准的软件求出 C 矩阵的特征矢量和特

征值。

(5) 选定若干最大的特征值作为描述吸引子所需的子空间，剩余较小特征值所对应的特征矢量作为噪声部分。

(6) 按照式(11)对实际信号进行修正，消除噪声部分。

(7) 返回到(2)，直到所有相点都处理完毕后退出。

3 仿真试验分析

Lorenz 方程是典型的非线性动力学问题。考虑下面的方程，方程中的变量均为量纲一。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \delta(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -bz + xy \end{aligned}$$

式中 x —— 对流强度

y —— 对流引起的水平温差

z —— 与垂直温差有关的变量

δ —— 普朗特数

r —— 瑞利数

b —— 与容器大小有关的参数

取 $\delta = 10, b = 8/3, r = 28$ ，采样频率 100 Hz，采用四阶 R-K 积分算法计算 Lorenz 模型。图 1 表示前 40 s 时 x 随时间变化的情况。显然，该时间序列呈现混沌特征。在无噪声情况下，Lorenz 模型的相空间重构如图 2 所示，存在明显的吸引子，其分形维数为 1.63。在原时间序列上加上不同信噪比的白噪声作为检验局部投影算法消噪效果。图 3 和图 4 表示不同信噪比的含噪信号和消噪后信号的比较。下表给出不同信噪比的消噪效果。

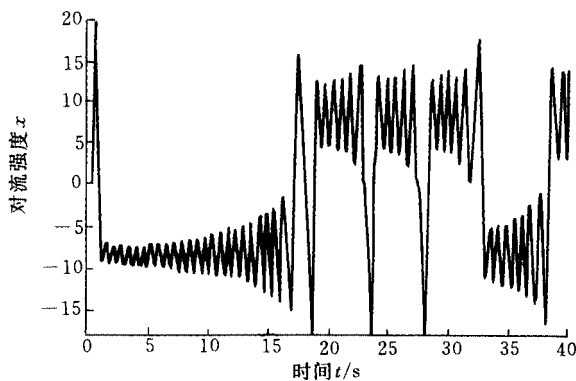


图 1 Lorenz 信号前 40 s 时 x 随时间变化

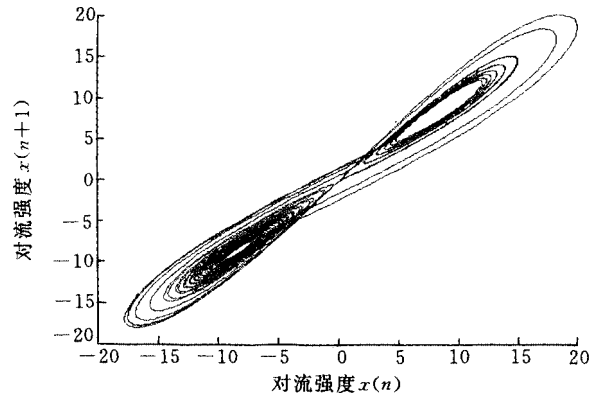
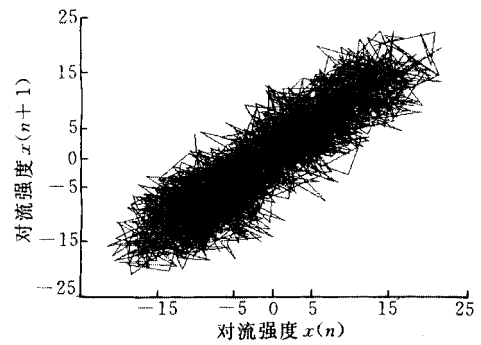
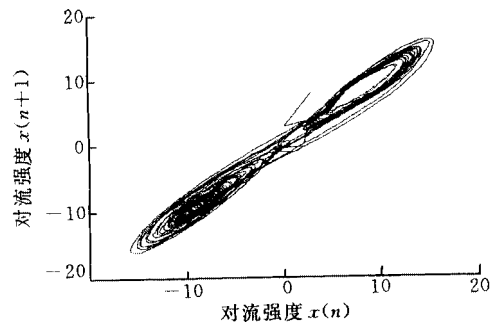


图 2 未加噪声前的 Lorenz 信号重构相图



(a) 信噪比为 8.4 dB 的信号



(b) 信噪比为 8.4 dB 的降噪信号

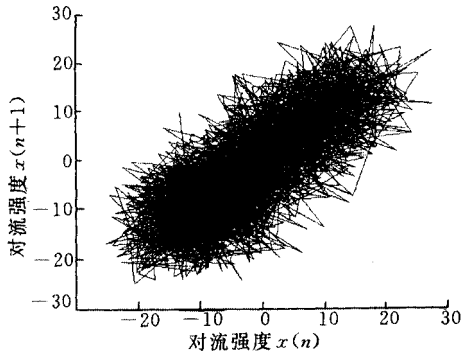
图 3 信噪比为 8.4 dB 的含噪信号和消噪后信号

4 局部投影算法用于微弱特征信号检测

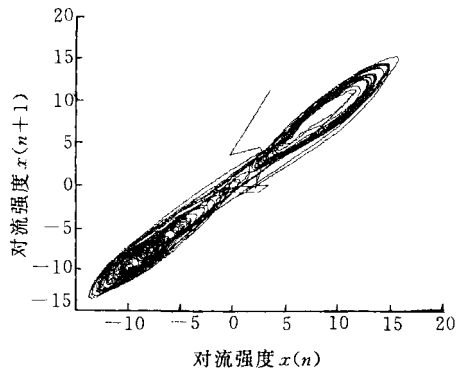
设备出现早期故障时，由故障所造成的特征信号往往很微弱，它被淹没在强的背景信号中，局部投影算法实际上是将时间序列所拓展的 m 维相空间划分成不同的子空间，特征值较大的那部分主要是由时序中占主要成份的信号，而特征值较小的那部分是由微弱信号和随机噪声组成。由于随机白噪声在相空间中的分布呈等半径超球体，可以通过几次局部投影法将背景信号、微弱周期信号和随机噪声区分开。可以采用两种不同的方式来实现信号的分离。

第一种方案：先取较大的 m_0 ，这时第一次采用

局部投影算法去除了随机噪声部分，保留了背景信号和弱周期信号部分，第二次采用局部投影算法时，取较小的 m_0 ，这时将特征值较小部分的分量视为弱周期信号，特征值较大部分的信号为背景信号，这种方案的流程图如图 5 所示。



(a) 信噪比为 3.9 dB 的信号



(b) 信噪比为 3.9 dB 的降噪信号

图 4 信噪比为 3.9 dB 的含噪信号和消噪后信号

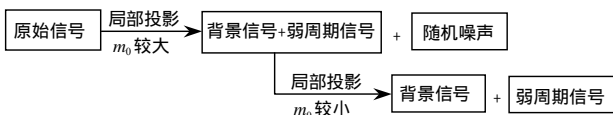


图 5 检出弱周期信号的第一种方案

第二种方案：先取较小的 m_0 ，这种情况下，第一次局部投影算法只是将背景信号与弱周期信号和随机噪声分离开。保留特征值较小的那部分信号，进行二次局部投影，去掉随机噪声部分，剩余的分量就是弱周期信号，第一次局部投影中，特征值较大部分的信号为背景信号，图 6 表示第二种方案的流程图。

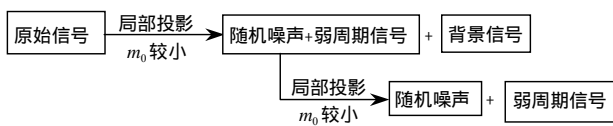


图 6 检出弱周期信号的第二种方案

下面仍以 Lorenz 模型为例，在原信号中叠加弱周期信号及随机噪声 $\cos 2\pi f_0 t + 0.5 \text{ rad}$ ，其中 $f_0 = 4 \text{ Hz}$ 。图 7 表示由第一种方案所检出的弱周

期信号的功率谱图，图 8 表示由第二种方案所检出的弱周期信号的功率谱图。

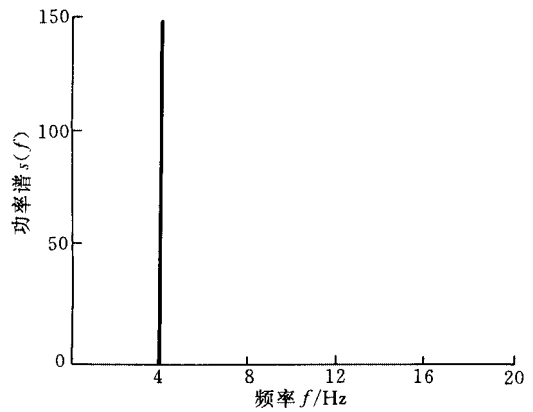


图 7 第一种方案所检出的弱周期信号

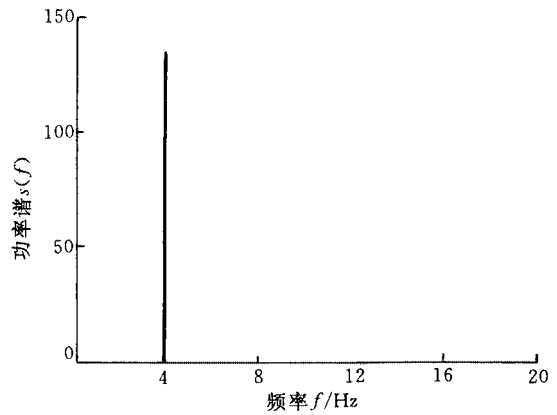


图 8 第二种方案所检出的弱周期信号

需要指出：在实际使用局部投影算法检出弱周期信号时，可以采用多次局部投影算法来抽取不同强度的弱周期信号。与其他传统的信号滤波算法，如带通滤波，自适应滤波等混合使用，会起到更好的效果。

5 讨论

在应用局部投影算法时，有几点需要考虑。

(1) 选择合适的嵌入维数 m 、延滞量 τ 和 m_0 。
 m 取值过小不能完备地刻画流形中吸引子的形态，因此使吸引子产生畸变，这样会使消噪后的主信号产生畸变。 m 取值过大不仅会影响算法的效率，而且会在邻近域内寻找邻近点的个数时带来困难。 m_0 取决于主吸引子的分形维数。原则上， m 要满足 $m > 2m_0 + 1$ 。延滞量 τ 的选择取决于嵌入维各分量之间的相关维数，相关维数越小说明所选择的 τ 越能反映吸引子的形态。实际应用中，可以采用试凑法，选择不同的 m 、 m_0 和 τ 比较消噪和特征信号提取效果。

(2) 局部投影算法是基于时序中噪声分量远小于主信号情况下推导出来的。当随机噪声很强, 特征信号可能淹没在噪声中, 这时由高维重构相空间所构画的吸引子为一个 m 维的超椭球体, 长轴部分代表时序中的周期成分, 短轴部分表示随机噪声部分。一般情况下随机白噪声在 m 维相空间中呈超球体。如果噪声过大, 长轴与短轴变化很小, 即 C 矩阵的特征值之间差别不大, 这时应分几步实施局部投影, 逐步消除随机噪声部分, 最后提取出所需的特征信号。

(3) 局部投影算法将一维的时间序列拓展到高维的相空间, 这使一维时序中不宜识别的特征, 比如拟周期信号和混沌信号在高维的空间被发现, 这样大大提高信息的含量, 所以它比传统的时序分析和信号处理方法更有效。但在实际使用中, 将不同的时序分析方法以及传统的信号处理方法混合使用会取得更好的效果。

6 结 论

(1) 局部投影算法将一维的时间序列延拓到高维的相空间, 使得一维时序中不易识别的特征在高维的相空间呈现为容易识别的吸引子。这种变换提高了时序中的信息含量。

(2) 局部投影算法具有良好的适用性和运算效率, 不仅适用于线性系统, 还适用于非线性系统; 不仅可以用于消噪还可以用于微弱特征信号的提取。

(3) 合理使用局部投影算法还可以将信号分解成不同的子空间, 从而提取不同类型的信号。

参 考 文 献

- 1 Tong H. Non-linear Time Series Analysis. Oxford: Oxford University Press, 1990
- 2 Tufillaro N B, Abbott T, Reilly J. An Experimental Ap-

proach to Nonlinear Dynamics and Chaos. Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1992

- 3 Artuso R. Recycling of strange sets, I and II. Nonlinearity, 1990(3): 325~361
- 4 Kanty H, Schreiber T. Nonlinear Time Series Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1997
- 5 Qu Liangsheng, Lin Jing. A difference resonator for detecting weak signals. Measurement, 1999(26): 69~77
- 6 吕志民, 徐金梧, 翟绪圣. 分形维数及其在滚动轴承故障诊断中的应用. 机械工程学报, 1999, 35(2): 88~91
- 7 吕志民, 徐金梧, 杨得斌. 基于奇异谱的降噪方法在齿轮故障诊断中的应用. 振动工程学报, 1998(11): 95~99

LOCAL PROJECTIVE METHOD AND IT'S APPLICATION ON NONLINEAR TIME SERIES

Xu Jinwu Lü Yong Wang Haifeng

(Beijing University of Science and Technology)

Abstract: A local projective noise reduction for nonlinear time series is here introduced. First, one would reconstruct the time series using delay coordinates. In the high dimensional phase space, the local projective algorithm is used to separate it into different components in the time series by dividing the phase space into orthogonal sub-spaces. Though numerical simulations of Lorenz model, it is proved that the algorithm has an excellent effect on removing random noise in nonlinear time series. Furthermore, two algorithms of extracting weak feature signals from a time series are discussed.

Key words: Local projective Noise reduction

Weak feature signals Nonlinear time series

作者简介: 徐金梧, 男, 1949 年出生, 教授, 博士生导师。主要从事设备故障诊断理论与方法的研究。先后承担多项国际合作、国家科技攻关和国家自然科学基金项目, 发表论文 100 多篇。