

# 通用 Stewart 平台运动学正向 数值求解方法及应用\*

张 辉

(清华大学精密仪器与机械学系 北京 100084)

王启明 叶佩青 汪劲松

(中科院国家天文台) (清华大学)

摘要: 为了得到通用 Stewart 平台的运动学正向求解非线性方程组的全部解或者使其求解效率满足实时应用, 研究人员进行了长期的研究, 找到多种解决方案, 但是不同方案之间缺乏系统的比较。为此, 对并联机构的运动学正向数值求解研究进行了综述; 并且, 针对通用 Stewart 平台的四种典型运动学正向数值求解方法, 在精度一致的前提下, 比较了计算效率。结果表明, 改进的 Jacobi 矩阵法的计算时间开销在 1 ms 以内, 计算效率最高, 建议在实时场合下应用。

关键词: Stewart 平台 并联机构 运动学正解

中图分类号: TH112

## 0 前言

近 10 年来, Stewart 平台型并联机构引起了研究者的极大兴趣, 同时人们也发现, 在机构设计、运动学分析及运动控制中, 都要用到此类机构的运动学正向求解。由于求解涉及一组包含六个参数的非线性方程, 在应用中很难给出解析解; 另外, 如果采用数值方法求解, 解的初值及求解实时性也是很大的问题。因此, 如何给出全部解析解以及解决求解实时性是该类机构运动学正向求解研究的重点。研究方法基本有两大类, 即解析法和数值法。解析法通过消元技术消去机构约束方程中的未知数, 从而使机构的运动学正向求解方程成为只含有一个未知数的高次方程。目前有很多特殊构型的并联机构的解析解已经获得<sup>[1-3]</sup>, 其中大部分的研究是针对存在复合铰的 6-3 型 Stewart 平台, 如运动平台上的铰点成对结合、固定平台的铰点分散分布, 或者布局正好相反, 或者两个平台上的铰点都是成对结合。Nanua 等<sup>[1]</sup>和 Innocenti<sup>[2]</sup>分别得出结论: 具有复合铰的 6-3 型 Stewart 平台的运动学正解存在 16 组解, 他们的研究基本上满足了 6-3 型 Stewart 平台的正向解析求解要求。Hunt 等<sup>[4]</sup>预计通用 Stewart 平台的解为 40、48、54 或者 64 组, Bhaskar<sup>[5]</sup>进一步给出 64 组解的结论, Wampler<sup>[6]</sup>、

MLHusty<sup>[7]</sup>则随后分别推导得出通用 Stewart 平台有 40 组解, 而 Merlet<sup>[8]</sup>更是认为全部解有 1 320 组。数值法求解可以划分为迭代搜索和优化方法两类, 其中, 迭代搜索方法又存在六维搜索<sup>[9,10]</sup>、三维搜索<sup>[11,12]</sup>、逐次逼近搜索<sup>[13]</sup>等; 优化方法是利用神经网络<sup>[14,15]</sup>和遗传算法<sup>[16,17]</sup>, 将非线性方程组的求解转化为优化问题求解。总的看来, 解析法的研究集中在寻找全部解, 而数值法的研究注重提高求解效率, 满足实时性的要求。在实际应用中, 如何快速找到合理解比找到全部解更有意义, 所以着重对数值法的研究进行详细分析, 逐一阐述其优缺点, 希望能够为实时应用场合选择合适的算法提供一定的依据。

## 1 运动学正解模型

图 1 是一个通用的 Stewart 平台结构图,  $P_A$  和  $P_B$  分别代表与固定平台和运动平台固联的坐标系。  $A_i$  表示固定平台上的六个铰点(以下如果没有特别说明,  $i=1, \dots, 6$ ),  $B_i$  表示运动平台上的六个铰点。  $A_i$  与  $B_i$  在各自坐标系中的坐标  $P_{iA}$  和  $P_{iB}$  已知, 六条驱动腿腿长  $L_i$  也已知, 则求解运动平台在笛卡儿坐标系中的位置( $x, y, z$ )和姿态( $\hat{a}, \hat{\alpha}, \hat{g}$ )的问题, 称为运动学正解, 其数学模型表达为

$$L_i = \left| \mathbf{R}_B^A \cdot \mathbf{P}_{iB} + \mathbf{T} - \mathbf{P}_{iA} \right| \quad (1)$$

式中  $\mathbf{R}_B^A$  ——坐标系  $P_B$  到坐标系  $P_A$  的旋转矩阵, 包含运动平台的姿态信息

\* 国家 863 计划(2002AA42051), 清华大学机械工程学院重点基金(091202001)和清华大学基础研究基金(092502006)资助项目。20020830 收到初稿, 20021030 收到修改稿

$T$ ——坐标系  $P_B$  的原点在坐标系  $P_A$  中的位置，代表运动平台的位置

$$T = (x, y, z)^T \quad (2)$$

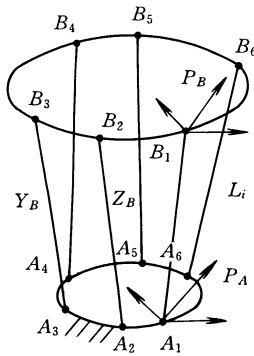


图 1 通用 Stewart 平台结构

由式(1)可知，并联机构的正向运动学问题是求解一个六维非线性方程组的问题。但是，同纯粹的非线性方程组求解不同的是，机构构型的特征在求解过程中可以被充分利用，所以，式(1)的求解存在多种方法。

## 2 运动学正向数值求解

### 2.1 迭代搜索

#### 2.1.1 六维迭代搜索

##### (1) Newton-Raphson 法

Newton-Raphson 法是求解非线性方程组比较有效的传统的数值方法，具体求解过程参见文献<sup>[9]</sup>。

众所周知，该方法的缺点是对初值的依赖性较大，迭代的初值决定了收敛目标，如果初值选取不当，迭代容易发散；另外，求解过程中有可能存在矩阵奇异，这两个问题至今没有得到很好的解决。Mcaree 等<sup>[17]</sup>提出的改善求解鲁棒性的方法仅仅适用于 3-6 型的 Stewart 平台，对通用型 Stewart 平台的研究正在进行中。但是，观察旋转矩阵的表达式，我们会发现，采用 RPY 角表示的旋转矩阵代替欧拉角表示的旋转矩阵，基本能够避免由欧拉角带来的 Jacobi 矩阵的奇异。由于 Stewart 平台机构设计完成后，其相应的工作空间已经确定，经过大量的计算发现，只要初值选取在工作空间中，Newton-Raphson 法均能够收敛到合理解上。

##### (2) 改进的 Jacobi 矩阵法

Jacobi 矩阵一般被定义为关节空间向操作空间运动速度传递的广义传动比<sup>[18]</sup>，Nguyen<sup>[10]</sup>将驱动腿的速度与运动平台在固定坐标系中的运动速度及欧拉角速度的传递比定义为改进的 Jacobi 矩阵，并

且给出了 Jacobi 矩阵的解析表达式，这样，在 Newton-Raphson 法中，数值求解 Jacobi 矩阵可以避免。根据 Nguyen<sup>[10]</sup>的结论可知，该方法能够得到很高的求解精度，求解误差完全可以忽略不计。

#### 2.1.2 三维迭代搜索

该类方法利用坐标系原点位置的选取<sup>[12]</sup>或者机构构型的对称特征<sup>[8,11]</sup>对式(1)进行简化，从而得到只包含三个转角参数(姿态)或者三个位置参数的三个非线性方程，然后再利用数值方法求解，以减少迭代搜索时间。但是在求解中发现，由于在消元中要求解行列式，所以，计算时间的开销并不能减少。Innocenti<sup>[12]</sup>提出的消元过程如下：将固定平台坐标系的原点建立在铰点  $A_1$  上，所以有

$$T^T \cdot T = L_1^2 \quad (3)$$

同时，对  $i = 2, \dots, 6$  有

$$(T + R_B^A P_{iB} - P_{iA})^T \cdot (T + R_B^A P_{iB} - P_{iA}) = L_i^2 \quad (4)$$

式(4)减式(3)并且整理得到

$$(R_B^A P_{iB} - P_{iA})^T \cdot T = P_{iA}^T \cdot R_B^A P_{iB} + (L_i^2 - L_1^2 - P_{iA}^2 - P_{iB}^2) / 2 \quad (5)$$

观察式(5)的左边可以得到，位置参数  $x, y, z$  呈线性关系，所以，未知的位置参数可以从六维非线性方程组中消去，也就是说，通过求解式(5)(当  $i = 2, 3, 4$  时)得到  $x, y, z$ ，再重新代入式(3)及式(5)( $i = 5, 6$ )，利用数值方法求解这三个非线性方程，得到姿态角，同时，位置也可以求得。Innocenti<sup>[12]</sup>还在文献中讨论了存在无理解的情况，他认为，存在无理解时，机构构型是不存在的。但是，如果仔细研究求解过程不难发现，消元过程中，当行列式降秩时，存在无穷多解，而此时，机构处于正常工作状态，例如，当运动平台平行于固定平台，且运动平台的转角为  $0^\circ$  时。

Merlet<sup>[8]</sup>采用的降维方法同 Innocenti<sup>[12]</sup>的思路相同，只是坐标系的建立更加通用，但是这种方法同样存在行列式为 0 的情况。Merlet<sup>[8]</sup>做了进一步的工作，在文献中给出了具体的奇异条件，以便在求解开始时，确定这种条件不能够满足。但是虽然在初值时确定不满足该条件，却难免在数值迭代搜索时遇到这些条件。

曲<sup>[11]</sup>也给出了一种三维搜索方法，不同的是，他利用已知的铰点对称信息，经过简化后，得到只包含位置参数的三个非线性方程。但是，这种降维方法利用旋转矩阵  $R$  的正交性质简化了约束方程，由于非线性方程组求解时初值的选取是任意的，初值选取不当，正交性质不能够满足，求解出现无理

化，所以，这种方法不是很实用。

### 2.2 逐次逼近方法

赵<sup>[13]</sup>利用机构运动的物理意义，将 Newton-Raphson 方法进行了物理化，使求解过程物理意义明确，即通过建立驱动腿与运动平台位姿速度间的传递关系，将 Jacobi 矩阵解析。此时，Newton-Raphson 方法的搜索方向被明确物理化为瞬时位置的瞬时速度方向，所以，该方法的每一次逼近方向是该位置的瞬时速度方向。求解基本原理同 Newton-Raphson 法。

### 2.3 优化方法

Boudreau 等<sup>[16]</sup>充分利用 Stewart 平台机构位置反解相对容易获得，把较难的位置正解问题转化为一个优化问题，利用遗传算法的隐含并行全局优化的特点，提出了基于遗传算法的数值正解算法。这种方法同 Newton-Raphson 方法相比，能够得到较大范围内的最优解。但是，Boudreau 等<sup>[16]</sup>进一步指出，遗传算法对 3 自由度机构来说，求解的优越性能够很好的表现出来，主要是能够保证解的全局收敛性。对于 6 自由度的 Stewart 平台构型，由于解空间中存在 40~60 多组解，如果扩大求解范围，往往得不到所需要的解，而是进入了其他的解域，造成解的不稳定。另外，相比之下，Newton-Raphson 方法的求解效率要高的多，同样的 3 自由度机构，采用同样的计算条件，遗传算法的求解时间为 0.13s，而采用 Newton-Raphson 法求解时间为 0.00085 s。所以 Boudreau<sup>[16]</sup>认为，更好的方法是将二者结合，利用遗传算法为 Newton-Raphson 法搜索初值，再采用 Newton-Raphson 迭代求解。

Yee<sup>[14]</sup>和 Geng<sup>[15]</sup>分别采用神经网络求解 Stewart 平台的运动学正解问题，具体方法略有不同。采用神经网络求解的一个缺点是在计算前需要花费时间训练网络，同时精度不高，Yee<sup>[14]</sup>给出的最好精度在 0.017 mm 和 0.017°。

## 3 计算效率的比较

根据文献[14,16]的结论，不再研究神经网络和遗传算法在 Stewart 平台型并联机构运动学正解中的应用。

由上面的综述可知，Newton-Raphson 法、改进的 Jacobi 矩阵法、降三维迭代搜索法以及逐次逼近法均为 Stewart 平台型并联机构的运动学正解提供了有效的数值求解方法。其中，Newton-Raphson 法全部采用数值方法，因此，准备工作量小，通用性好；其他三种方法则均需要一定的推导工作，而

且对不同的构型公式不能够通用。但是，正是由于这三种方法有一定的准备工作，所以，又提供了缩短计算时间的可能。所综述的文献中，不同的方法都有实例验证，但是，相互之间缺乏横向比较，因此，在 PII350 计算机上，采用 C 语言分别对四种求解方法编程，在达到相同精度的情况下，比较了各种算法的求解效率。固定平台和运动平台上铰点的位置参数见表 1、表 2。

表 1 平台 A 六个铰点位置 mm

A	1	2	3	4	5	6
X	0	-274.71	-549.41	-549.41	-274.71	0
Y	0	158.6	0	-317.2	-475.8	-317.2
Z	0	0	0	0	0	0

表 2 平台 B 六个铰点位置 mm

B	1	2	3	4	5	6
x	0	22.231	-131.7	-120.59	-7.483	-39.816
y	0	-25.078	-67.394	-36.469	-147.75	-153.6
z	0	0	0	0	0	0

运动平台 B 的起始点位姿  $P_B$  为(-0.039 288, -0.088 100, 635.980 176, -0.014 351, 0.003 476, 0.009 405)，姿态角的单位是度。从起点开始，运动平台做随机振荡运动，部分运动轨迹见图 2。图 2 中给出运行时间为 1 s，取 10 点进行运动学正解计算，对应的腿长见表 3。

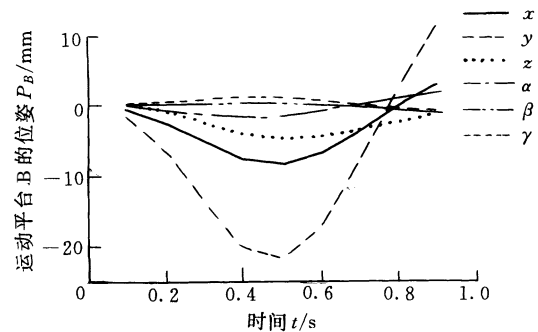


图 2 运动平台的运动轨迹

表 3 六个驱动腿腿长 mm

L	1	2	3	4	5	6
1	534.649	551.33	534.649	551.22	534.579	551.31
2	534.969	551.88	534.889	549.98	533.649	551.31
3	535.729	553.31	535.449	546.23	530.759	551.25
4	536.819	555.48	536.239	540.33	526.079	550.91
5	537.739	557.36	536.789	535.12	521.829	550.45
6	537.809	557.66	536.389	533.78	520.489	549.89
7	536.469	555.7	534.669	537.19	522.739	549.18
8	534.329	552.24	532.439	544.02	527.729	548.61
9	532.329	548.57	530.579	552.08	533.899	548.48
10	531.079	545.74	529.639	558.78	539.379	548.88

根据以上参数，分别采用四种方法进行求解，精度为  $10^{-5}$ ，得到相应的求解效率见图 3。由图 3

中可知，降三维迭代搜索方法的求解效率最低；Newton-Raphson 法和逐次逼近方法的效率接近；改进的 Jacobi 矩阵法的求解效率普遍高于其他三种方法，计算时间开销小于 1 ms。

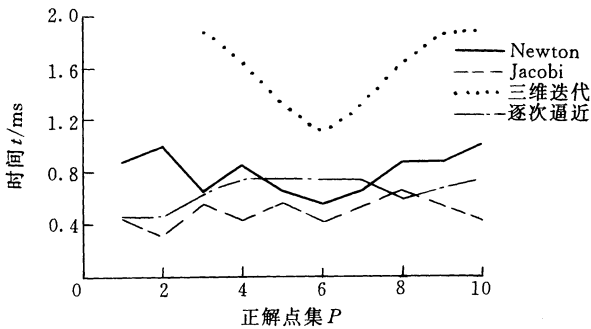


图 3 求解效率的比较

在计算中发现，降三维迭代搜索方法同其他三种方法相比，虽然迭代搜索维数减少，但是，在消元中要求解行列式，另外，从相同的初值点出发，迭代次数增多，所以导致最终的求解效率并没有得到提高。而改进的 Jacobi 矩阵法由于将 Jacobi 阵解析求解，所以，计算时间开销要少于数值法求解 Jacobi 阵的 Newton-Raphson 法。逐次逼近法的计算原理同 Newton-Raphson 法，所以二者的计算效率基本一致。

## 4 应用

并联机构的运动学正向求解在机构工作空间的分析以及机构设计中必不可少，这种情况下的求解效率并不重要，所以可以使用任何一种有效的解析或数值方法。由于 Newton-Raphson 法求解的有效性、通用性，值得推荐使用。但是在有实时性要求的场合下，如并联机构控制系统中，如果采用全闭环反馈控制，则在每一个插补周期中，均需要进行运动学正向求解，尤其在高速运动中，正向求解效率直接决定了系统所能达到的最高速度。另外，在并联机构用做测量设备时，由于测量结果由运动学正向求解得到，所以，测量效率在很大程度上也取决于正解效率。计算结果表明，在并联机构的全闭环反馈控制中，控制插补周期应控制在 1 ms 以上。

运动学正向求解的另一个重要应用场合是并联机构的故障恢复中。当并联机构处于失控状态时，只要各个执行腿的驱动器运行正常，就可以根据当前驱动器的记录值由运动学正向求解得到失控后的运动平台位姿，从而，尽快由故障中恢复。否则，

如果得不到失控位姿，只能对单个执行腿进行调整，如果机构的工作空间较小，容易使运动平台超出工作空间，损坏关节，引起新的故障。

## 5 结论

(1) Newton-Raphson 方法通用性好，求解过程稳定，可以用于实时及非实时场合。

(2) 在实时性要求较高的场合，建议采用改进的 Jacobi 矩阵法。

(3) 受到运动学正向求解效率的限制，存在实时求解的 Stewart 平台控制系统中，插补周期不能低于 1 ms。

## 参 考 文 献

- 1 Nanua P, Waldron K J, Murthy V. Direct kinematic solution of a Stewart platform. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1990, 6(4): 438~444
- 2 Innocenti C, Parenti-Castelli V. Direct position analysis of the Stewart platform mechanism. *Mech. Mach. Theory*, 1990, 25(6): 611~621
- 3 Bruyninckx H. Forward kinematics for Hunt-primrose parallel manipulators. *Mech. Mach. Theory*, 1999, 34(4): 657~664
- 4 Hunt K H, Primrose E J F. Assembly configurations of some parallel-actuated manipulators. *Mech. Mach. Theory*, 1993, 28(1): 31~42
- 5 Bhaskar Dasgupta, Mruthyunjaya T S. A canonical formulation of the direct position kinematics problem for a general 6-6 Stewart platform. *Mech. Mach. Theory*, 1994, 29(6): 819~827
- 6 Charles W Wampler. Forward displacement analysis of general six-in-parallel SPS(Stewart) platform manipulators using soma coordinates. *Mech. Mach. Theory*, 1996, 31(3): 331~337
- 7 Husty M L. An algorithm for solving the direct kinematics of general Stewart-gough platforms. *Mech. Mach. Theory*, 1996, 31(4): 365~380
- 8 Merlet J P. An algorithm for the forward kinematics of general parallel manipulators. In: *IEEE, Fifth International Conference on Advanced Robotics - '91 ICAR, Pisa, 1991*, Los Alamitos: IEEE Press, 1991: 1131~1135
- 9 徐士良. Fortran 常用算法程序集. 第 2 版. 北京:机械工业出版社, 1995
- 10 Charles C Nguyen, Zhou Zhen Lei, Sami S Antrazi. Efficient computation of forward kinematics and Jacobian

- matrix of a Stewart platform-based manipulator. In : IEEE, Proc. of the Southeastcon' 91, Williamsburg, 1991, Los Alamitos : IEEE Press, 1991 : 869~874
- 11 曲义远, 黄真. 空间六自由度并联机构位置的三维搜索方法. 机器人, 1989, 3(5) : 25~29
- 12 Innocenti C, Parenti-Castelli V. A Novel numerical approach to the closure of the 6-6 Stewart platform mechanism. In : IEEE, Fifth International Conference on Advanced Robotics - '91 ICAR, Pisa, 1991, Los Alamitos : IEEE Press, 1991 : 851~855
- 13 赵新华, 彭商贤, 张伟军, 等. 一种分析并联机器人位置正解的高效算法. 天津大学学报, 2000, 33(2) : 134~137
- 14 Yee C S, Lim K B. Forward kinematics solution of Stewart platform using neural networks. Neurocomputing, 1997, 16(4) : 333~349
- 15 Geng Zheng, Haynes L S. Neural network solution for the forward kinematics problem of a Stewart platform. Robotics Computer-Integrated Manufacturing, 1992, 9(6) : 485~495
- 16 Boudreau R, Turkkan N. Solving the forward kinematics of parallel manipulators with a genetic algorithm. Journal of Robotic Systems, 1996, 13(9) : 111~125
- 17 McAree P R, Daniel R W. A fast, robust solution to the Stewart platform forward kinematics. Journal of Robotic Systems, 1996, 13(7) : 407~427
- 18 熊有伦. 机器人学. 北京 : 清华大学出版社, 1993

## FORWARD KINEMATICS OF GENERAL STEWART PLATFORM AND THE APPLICATION

Zhang Hui

(Tsinghua University)

Wang Qiming

(National Astronomical Observatories, CAS)

Ye Peiqing Wang Jinsong

(Tsinghua University)

**Abstract :** To obtain all solutions and high solving efficiency of the forward kinematics of general Stewart platform, which is a set of 6 highly nonlinear simultaneous equations with 6 unknowns, some methods are put forward after long-term studies. But no comparisons have been made among these methods systematically. So the studies of the forward kinematics of Stewart platform are reviewed firstly; then four typical numerical methods are analyzed. Under the same accuracy, the calculating efficiencies are compared. The results show that the method of modified Jacobi matrix can provide the highest solving efficiency. The calculating time is lower than 1 ms. It is an advisable choice when applied in real time.

**Key words :** Stewart platform Parallel manipulator  
Forward kinematics

作者简介: 张辉, 女, 1969 年出生, 博士, 副教授, 从事机床数控技术, 并联机构关键技术等方面的研究。