

# 螺旋锥齿轮齿面的三坐标测量\*

王 军 王小椿 姜 虹

(西安交通大学数控技术研究所 西安 710049)

李润方 冯文军

(重庆大学)

摘要: 在三坐标测量机上精确测量螺旋锥齿轮真实齿面的结构参数是定量评价其齿面几何质量的关键, 是齿轮加工机床参数修正的基础。根据建立的理论齿面模型, 在齿面的旋转投影面上进行测量网格规划, 得到网格节点的坐标和法线方向。由测量点数据, 测量程序控制测针自动进行测量, 从而测得真实齿面的结构参数。

关键词: 螺旋锥齿轮 齿面测量 三坐标测量机

中图分类号: TH132

## 0 前言

螺旋锥齿轮是汽车、飞机及许多机械设备中重要的传动部件。然而由于其齿面结构极其复杂, 一般的齿轮量仪无法对其进行定量的检测。传统的检测方法主要依靠配对滚动检验, 观察接触区的大小和位置, 凭耳朵听齿轮副的噪声。这种检验方法虽然能在一定程度上控制齿轮副的啮合质量, 但在一定程度上取决于检验人员的主观判断, 而且检验结果对齿轮副基础曲线的修正、误差来源的分析和啮合质量的提高没有太大的指导意义。故在生产实践中切齿机床的小调整基本只能用于保证接触区的位置, 对齿面二阶和三阶接触特性的修正就具有很大的盲目性, 修正效果很难尽人意。

要做到能够特异性地识别切齿误差来源, 从而使齿面啮合质量得到本质上的提高, 首先必须知道实际的齿面结构参数。目前唯一现实的方法就是在计量级三坐标测量机或齿轮测量机上, 按预定的遍布全齿面的网格测量网格结点处的齿面坐标, 再通过适当的软件处理, 得到网格结点处的法向偏差, 进而求得差曲面的几何参数, 并运用误差相关性识别技术, 求得最佳切齿修正方案。

要完成齿面三坐标测量, 就必须解决齿面三坐标测量网格的生成、三坐标测量规化和测量数据的处理这几个方面的问题, 下面分别加以阐述。

## 1 齿面测量网格的生成

### 1.1 测量网格的规划

螺旋锥齿轮的齿面是复杂的空间曲面, 为了得到均匀地遍布全齿面的测量网格, 通常要在一个与齿面上的点一一对应的一个平面映像中进行网格规划。为了便于规划, 还要求齿面的四个主要边界, 即齿面与面锥、根锥、前锥和背锥面的交线在映像中均为直线。满足这些要求的最简单的拓扑映像就是齿面在轴截面上的旋转投影, 此时齿面的四条主要边界就是面锥、根锥、前锥和背锥轴截面的交线。

网格的上、下边界分别与面锥及根锥和轴截面的交线平行, 并适当向里收缩。其中齿顶处的收缩量只要大于齿顶倒角即可, 而齿根处的收缩量必须大于测头半径及过渡曲线高度。若刀齿齿顶有凸角, 还应大于凸角的长度。沿齿廓方向的网格线全部与背锥平行, 其左、右边界适当向里收缩。有了测量网格相互平行的左、右边界, 即可根据网格沿齿长方向的测量点数在轴截面上作出一组等距平行线, 它们就是沿齿廓方向的网格线。然后按照沿齿廓方向的测量点数将网格的左右边界线段等分, 并将对应点相连, 即得测量网格的轴截面投影, 如图 1 所示。在轴截面中, 每一网格节点的坐标可以用  $r = r(i, j)$  和  $z = z(i, j)$  来表示, 其中  $i$  为沿齿廓方向的指标,  $j$  为沿齿长方向的指标。

### 1.2 网格坐标点的计算

在不考虑二次包络的情况下(正常工作的螺旋锥齿轮齿面是不允许这一现象存在的), 产形面与齿面通过啮合方程也存在一一对应关系, 即给定产形面上的一点, 通过求解啮合方程, 可以得到唯一

\* 高等学校实验室访问学者基金资助项目。20020308 收到初稿, 20030130 收到修改稿

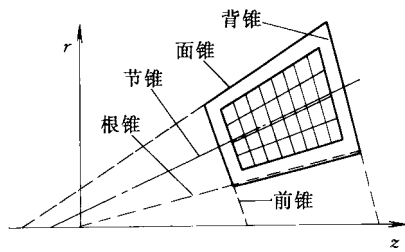


图1 旋转投影面上的齿面网格规划

的一个齿面上的点。对于 Gleason 制螺旋锥齿轮，其产形面为圆锥面。用  $C_t$  表示摇盘转角为 0 时刃锥面锥顶的矢量， $Q$  表示刀盘的单位轴线矢量， $a$  和  $b$  分别为两个垂直于  $Q$  并相互垂直的单位矢量， $r_c$  为刀盘刃锥面上一点的半径， $\theta$  表示该点在  $(a, b, Q)$  中的极角， $O$  点为机床中心，该点在机床坐标系下的位置矢量和单位法线矢量为

$$X = C_t \pm r_c Q / \tan \alpha + r_c (a \cos \theta + b \sin \theta)$$

$$n = \mp (\cos \alpha \theta + \sin \alpha b \theta) \cos \alpha + Q \sin \alpha$$

式中  $\alpha$ ——刀盘压力角

" $\mp$ ", " $\pm$ "——上面的符号用于内刃锥面，下面的符号用于外刃锥面

设摇盘须绕其轴线转过  $\varphi_m$  角使上述点成为接触点，该转角可由啮合方程直接求解得到。根据展成运动中业已确定的产形面与齿坯间地相对运动关系，即可求得齿坯转角  $\varphi_w$ 。对于不采用滚切修正机构的机床， $\varphi_m = u\varphi_w$ ， $\varphi_w$  值可立即求得。对于采用滚切修正机构的机床

$$\varphi_m = u\varphi_w + 2C(\varphi_w)^2 + 6D(\varphi_w)^3$$

可通过求解高次方程或直接迭代的方法求得  $\varphi_w$ 。由此可知  $\varphi_m$  和  $\varphi_w$  都是  $r_c$  和  $\theta$  的函数。

用  $L$  表示机床中心到齿坯根锥顶点的矢径，这在原始位置时齿面上对应点的径矢为

$$R_w = [X \cdot R(a_m, \varphi_m) - L]R(a_w, -\varphi_w)$$

式中  $a_m, a_w$ ——摇盘和工件轴线的单位矢量

不必经过坐标变换，即可在机床坐标系下直接求得齿面上该点在其轴截面中的旋转投影

$$\begin{cases} z = a_w \cdot R_w \\ r = |a_w \times R_w| \end{cases}$$

为了得到与  $r(i, j)$  和  $z(i, j)$  对应的齿面上的点，

用差分代替导数，求得  $\frac{\partial r}{\partial r_c}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial r_c}$ 、 $\frac{\partial r}{\partial \theta}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial \theta}$  后，

即可用牛顿法求得  $\Delta r_c$  和  $\Delta \theta$ 。令  $r_c + \Delta r_c \rightarrow r_c$ ， $\theta + \Delta \theta \rightarrow \theta$ ，重复以上过程，直至  $|\Delta r| < \varepsilon$ ， $|\Delta \theta| < \varepsilon$ 。然后通过坐标变换，将  $R_w$  变换到与工件固联的坐标系中，即可求得齿面上第  $i$  行第  $j$  列网格节点的坐标。

在原始位置时工件齿面上该点的法线矢量为

$$n_w = [nR(a_m, \varphi_m)]R(a_w, -\varphi_w)$$

再经过一次坐标变换，即得与工件固联的坐标系中该点的法线矢量。

## 2 齿面的三坐标测量方法

### 2.1 齿面测量定位

螺旋锥齿轮的定位基准通常有两种，即大平面加短圆柱基准和长圆柱基准加小平面。其中第一种方法多用于被动齿轮，第二种定位方式多用于主动轮。为了提高定位精度，对基准面的测量要重复进行两次。以大平面加短圆柱为例，首先用手动操纵杆 (Joysticks) 操作三坐标测头测量大平面上的若干个点，拟合出大平面的初步姿态，从而初步确定短圆柱的轴线方向。然后，用操纵杆操纵三坐标测头在短圆柱面上测量几个点，并根据短圆柱轴线方向拟合出短圆柱面的轴线位置，并求得轴线与初步确定的定位面的交点。然后让三坐标测量机按程序以上述交点为圆心，在定位平面的两个不同半径上测量若干个点，并重新拟合定位面的精确位置，重新确定短圆柱面的轴线方向。再让三坐标测量机按初步确定的短圆柱面位置测量若干个等间隔分布的点，重新拟合出短圆柱面的精确位置。至此，齿轮的 5 自由度已被消除。

为了消除齿坯绕自身轴线回转的自由度，须用操纵杆操纵三坐标测头在齿面中部测取一点，并将该点旋转投影到被测齿轮的轴截面上，得到该点的  $r$  和  $z$  值。将被测齿面网格上的坐标点沿法线方向增加一个测头半径，得到一个原齿面的法向等距面的网格。将法向等距面网格旋转投影到轴向截面上，得到一组  $r^*(i, j)$  和  $z^*(i, j)$ 。用遍历法求得使  $|r - r^*(i, j)| + |z - z^*(i, j)|$  取得最小值的  $i$  值和  $j$  值  $i^*$ 、 $j^*$ 。然后分两步进行坐标旋转，使测头恰好落在齿面的法线等距面上以  $i^*$ 、 $j^*$  为下标的点的切平面上。第一次是粗定位，使法向等距面上的  $r^*(i^*, j^*)$  恰好转到测点所在的轴截面内，为此齿坯坐标须绕自身轴线转过的角度为

$$\theta = \arctan \frac{x^*(i^*, j^*)y - y^*(i^*, j^*)x}{x^*(i^*, j^*)x + y^*(i^*, j^*)y}$$

然后用迭代法进行调整

$$\Delta \theta = \arctan \frac{n(i^*, j^*)[r - r^*(i^*, j^*)]}{[n(i^*, j^*), k, r^*(i^*, j^*)]}$$

直至  $|\Delta \theta| < \varepsilon$ 。

然后让三坐标测量机按程序让测头沿网格中点的法线向量趋近齿面，测得网格中点的坐标值，再

重复以上迭代过程，对齿坯进行精确的旋转定位。

### 2.2 齿面网格测量

在完成齿坯的精确定位之后，齿面网格的测量是按程序自动完成的，图2为测量程序框图。自动测量过程中首先要做的事情是选测针。对于大节锥角的被动轮，如果双侧齿面上每一网格节点的法线矢量都满足  $n(i, j)k > 0$ ，整个齿面网格的测量可以用一根垂直测针来完成。否则网格点的测量只能用一系列径向布置的测针来完成。为了避免测针与被测齿面或对侧齿面发生干涉，对每一测点都必须选择适当的测针。选择测针的原则是被测点的切平面与过该点的端平面的交线与测针间的夹角必须大于零，以免与被测齿面发生干涉；同时又要使该夹角尽可能小一些，以避免测针杆与对侧齿面干涉。为此一般都采用8根水平测针，以保证切平面与端平面的交线与测针间的夹角不大于  $45^\circ$ 。

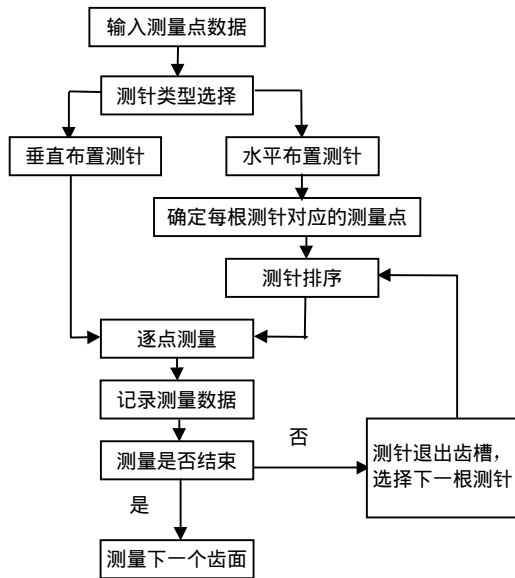


图2 测量程序框图

对于双曲线齿轮，由于主动轮的螺旋角很大，齿廓曲率也较大，一张齿面上各网格节点处的法线向量变化很大，须换用不同方向的测针方能无干涉地完成全齿面测量。换针时原测针必须完全从齿槽中退出，测头须做较大距离的移动，并将新测头重新插入齿槽，占用测量时间较多。为了避免测量过程中频繁交换测针，应在内存中申请一个与该测齿面网格点数对应的动态数组，动态数组中的每一个元素是一个三维数组，用于存放测点坐标。再对应于每一根测针建立一个链表，链表的每个节点是一个二维整型量数组，用于存放网格节点的下标变量。然后依次计算全部的网格节点处的切平面与端截面的交线，找到唯一适用的测针序号，并将其存入对应的链表。完成以上准备工作后，就可以进行

高效率的网格测量了。按循环制找到第一个非空链表，并逐个完成链表中对应网格节点的坐标测量，将坐标值填入动态数组。然后按顺序完成下一根测针对应的链表中网格节点的坐标测量，直至回到起始测针。将填满的动态数组一次性地按顺序写入磁盘文件，该齿面的测量工作就结束了，释放内存空间。

### 3 测量数据的处理

测量数据的处理分为两个部分，其一是计算每一测点的法向偏差，其二是拟合出一张二次或三次差曲面，以供误差补偿和识别之用。

为了计算各网格节点上的法向误差，首先要通过坐标旋转，将网格中点的法向误差调整到零。具体做法在上一节中已有详细阐述，此处不再赘述。然后依次计算齿面的法向等距面上的网格节点到对应测量点的距离在该点法线方向上的投影，即得全齿面的法向偏差。测量结果拓扑显示如图3所示。

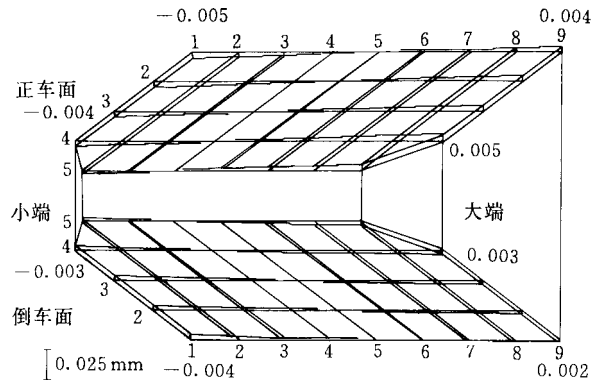


图3 测量差曲面

真实齿面被看作是在理论齿面上叠加一层差曲面而得到的。采用曲面叠加技术，而不采用直接对实际测量得到的齿面空间网格进行拟合，是因为齿面是挠曲程度很大的曲面，而通常的最小二乘法拟合技术都是建立在小挠曲假设的基础上的，用于大挠曲曲面的拟合会产生很大的误差。况且要在全齿面范围内拟合实际齿面，必须把模型的阶次升得很高，给工程计算带来极大的不便。而差曲面被看作是一张橡皮膜，将其摊平在平面，上平面的挠曲非常小，故只要用二次或三次模型就可以在全齿面范围内对其进行高精度的拟合。

由于齿面的挠曲程度很大，需要对差曲面的  $x$ 、 $y$  方向的坐标长度进行补偿。采用通常的任取标架，将向径直接投影到切平面的标架上的做法会因齿面沿各个方向大曲率差而给网格坐标补偿带来较大的困难。为此将标架取在齿面参考点的两个主

方向上, 先将参考点到网格节点的径矢投影在这两个主方向  $e_1$  和  $e_2$  上

$$x' = [r(i, j) - r_m] \cdot e_1$$

$$y' = [r(i, j) - r_m] \cdot e_2$$

式中  $r_m$  —— 齿面上参考点的径矢

进行曲率补偿

$$x = \begin{cases} x' \sqrt{1 + k_1 x'^2} / 4 & |k_1| < \varepsilon \\ \operatorname{sgn}(x') \arctan\left(\sqrt{(1/k_1)^2 - x'^2} / |x'|\right) / k_1 & |k_1| \geq \varepsilon \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} y' \sqrt{1 + k_2 y'^2} / 4 & |k_2| < \varepsilon \\ \operatorname{sgn}(y') \arctan\left(\sqrt{(1/k_2)^2 - y'^2} / |y'|\right) / k_2 & |k_2| \geq \varepsilon \end{cases}$$

将测量网格到理论齿面的法向偏差记为  $z(i, j)$ 。用上述方法求得差曲面各网格节点的  $x(i, j)$  和  $y(i, j)$  后, 即根据函数逼近理论拟合出差曲面的零阶、一阶、二阶及三阶偏导数, 具体公式不再赘述。

## 4 计算实例

此算例中被测螺旋锥齿轮的基本参数如下: 模数 4.693 mm, 齿数 46 mm, 分度圆直径 215.9 mm, 齿面宽度 33.02 mm, 压力角  $19^\circ$ 。下表为序号 2~5 的测量点的理论齿面坐标和法线矢量分量。测量采用 Zeiss 三坐标测量机, 齿面测量点数量为  $5 \times 9$ 。每隔约  $90^\circ$  测一个齿, 共测 4 个齿, 最终的数据取这些齿的均值。图 3 是齿面测量形成的差曲面。

表 齿面测量点理论坐标及法线矢量

序号	项目	x	y	z
2	位置坐标/mm	-3.041 64	78.806 95	-31.203 41
	法矢量分量	-0.910 97	0.402 37	0.090 65
3	位置坐标/mm	-3.382 98	78.316 19	-32.455 34
	法矢量分量	-0.911 00	0.402 29	0.090 69
4	位置坐标/mm	-3.725 09	77.823 73	-33.707 27
	法矢量分量	-0.911 04	0.402 19	0.090 74
5	位置坐标/mm	-4.067 9	77.329 51	-34.959 20
	法矢量分量	-0.911 08	0.402 08	0.090 79

## 5 结论

(1) 建立了 Gleason 制螺旋锥齿轮理论齿面模型。给出测量网格的规划方法。

(2) 给出了螺旋锥齿轮在三坐标测量机上的定位和测量方法。在三坐标测量机上测量得到的螺旋锥齿轮齿面结构参数为最优切齿修正提供了定量数据, 从而使齿面啮合质量得到本质的提高。

## 参 考 文 献

- 1 Wang X C, Ghosh S K. Advanced Theories of Hypoid Gears. Amsterdam: Elsevier Science B.V, 1994
- 2 花国梁. 精密测量技术. 北京: 中国计量出版社, 1990
- 3 Litvin L F, Zhang Y, Kieffer J, et al. Identification and minimization of deviation of real gear tooth surfaces. Journal of Mechanical Design. ASME, 1991, 113(3): 55~62
- 4 Lin C Y, Tsay C B, Fong Z H. Computer-aided manufacturing of spiral bevel and hypoid gears with minimum surface-deviation. Mech. Mach. Theory, 1998, 33(6): 785~803
- 5 Pfeifer T, Kurokawa S, Meyer S. Derivation of parameters of global form deviations for 3-dimensional surfaces in actual manufacturing processes. Measurement, 2001, 29(3): 179~200

## COORDINATE MEASUREMENT OF TOOTH SURFACE OF SPIRAL BEVEL GEAR

Wang Jun Wang Xiaochun Jiang Hong

(Xi'an Jiaotong University)

Lin Runfang Feng Wenjun

(Chongqing University)

**Abstract:** The accurate measurement of the structure parameters of real tooth surface of spiral bevel gear with the coordinate measuring machine is the key to evaluate the geometric quality of the real tooth surface quantitatively, and the base of machine-settings correction. According to the theoretical tooth surface model, the measuring grids schema is accomplished on the rotary projection of tooth surface, and coordinates and the normal of the grids are obtained. Using the data of grids, the measurement process is completed automatically, the deviations of the real tooth surface from the theoretical one are obtained.

**Key words:** Spiral bevel gear

Tooth surface measurement

Coordinate measuring machine

作者简介: 王军, 男, 1969 年出生, 博士研究生。主要研究方向为弧齿锥齿轮的齿面优化设计及加工方法研究。