DOI：10.3901/JME.2014.17.017

基于一种自由度新理论的过约束判断方法*

卢文娟[1,2]　张立杰[1,2]　曾达幸[1,2]　张一同[1,2]
(1. 燕山大学先进锻压成形技术与科学教育部重点实验室　秦皇岛　066004；
2. 燕山大学河北省重型机械流体动力传输与控制重点实验室　秦皇岛　066004)

摘要：过约束判断是机构自由度计算的关键，也是瓶颈。为使过约束判断更简单、快速，从其产生的本质出发，考虑约束的相关性，基于一种新的自由度理论，提出结合杆组参数矩阵进行过约束判断的方法。针对夹角不为零的平行 R 杆组(具有平行转动轴线的杆组)位移参数确定问题，提出参数垂直分量有效法则，使考虑不同几何空间下的螺旋相关性问题转化为仅考虑平行约束的相关性判断问题。将过约束的产生归纳为三类情况，分析各类情况下过约束的数目及类型，总结过约束中公共约束判断和并联冗余约束判断的原则。以一个典型机构为例，利用上述方法对其过约束数目和性质进行求解，以进一步验证所提法则、方法的合理性和实用性。

关键词：自由度；过约束；并联冗余约束；杆组位移参数
中图分类号：TH112

Method for Determination of Overconstraint Based on a New Mobility Theory

LU Wenjuan[1,2]　ZHANG Lijie[1,2]　ZENG Daxing[1,2]　ZHANG Yitong[1,2]
(1. Key Laboratory of Advanced Forging & Stamping Technology and Science of Ministry of Education, Yanshan University, Qinhuangdao 066004;
2. Hebei Key Laboratory of Heavy Mechinery Fluid Power Transimission and Control, Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

Abstract：Overconstraint determination is the key and bottleneck of mobility calculation. Starting from its engendered nature, the linear dependence of constraint, a novel approach to overconstraint determination combined with linkgroup parameter matrix is presented to make it easier and faster based on a new mobility theory. To ascertain displacement parameters when the angle of parallel R link group (linkgroup including revolute joints with parallel rotation axis) is not zero, the validity of its vertical component is proposed which only takes parallel constraints of screw linear dependence into account in the midst of varied geometric spaces. The number and types of overconstraint are analyzed in three different situations which derive from its generation. Meanwhile the principles of common constraint and parallel-redundant-constraint determination are concluded. A typical mechanism is taken as an instance and elicited the number and characters of its overconstraint applying the above approach to further verify the rationality and applicability of the proposed approach and principles.

Key words：mobility；overconstraint；parallel-redundant-constraint；displacement parameters of linkgroup

0　前言

自由度是机构分析中一个重要参数。同时自由度计算是机构运动分析和动力学分析最基础的一项内容。自由度计算的核心问题便是如何确定机构中的过约束。过约束包含两部分[1]：一部分以公共约束的形式出现；另一部分为并联冗余约束，即当多个运动链分支闭合构造并联机构时没有包括在公共约束中的部分。虽然对自由度的研究已经经历了一百五十多年的历史[2]，然而对于过约束的分析是近 30 年前才开始的[3]。历史上早期多数自由度公式没有正确处理机构中的过约束，这是导致自由度研究中理论与实际相矛盾的根本原因。

早在 1869 年 CHEBYCHEV[4]首次用数学表达式建立平面机构的自由度计算公式

* 国家自然科学基金资助项目(51275438，51005195)。20130927收到初稿，20140519收到修改稿

$$F = 3n - 2p_l - p_h \tag{1}$$

式中 F——机构自由度；

n——活动构件数目；

p_l——低副数目；

p_h——高副数目。

1917 年 GRÜBLER[5]将自由度计算发展到空间，建立了第一个空间机构自由度公式

$$5h - 6(n+1) + 7 = 0 \tag{2}$$

式中，h 为包含螺旋副在内的单自由度运动副数目。

1923 年 MALYTSHEFF[6]提出类似的自由度计算公式

$$F = 6n - \sum_{i=1}^{5} iC_i \tag{3}$$

式中，iC_i 为机构中运动副的约束数之和。

上述这些公式仅从机构组成考虑计算自由度，均没有处理机构中重复的约束，因此只适用于不含有过约束机构的自由度计算。

机构学家逐渐意识到，当机构中出现过约束时，再利用之前的公式，约束便会被重复计算，使得机构自由度数目减少。于是在 1887 年，机构的“阶”首次被引入机构自由度计算[7]，自由度公式中开始考虑机构的公共约束部分。这类公式中，最具代表性的当属具有百余年历史的传统 K-G 公式[8]

$$F = d(n-g) + \sum_{1}^{g} f_i \tag{4}$$

式中 d——机构的阶；

$d = 6 - \lambda$，λ 为公共约束；

g——运动副的数目；

f_i——运动副的自由度。

此外，DOBROVOLSKI[9]提出的自由度公式

$$F = (6-\lambda)n - \sum_{i=\lambda+1}^{5} (i-\lambda)C_i \tag{5}$$

式中，C_i 表示约束度为 i 的运动副数目。

以及近十年间 MCCARTHY[10]专门针对并联机构自由度计算提出的公式

$$F = d - \sum_{i=1}^{c} (d - F_i) \tag{6}$$

式中，F_i 为第 i 个分支的自由度，则 $(d - F_i)$ 表示第 i 个分支带来的约束；c 表示并联机构分支的数目。

上述式(4)～(6)中均考虑到过约束中的公共约束部分。但是相关文献中作者未能明确给出机构阶的确定方法，而且这些公式对于一些过约束机构，比如 PCM 机构、3-RRC 机构等，不论 d 如何取值都不能得出正确的结果[11-12]。对于多数并联机构，只考虑公共约束还不够，还有一些过约束是在多个分支经闭合构成并联机构时发生的。针对这个问题，HUANG 等[13]提出了“修正的 K-G 公式”

$$F = d(n-g-1) + \sum_{1}^{g} f_i + \upsilon \tag{7}$$

即在 K-G 公式的基础上加入了被重复减去的约束数目 υ，称为“并联冗余约束”。同时也为上述式(1)～(3)这类未考虑任何过约束，及式(5)、(6)仅考虑公共约束等公式的修正提供理论参考。

式(1)~(7)以机构组成考虑，基于构件、运动副进行自由度计算，用最简单的算术去解决机构最基本的自由度问题。较基于运动参数、环路阶，或是通过机构运动分析建立运动方程求解机构自由度方法，其更加直观、简洁，容易被众人所理解。然而要想利用这些公式进行自由度计算，问题关键在于如何判定机构中的过约束数目，包括机构的阶及并联冗余约束的确定。

过约束判断代表性的方法主要有螺旋理论[14-15]、线性变换方法[16]和螺旋代数法[8,17]。其中，螺旋理论通过求解各运动螺旋，分析螺旋相关性得到机构的阶；线性变换方法目前仅提出过约束数目计算表达式，而对于过约束性质判断未加讨论；螺旋代数法需使用欧氏空间 $SE3$ 的李群代数 $se3$，写出雅可比矩阵，通过速度和加速度分析得到公共约束和并联冗余约束数目。黄真教授在螺旋理论基础上形成反螺旋自由度原理[2,18]，通过分支约束螺旋的线性相关性深入分析过约束问题，使过约束分析变得更加方便。这些方法严谨可靠，是过约束判断的通用方法。

如果能有一种过约束计算方法不必求解雅可比矩阵，或以复杂数学和力学知识作为理论基础，仅需借助简单运算和法则，将使得自由度计算更为方便。本文以一种自由度新理论——杆组参数理论为基础，对其在机构过约束中的应用展开讨论，提出基于机构杆组位移参数矩阵的过约束判断方法。

1 杆组参数理论

机构是由机架、输出构件以及连接机架和输出构件的各个“广义杆组”所组成，这里我们定义每个独立环路与其相邻环路不重复独立杆件的组合称为广义杆组，简称为杆组[19]。杆组末端构件在给定坐标系中，未受到其他杆组约束时，杆组的全部位移(包括线位移和角位移)参数，称为杆组位移参数，简称为杆组参数。

第 k 个杆组位移参数用矢量 $\boldsymbol{G}_k^{gz}$ 表示：$\boldsymbol{G}_k^{gz} = (\alpha \quad \beta \quad \gamma, \quad x \quad y \quad z)$，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$x$，$y$，$z$

是形式参数，分别代表相对三个坐标轴的转动和移动，称为矢量元素，表示转动的α、β、γ 称为角位移矢量元素；表示移动的 x、y、z 为线位移矢量元素，元素可以独立，也可表示位移参数在某方向的分量。元素值为非 0 或者 0：非 0 代表对应运动特征存在，0 代表运动不存在，即表示该杆组对输出构件产生了对应方向的约束力(偶)。

由 n 个杆组位移参数组成的矩阵称为杆组参数矩阵，表示为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n & x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}$$

对应列分别称为 x、y、z 方向的角位移列矢量和线位移列矢量。参数矩阵中表达了各杆组的末端运动特征，及各杆组对输出构件的约束情况。

在给定坐标系中，在输出构件上满足杆组位移参数交集条件的点，称之为基点。基点位移参数用矢量 $\boldsymbol{O}_B$ 表示，为杆组参数 $\boldsymbol{G}_k^{gz}$ 的交集，则 $\boldsymbol{O}_B=\bigcap_{k=1}^{L}\boldsymbol{G}_k^{gz}$，其中 L 为机构中杆组数目。需要指出的是，基点参数可能是基点的全部独立位移参数，也可能包含基点的独立和非独立位移参数[20]。

2　参数垂直分量有效法则

图 1 所示为 Sarrus 机构[2]，这是世界上第一个过约束机构，构成该机构的运动副全部为转动副，且包含了 AC 和 DF 两个杆组。每个杆组中的三个转动副轴线平行，称为平行 R 杆组。机构中两组平行 R 杆组中转动轴线的夹角记为φ。沿着杆组 AC 运动副轴线方向设为 x 方向，建立如图所示坐标系。

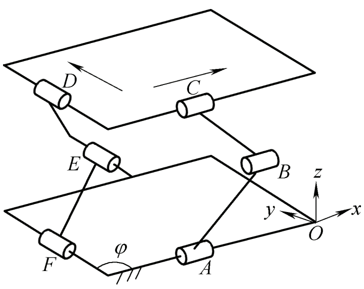


图 1　Sarrus 机构

(1) 当 $\varphi=90^\circ$ 时，杆组 DF 轴线沿 y 轴方向，该机构的杆组位移参数矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & y & z \\ 0 & \beta & 0 & x & 0 & z \end{pmatrix}$$

基点参数为各杆组参数的交集：$\boldsymbol{O}_B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z\end{pmatrix}$，其表示动平台只能沿着 z 轴方向平动，与机构真实运动相符。

(2) 当 $\varphi\neq 90^\circ$ 且 $\varphi\neq 0^\circ$ 时，得到该机构的杆组位移参数矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & y & z \\ \alpha & \beta & 0 & x & y & z \end{pmatrix}$$

基点位移参数为各杆组参数的交集：$\boldsymbol{O}_B=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0, & 0 & y & z\end{pmatrix}$，表示动平台除具有沿 z 方向的移动外，同时伴随有绕 x 轴的转动和沿 y 轴方向的移动，显然这个结果与机构实际运动不相符。称此时杆组 DF 的 5 个运动参数α、β、x、y、z 中不影响运动的为无效参数，表征杆组真实运动的为有效参数。要想正确写出杆组参数矩阵，需要分析哪些参数为无效参数。

图 1 所示机构中，每个杆组对输出构件均产生沿着杆组运动副轴线方向的约束力(在图中用单向箭头直线表示)，约束力夹角为φ。当 $\varphi=90^\circ$ 和 $\varphi\neq 90^\circ$ 且 $\varphi\neq 0^\circ$ 时，两个约束力对动平台约束情况相同，均线性无关，约束了动平台在其平面内移动。即两个共面不平行力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$，其中 $\boldsymbol{F}_2$ 可以分解为垂直于 $\boldsymbol{F}_1$ 方向的力 $\boldsymbol{F}_{2\mathrm{t}}$，和平行于 $\boldsymbol{F}_1$ 方向的分力 $\boldsymbol{F}_{2\mathrm{n}}$，其中 $\boldsymbol{F}_{2\mathrm{t}}$ 为约束物体在平面内移动的有效分力。

结合该思想，杆组 DF 的位移参数同样可分解为垂直于杆组 AC 轴线方向即 x 方向的位移参数和沿着 x 方向的位移参数，表示为

$$\begin{gathered}\boldsymbol{G}_2^{DF}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0 & x & y & z\end{pmatrix}= \\ \boldsymbol{G}_n^{DF}\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0 & y & z\end{pmatrix}+ \\ \boldsymbol{G}_t^{DF}\begin{pmatrix}0 & \beta & 0 & x & 0 & z\end{pmatrix}\end{gathered}$$

式中，$\boldsymbol{G}_n^{DF}\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0 & y & z\end{pmatrix}$表示平行于杆组 AC 轴线方向的位移参数，其产生的约束与杆组 AC 所产生的约束完全相同，为无效参数；$\boldsymbol{G}_t^{DF}\begin{pmatrix}0 & \beta & 0 & x & 0 & z\end{pmatrix}$表示垂直于 AC 轴线方向的位移参数，为有效参数，产生一个垂直杆组 AC 轴线方向的有效约束力。而杆组位移参数矩阵中涉及的位移参数均指有效参数，所以图 1 所示 Sarrus 机构当 $\varphi=90^\circ$ 或$\varphi\neq 90^\circ$ 且 $\varphi\neq 0^\circ$ 时，杆组有效参数矩阵均应为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & y & z \\ 0 & \beta & 0 & x & 0 & z \end{pmatrix}$$

基点位移参数 $\boldsymbol{O}_B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0, & 0 & 0 & z\end{pmatrix}$，动平台的运动为沿 z 轴方向平动。

总之，对于两组夹角不为零的平行 R 杆组，其中一组位移参数中垂直于另一组位移参数的分量为有效分量，用于求解机构自由度，称为参数垂直分量有效法则。此法则是对杆组参数理论的进一步补充，扩大了其应用范围，同样也为过约束判断奠定基础。

3 过约束判断

并联机构中，当各杆组对动平台提供两个或以上作用效果相同的约束时，便构成过约束。过约束产生的本质是分支约束螺旋发生了线性相关性[21-22]。而杆组参数矢量中零元素则表示杆组对输出构件施加的约束，限制动平台在对应方向产生移动(或转动)，杆组参数矩阵中如果同一列矢量有两个或以上零元素存在，则表示各杆组施加某方向的多个平行约束力或力偶，而这些约束在满足一定几何特点条件下便会构成过约束。因此，本节拟以杆组理论为基础，系统讨论基于杆组参数矩阵进行过约束判断的新方法。

3.1 基于杆组理论进行过约束判断的原理

各杆组对动平台所施加的约束力(偶)在空间下几何关系分为平行(包含共轴、共面平行和空间平行)、共面(包含共面汇交)、空间(包含空间共点)。分析这几种情况下杆组位移参数，重点考虑其中的零元素。

3.1.1 约束力(偶)平行

当杆组对动平台施加同方向约束时，表示平行约束力(偶)的两个或以上零元素在杆组参数矩阵中出现在同一列矢量中。如

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \gamma_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \beta_n & \gamma_n & x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}$$

表示存在 n 个 x 方向的平行约束力偶，其几何特点可能为共轴、共面平行或空间平行。

3.1.2 约束力(偶)共面不平行

当杆组对动平台施加共面的约束力(偶)(设为 xy 平面)时，根据参数垂直分量有效法则，其中一个杆组所产生的约束力(偶)设为 x 方向，则其他杆组所产生与其共面但不平行的约束力(偶)在 y 方向的分量为有效分量。例如 n 个 xy 面内共面不平行约束力偶所对应的杆组参数矩阵为

$$\boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \gamma_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \alpha_2 & 0 & \gamma_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & 0 & \gamma_n & x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}$$

即 y 方向的角位移矢量中存在($n-1$)个零元素，动平台受到($n-1$)个 y 方向的平行约束力偶。

3.1.3 约束力(偶)空间不平行

当杆组对动平台施加空间任意约束力(偶)时，根据参数垂直分量有效法则，其中第一个杆组所产生的约束力(偶)设为 x 方向，第二个杆组所产生的约束力(偶)在 y 方向分量为有效分量，则其他杆组所产生的不共面且不平行的约束力偶在 z 方向分量则为有效分量。例如

$$\boldsymbol{M}_3=\begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \gamma_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \alpha_2 & 0 & \gamma_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 0 & x_3 & y_3 & z_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \beta_n & 0 & x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}$$

则表示 n 个空间不平行约束力偶所对应的杆组参数矩阵，其中 z 方向的角位移列矢量中存在($n-2$)个零元素，动平台受到($n-2$)个 z 方向的平行约束力偶。

总之，根据参数垂直分量有效法则，将约束线矢和偶量不同几何特点转化为几何条件为平行的约束力(偶)，为得到机构中的过约束，需要分析这些施加在输出构件上平行约束间的线性相关性。输出构件所受约束不是这些平行约束力(偶)的简单叠加，相同约束在不同几何条件下会产生不同的效果，约束不同的自由度，因此需要考虑平行约束力(偶)在不同几何空间下的线性相关性。平行约束力(偶)的几何条件可以为共轴、共面平行、空间平行。接下来基于杆组参数矩阵，分别讨论常用到的几种情况下过约束的判断。

3.2 过约束判断方法

3.2.1 角位移同一列矢量中具有至少两个零元素

由 n 个杆组组成的并联机构中，杆组参数矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的角位移同一列矢量中具有一个以上零元素，即表示杆组中仅存在平行约束力偶。由于力偶为自由矢量，同方向的平行约束力偶无论满足共轴或是共面平行、空间平行条件，其最大线性无关数均为 1。即当 $i(1<i\leqslant n)$个连接动平台和定平台的杆组均对输出构件产生一个同方向约束力偶时，这几个力偶便构成过约束。

当 $i=n$ 时，表明每个杆组均对输出构件同时施加同一方向的约束力偶，n 个平行约束力偶构成一个公共约束即 $\lambda=1$，机构的阶随之降“1”；当 $1<i<n$ 时，该 i 个约束力偶构成并联冗余约束，因平行约束力偶的最大线性无关数为 1，所以对应并联冗余约束的数目为 $\upsilon=i-1$。

3.2.2 线位移同一列矢量中具有至少两个零元素

由 n 个杆组组成的并联机构所对应的杆组参数矩阵为 $\boldsymbol{M}$，仅线位移同一列矢量中具有一个以上零元素时，即表示杆组中仅存在平行约束力。力矢为非自由矢量，其在不同几何空间下的线性相关性各

不相同。

(1) 约束力共轴。当 i 个同向约束力共轴时，由于其最大线性无关数为 1，则对应过约束的数目 $\upsilon=i-1$。且当 i=n 时，i 个零元素表示的 i 个共轴平行约束力构成一个公共约束，$\lambda=1$。

(2) 约束力共面平行。由于 i 个平行共面约束力最大线性无关数为 2，则其对应的过约束数目为 $\upsilon=i-2$。该 i 个共面平行的约束力不能构成公共约束，只能为并联冗余约束。

(3) 约束力空间平行。由于 i 个空间平行约束力最大线性无关数为 3，则其对应过约束的数目为 $\upsilon=i-3$。且不能构成公共约束，只能为并联冗余约束。

3.2.3　线位移同一列矢量和角位移同一列矢量中均存在零元素

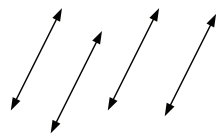
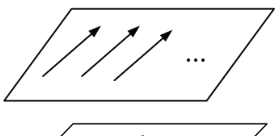
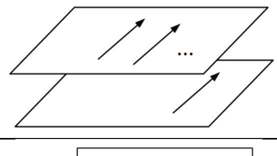
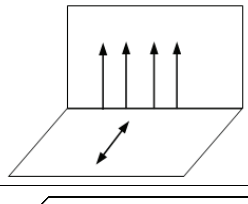
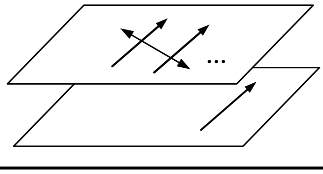
n 个杆组组成的并联机构，其杆组参数矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的线位移同一列矢量中具有 $i(1<i\leqslant n)$个零元素，表示杆组对输出构件同时施加 i 个平行约束力。

(1) 当 i 个平行约束力共面时。如果在平行约束力线矢构成的平面法线方向上，存在约束力偶，即对应方向的角位移列矢量中存在一个零元素，根据第 3.2.2 节中(2)所描述情况，该 $i(1<i\leqslant n)$个平行约束力中有$(i-2)$个过约束，同时“当两个约束力组成的平面法线方向上有约束力偶时，便构成一个过约束[2]”。所以该情况下总的过约束数目为 $\upsilon=i-2+1=i-1$。且当 i=n 时，n 个平行约束力和平面法线方向的一个约束力偶构成一个公共约束，即 $\lambda=1$。

(2) 当 i 个平行约束力空间平行时。如果在平行约束力线矢的垂直方向上存在约束力偶，即对应方向的角移位列矢量中存在一个零元素，根据第 3.2.2 节中(3)所描述情况，该 $i(1<i\leqslant n)$个平行约束力存在$(i-3)$个过约束，同时“空间平行的三个约束力及一个相垂直的约束力偶，构成一个过约束[2]”。所以该情况下总的过约束数目为 $\upsilon=i-3+1=i-2$。且 i=n 时也不能构成公共约束。

如上述分析，基于杆组理论和参数垂直分量有效法则，可以将线矢和偶量在多种不同几何空间下的线性相关性问题简化为平行约束力(偶)相关性判断，表 1 列出了常用的几种杆组参数矩阵中零元素所对应的过约束。

表 1　基于杆组理论的过约束判断

序号	杆组参数矩阵描述	几何特点	图示(单向箭头表示约束力，双向箭头表示约束力偶)	公共约束	并联冗余约束
1	角位移同一列矢量中存在 i 个零元素	任意平行(i=n)		1	0
2		任意平行(i<n)		0	i–1
3	线位移同一列矢量中存在 i 个零元素	共轴(i=n)		1	0
4		共轴(i<n)		0	i–1
5		共面平行(i=n)		0	i–2
6		共面平行(i<n)		0	i–2
7		空间平行(i=n)		0	i–3
8		空间平行(i<n)		0	i–3
9	线位移同一列矢量中存在 i 个零元素，且在其垂直方向对应的角位移同一列矢量中存在零元素	i(i=n)个约束力共面平行		1	0
10		i(i<n)个约束力共面平行		0	i–1
11		$i(1<i\leqslant n)$个约束力空间平行		0	i–2

总之，过约束判断原则可总结如下。

原则 1：某方向的角位移同一列矢量中各元素均为零，表示对应方向的一个公共约束力偶。

原则 2：某方向的线位移同一列矢量中各元素均为零，不一定表示公共约束，只有当零元素所表示的约束力全部共线或约束力作用线组成的平面法线方向上存在约束力偶时表示公共约束。

原则 3：某方向的角位移同一列矢量中有 $i(1<i<n)$个零元素时，表示$(i-1)$个并联冗余约束。

原则 4：某方向的线位移列矢量中有 $i(1<i<n)$个零元素时，不一定表示过约束。当零元素所表示的 i 个约束力共线时，存在$(i-1)$个并联冗余约束；当 i 个约束力共面时存在$(i-2)$个并联冗余约束；当 i 个约束力空间平行时存在$(i-3)$个并联冗余约束。

原则 5：某方向的线位移同一列矢量中存在 $i(1<i<n)$个零元素，当零元素所表示的 i 个约束力共面，且在其平面法线方向上存在角位移为零的元素，则存在$(i-1)$个并联冗余约束。

原则 6：某方向的线位移同一列矢量中存在 $i(1<i\leqslant n)$个零元素，当零元素所表示的 i 个约束力空间平行，且在其垂直方向上存在角位移元素为零的量，则存在$(i-2)$个并联冗余约束。

基于杆组理论，对机构进行过约束判断，首先根据组成杆组的运动副类型和轴线关系，写出机构的杆组参数矩阵 $\boldsymbol{M}$，结合上述原则 1 和 2 进行机构公共约束判断，进而得到机构的阶；结合原则 3~原则 6 可确定机构中并联冗余约束的数目。上述过约束判断原则的提出，将分析约束力(偶)的多种几何空间关系下线性相关性，简化为判断平行约束力(偶)间的几何空间关系，使过约束判断更为直观、方便。

4　实例

为更好解释并验证上述理论，本节以图 2 所示的单自由度移动并联机构 3-RRR 机构为例来进行过约束判断及自由度计算。

图 2 所示为两个 Sarrus 机构组合而成的机构，由 3 个相同的 RRR 分支同时连接上下平台，每个分支均是由轴线相互平行的三个转动运动副构成，且三个分支轴线均分布在基面内，其夹角记为 $\varphi\,(0°<\varphi\leqslant 90°)$。为使杆组位移参数最少，沿着其中一个杆组的运动副轴线方向建立坐标轴，坐标系如图 2 所示。

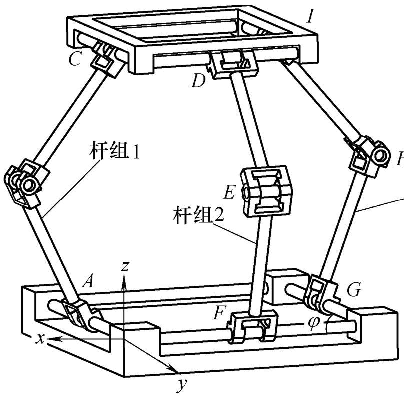


图 2　3-RRR 机构

4.1　确定机构杆组参数矩阵

该机构中的三个平行 R 杆组，杆组 1 中转动轴线与杆组 2 的转动轴线夹角不为零，根据“参数垂直分量有效法则”。设第一个杆组的轴线沿着 y 方向，则第二个杆组的位移分量，可以分解成平行和垂直于第一个杆组的两个分量，垂直方向的位移分量作为有效分量，其位移参数为有效参数，用这组有效位移参数来进行机构自由度计算

$$\boldsymbol{G}_2^{FD}\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0 & x & y & z\end{pmatrix}=\boldsymbol{G}_n^{FD}\times \begin{pmatrix}0 & \beta & 0 & x & 0 & z\end{pmatrix}+\boldsymbol{G}_t^{FD}\times \begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0 & y & z\end{pmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{G}_t^{FD}\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0 & y & z\end{pmatrix}$为有效分量，将其作为杆组的有效位移参数，即杆组 2 的位移参数为：$\boldsymbol{G}_2^{FD}=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0 & y & z\end{pmatrix}$，从而得到机构杆组参数矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0 & \beta & 0 & x & 0 & z\\ \alpha & 0 & 0 & 0 & y & z\\ 0 & \beta & 0 & x & 0 & z\end{pmatrix}$$

4.2　过约束判断

4.2.1　公共约束判断

机构杆组参数矩阵中，绕 z 轴转动的角位移列矢量为$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm T}$，矢量元素全部为零，表示三个同方向的约束力偶线性相关，根据本文第 3 节中介绍的过约束判断原则 1，说明机构含有一个公共约束，为垂直于基面的一个公共约束力偶：$\lambda=1$，$d=6-1=5$。

4.2.2　联冗余约束判断

$\boldsymbol{M}$ 矩阵中 x 方向的角位移列矢量为$\begin{pmatrix}0 & \alpha & 0\end{pmatrix}^{\mathrm T}$，该矢量中包含有两个零元素，表示两个 x 方向的平行约束力偶，根据过约束判断原则 3 可知有$(2-1)$个 x 方向的并联冗余约束力偶：$\upsilon_1=1$。

$\boldsymbol{M}$ 矩阵中 y 方向的线位移列矢量为$\begin{pmatrix}0 & y & 0\end{pmatrix}^{\mathrm T}$，该矢量中包含两个零元素，表示两个 y 方向的共面平行约束力。同时绕 z 轴的转动角位

移列矢量中存在零元素，表示约束力平面法线方向上存在约束力偶，根据过约束判断原则 5，则存在(2−1)个并联冗余约束：$\upsilon_2=1$。

并联冗余约束数目：$\upsilon=\upsilon_1+\upsilon_2=1+1=2$。

4.3 自由度计算

通过上述分析可知该机构有一个公共约束和两个并联冗余约束，即$\lambda=1$，$\upsilon=2$。将该结果代入到“修正的 K-G 公式”即式(7)计算该机构自由度为

$$F=d(n-g-1)+\sum_{1}^{g}f_i+\upsilon=5\times(8-9-1)+9+2=1$$

基点位移参数为各杆组参数的交集：$\boldsymbol{O}_B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z\end{pmatrix}$，表示动平台具有沿 z 方向的移动。

5 结论

(1) 针对含有夹角不为零的平行 R 杆组的机构，基于杆组理论，提出参数垂直分量有效法则：对于两组夹角不为零的平行 R 杆组，将其中一组的位移参数中垂直于另一组的位移参数分量作为杆组参数有效分量。该法则为含有夹角不为零的平行 R 杆组机构杆组位移参数确定奠定基础。

(2) 基于杆组参数矩阵，将机构中过约束判断分为三种情况并展开讨论，总结出过约束判断的 6 条原则，为过约束快速判断提供理论依据。

(3) 以杆组为单元，基于杆组参数矩阵的过约束判断方法，将传统过约束判断方法中分析约束力(偶)在多种几何空间下的相关性问题，简化为平行约束力(偶)相关性判断，通过分析杆组参数矩阵中的零元素进行过约束判断，使得过约束判断简洁、快速且具有实用性。这对自由度理论的发展具有一定的参考意义。

参 考 文 献

[1] HUANG Zhen，LI Qinchuan. Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using constraint-synthesis method[J]. Int. J. Rob. Research，2003，22(1)：59-79.

[2] 黄真，刘婧芳，李艳文. 论机构自由度——寻找了 150 年的自由度通用公式[M]. 北京：科学出版社，2011.
HUANG Zhen，LIU Jingfang，LI Yanwen. On the degree of freedom-the general formula of the degree of freedom which has been searched for 150 years[M]. Beijing：Science Press，2011.

[3] DAVIES T H. Mechanical Networks-1 passivity and redundancy[J]. Mechanism and Machine Theory，1983，18(2)：95-112.

[4] CHEBYCHEV P A. Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes，2ème partie[R]. Mémoires présentés à l'Académie impériale des sciences de Saint-Petersbourg par divers savants，1869.
CHEBYCHEV P A. Theory of parallelogram mechanisms，2nd part[R]. Submissions to the Imperial Academy of Sciences in St. Petersburg by various scholars，1869.

[5] GRÜBLER M. Getriebelehre：eine theorie des zwanglaufes und der ebenen mechanismen[M]. Berlin：Springer，1917.
GRÜBLER M. Transmission study：A theory of the forced running and the planar mechanisms[M]. Berlin：Springer，1917.

[6] MALYTSHEFF A P. Analysis and synthesis of mechanisms with a viewpoint of their structure[R]. Izvestiya Tomskogo of Technological Institute，1923.

[7] SOMOV P I. On the degree of freedom of motion of kinematic chains[J]. J Phys. Chem. Soc.，1887，19(9)：443-477.

[8] HUNT K H. Kinematic geometry of mechanisms[M] Oxford：Oxford University Press，1978.

[9] DOBROVOLSKI V V. Theory of mechanisms[M]. Moscow，1951.

[10] MCCARTHY J M. Geometric design of linkages[M]. New York：Springer-Verlag，2000.

[11] 郭卫东，于靖军. 一种计算平面机构自由度的新方法[J]. 机械工程学报，2013，49(7)：115-120.
GUO Weidong，YU Jingjun. A new method of mobility calculation for plannar mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering，2013，49(7)：115-120.

[12] GOGU G. Mobility of mechanisms：A critical review[J]. Mech Mach Theory，2005，40(9)：1068-1097.

[13] HUANG Zhen，LI Qinchuan. Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using constraint-synthesis method[J]. Int. J. Rob. Research，2003，22(1)：59-79.

[14] FAYET M，BONNET P. Rank of constraint equations. process to obtain the distribution of mobilities[J]. Mechanism and Machine Theory，1995，30(2)：219-232.

[15] KONG Xianwen，GOSSELIN C M. Mobility analysis of parallel mechanisms based on screw theory and the concept of equivalent serial kinematic chain[C]

//Proceeding of 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference，Long Beach，California，USA，2005：911-920.

[16] GOGU G. Fully-isotropic redundantly-actuated parallel wrists with three degrees of freedom[C] //2007 Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference，September 4-7，2007，Las Vegas，Nevada，USA，2008：943-950.

[17] RICO J，CERVANTES J，ROCHA J, et al. Mobility and overconstraint in kinematic chains and assemblies[C]// 2007 Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference，September 4-7，2007，Las Vegas，Nevada，USA，2008：1-11.

[18] 黄真，刘靖芳，李艳文. 150 年机构自由度的通用公式问题[J]. 燕山大学学报，2011，35(1)：1-14.
HUANG Zhen，LIU Jingfang，LI Yanwen. 150-year unified mobility formula issue[J]. Journal of Yanshan University，2011，35(1)：1-14.

[19] ZHANG Yitong，LI Yanwen，WANG Liya. A new formula of mechanism mobility based on virtual constraint loop[J]. Sci. China Tech. Sci.，2011，54(10)：2768-2775.

[20] ZHANG Yitong，LU Wenjuan，MU Dejun，et al. A novel mobility formula for parallel mechanisms expressed with mobility of general link-group[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering，2013，26(6)：1082-1090.

[21] LI Yanwen，WANG Lumin，LIU Jingfang, et al. Applicability and generality of the modified Grubler-Kutzbach criterion[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering，2013，26(2)：257-263.

[22] KONG Xianwen，GOSSELIN C. Type synthesis of parallel mechanisms[M]. Berlin Heidelberg：Springer-Verlag，2007.

作者简介：卢文娟，女，1983 年出生，博士研究生。主要研究方向为并联机构自由度分析，型综合。
E-mail：wenjuan_lu@163.com
张立杰(通信作者)，男，1969 年出生，博士，教授，博士研究生导师。主要研究方向为机构学、机械结构力学性能分析及结构优化设计、电液控制系统、流体机械优化设计。
E-mail：ljzhang@ysu.edu.cn
曾达幸，男，1978 年出生，副教授。主要研究方向为并联机构型综合及机构分析，机械结构设计。
E-mail：roboms@ysu.edu.cn
张一同，男，1945 年出生，教授。主要研究方向为机构学，凸轮的设计制造理论与装备。
E-mail：ytzhang@ysu.edu.cn