

# 双跨转子—轴承系统裂纹—碰摩耦合故障的稳定性\*

罗跃纲<sup>1,2</sup> 闻邦椿<sup>2</sup>

(1. 大连民族学院机电与控制工程研究所 大连 116600;  
2. 东北大学机械工程与自动化学院 沈阳 110004)

**摘要:** 建立带有裂纹—碰摩耦合故障的具有三轴承支承的双跨弹性转子系统的动力学模型, 利用求解非线性非自治系统周期解的延拓打靶法和 Floquet 理论, 研究系统周期运动的稳定性及失稳规律。双跨裂纹转子系统以倍周期分岔形式失稳, 双跨碰摩转子系统以 Hopf 分岔形式失稳, 当裂纹较小时, 裂纹—碰摩耦合故障转子—轴承系统以 Hopf 分岔形式失稳; 随着裂纹深度的加大, 其影响逐渐显现, 系统以倍周期分岔形式失稳, 且失稳转速降低; 耦合故障转子系统响应谱上存在半倍工频成分的整数倍频率成分。研究结果为转子—轴承系统耦合故障诊断和安全运行提供了参考。

**关键词:** 转子—轴承系统 裂纹 碰摩 耦合故障 稳定性 分岔

中图分类号: O322

## Stability of the Two-span Rotor-bearing System Periodic with Coupling Faults of Crack and Rub-impact

LUO Yuegang<sup>1,2</sup> WEN Bangchun<sup>2</sup>

(1. Research Institute of Mechanism Electron and Control Engineering,  
Dalian Nationalities University, Dalian 116600;

2. College of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang 110004)

**Abstract:** A dynamic model is set up for the two-span rotor-bearing system with coupling faults of crack and rub-impact. Using the continuation-shooting algorithm for periodic solution of nonlinear non-autonomous system, the stability of the system periodic motion is studied by the Floquet theory. The unstable form of the rotor system with crack fault is period-doubling bifurcation, and that with rub-impact fault is Hopf bifurcation. The unstable form of the rotor system with coupling faults is Hopf bifurcation when the depth of crack is smaller. The influence to the response of the system increased along with the depth of crack, the unstable form of the rotor system with coupling faults is period-doubling bifurcation. The conclusions provide theoretic basis reference for the failure diagnosis of the rotor-bearing system.

**Key words:** Rotor-bearing system Crack Rub-impact Coupling faults Stability Bifurcation

## 0 前言

转轴裂纹、转定子碰摩是旋转机械中转子—轴承系统的常见故障, 对机械系统的安全运行有很大的危害性。MAYES<sup>[1]</sup>首次对带裂纹的实际发电机组透平轴进行了详细的分析和试验调查, 重点讨论了振动响应对裂纹深度的敏感性问题, 指出当裂纹深度与轴径比达 0.3 时, 2 倍频振动会发生明显变化等故障特征。LEE<sup>[2]</sup>用数值仿真和试验证明了裂纹开

闭条件及裂纹转子诊断问题理论分析的正确性。HUANG<sup>[3]</sup>对裂纹转子的稳定性进行了研究。MENG 等<sup>[4]</sup>采用 Jeffcott 裂纹转子模型, 研究了转子盘心的动力学特性, 从中提取裂纹特征信息。杨积东等<sup>[5]</sup>研究了裂纹扩展对转子动特性的影响。王立平等<sup>[6]</sup>对开闭裂纹转子系统在不同激励参数下的开闭状态进行计算机仿真研究。EHRICH<sup>[7]</sup>对 Jeffcott 转子转轴与轴承座之间的碰摩进行了系列研究, 发现了各种外激励情况下的转子系统碰摩现象。CHU 等<sup>[8]</sup>研究了油膜轴承支承的转子与定子的碰摩问题, 发现该系统典型的碰摩分岔现象。孙政策等<sup>[9]</sup>研究了扭转作用对碰摩转子系统的非线性动力学现象的影响。

\* 国家自然科学基金资助项目(50535010, 50775025)。20070406 收到初稿, 20070914 收到修改稿

在已有的转子系统裂纹和碰摩力学模型中,大多为单跨转子模型。单跨转子模型的分析对揭示转子系统的运行机理和故障特性起了很大作用,但是工程上许多大型转子系统是由多跨转子组成的,现有单跨转子分析结果不能完全揭示多跨转子系统的运动特性,更不能完全揭示具有裂纹—碰摩等故障系统复杂的非线性动力学特性。本文建立了具有非线性油膜力的双跨弹性转子—轴承系统裂纹—碰摩耦合故障模型,利用求解非线性非自治系统周期解的延拓打靶法和 Floquet 理论,对带有裂纹和碰摩故障转子系统的周期运动稳定性进行了分析。

## 1 系统力学模型和运动微分方程

图 1 所示为双跨裂纹—碰摩转子—轴承系统和

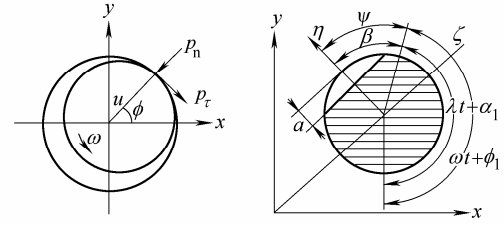
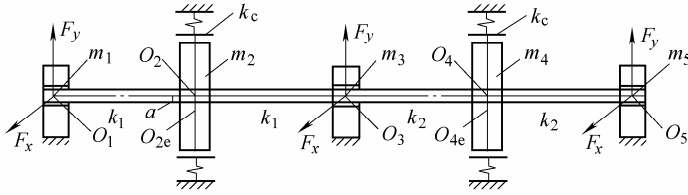


图 1 双跨裂纹—碰摩转子—轴承系统和碰摩力、裂纹断面模型

$$\begin{cases}
 \ddot{x}_1 + \xi_1 \dot{x}_1 + \eta_{11} \left[ 1 - \frac{\varepsilon \delta}{2} F(\psi) \right] (x_1 - x_2) + \frac{\varepsilon \eta_{11}}{2} F(\psi) [(x_1 - x_2) \cos 2\tau + (y_1 - y_2) \sin 2\tau] = \frac{1}{M_1} f_x(x_1, y_1) \\
 \ddot{y}_1 + \xi_1 \dot{y}_1 + \eta_{11} \left[ 1 - \frac{\varepsilon \delta}{2} F(\psi) \right] (y_1 - y_2) + \frac{\varepsilon \eta_{11}}{2} F(\psi) [(x_1 - x_2) \sin 2\tau - (y_1 - y_2) \cos 2\tau] = \frac{1}{M_1} f_y(x_1, y_1) - G \\
 \ddot{x}_2 + \xi_2 \dot{x}_2 + \eta_{21} \left[ 1 - \frac{\varepsilon \delta}{2} F(\psi) \right] (2x_2 - x_1 - x_3) + \frac{\varepsilon \eta_{21}}{2} F(\psi) [(2x_2 - x_1 - x_3) \cos 2\tau + (2y_2 - y_1 - y_3) \sin 2\tau] = \frac{1}{M_2} p_x(x_2, y_2) + u_1 \cos \tau \\
 \ddot{y}_2 + \xi_2 \dot{y}_2 + \eta_{21} \left[ 1 - \frac{\varepsilon \delta}{2} F(\psi) \right] (2y_2 - y_1 - y_3) + \frac{\varepsilon \eta_{21}}{2} F(\psi) [(2x_2 - x_1 - x_3) \sin 2\tau - (2y_2 - y_1 - y_3) \cos 2\tau] = \frac{1}{M_2} p_y(x_2, y_2) + u_1 \sin \tau - G \\
 \ddot{x}_3 + \xi_3 \dot{x}_3 + \eta_{31} \left[ 1 - \frac{\varepsilon \delta}{2} F(\psi) \right] (x_3 - x_2) + \frac{\varepsilon \eta_{31}}{2} F(\psi) [(x_3 - x_2) \cos 2\tau + (y_3 - y_2) \sin 2\tau] + \eta_{32} (x_3 - x_4) = \frac{1}{M_3} f_x(x_3, y_3) \\
 \ddot{y}_3 + \xi_3 \dot{y}_3 + \eta_{31} \left[ 1 - \frac{\varepsilon \delta}{2} F(\psi) \right] (y_3 - y_2) + \frac{\varepsilon \eta_{31}}{2} F(\psi) [(x_3 - x_2) \sin 2\tau - (y_3 - y_2) \cos 2\tau] + \eta_{32} (y_3 - y_4) = \frac{1}{M_3} f_y(x_3, y_3) - G \\
 \ddot{x}_4 + \xi_4 \dot{x}_4 + \eta_{42} (2x_4 - x_3 - x_5) = \frac{1}{M_4} p_x(x_4, y_4) + u_2 \cos \tau \\
 \ddot{y}_4 + \xi_4 \dot{y}_4 + \eta_{42} (2y_4 - y_3 - y_5) = \frac{1}{M_4} p_y(x_4, y_4) + u_2 \sin \tau - G \\
 \ddot{x}_5 + \xi_5 \dot{x}_5 + \eta_{52} (x_5 - x_4) = \frac{1}{M_5} f_x(x_5, y_5) \\
 \ddot{y}_5 + \xi_5 \dot{y}_5 + \eta_{52} (y_5 - y_4) = \frac{1}{M_5} f_y(x_5, y_5) - G
 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{式中 } F(\psi) = \frac{1 + \cos \psi}{2} \quad \psi = t - \phi_0 + \beta - \arctan \frac{y}{x}$$

$$\xi_i = \frac{c_i}{m_i \omega} \quad \eta_{i1} = \frac{k_1}{m_i \omega^2}$$

$$\eta_{i2} = \frac{k_2}{m_i \omega^2} \quad M_i = \frac{c \omega^2}{\delta_i}$$

$$G = \frac{g}{c \omega^2} \quad x_i = \frac{X_i}{c} \quad y_i = \frac{Y_i}{c}$$

碰摩力、裂纹断面模型,中间以联轴节相连,将系统质量等效集中于各圆盘中心及各轴承支座处。忽略扭转振动和陀螺力矩,只考虑系统横向振动。转子两端采用对称结构的滑动轴承支承,  $O_1$ 、 $O_3$ 、 $O_5$  为轴瓦几何中心,  $O_2$ 、 $O_4$  为转子几何中心,  $O_{2e}$ 、 $O_{4e}$  为转子质心,  $m_1$ 、 $m_3$ 、 $m_5$  为转子在轴承处集中质量,  $m_2$ 、 $m_4$  为在圆盘处的等效集中质量。圆盘与轴承之间为无质量弹性轴,  $k_1$  和  $k_2$  为弹性轴刚度,  $k_c$  为转定子的碰摩刚度。轴承半径为  $R$ , 轴承长度为  $L$ ; 在轴的中间有一深度为  $a$  的弓形横向裂纹。

设自左至右端转子的轴心径向位移分别为  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_3, y_3)$ ,  $(x_5, y_5)$ ; 转盘处径向位移分别为  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_4, y_4)$ ; 则系统的量纲—运动微分方程为

$$f_x = \frac{F_x}{\delta} \quad f_y = \frac{F_y}{\delta} \quad \delta_i = \frac{\mu\omega RL}{m_i g} \left(\frac{R}{c}\right)^2 \left(\frac{L}{2R}\right)^2$$

$$\tau = \omega t \quad u_i = \frac{e_i}{c}$$

$\varepsilon, \delta$  为仅与裂纹深度  $a$  有关的相对刚度参数<sup>[5]</sup>,  $F(\psi)$  为裂纹开闭函数,  $\beta$  为裂纹方向与偏心之间的夹角,  $\phi_0$  为初相位,  $c_1, c_3, c_5$  为转子在轴承处阻尼系数,  $c_2, c_4$  为转子圆盘阻尼系数,  $x_i, y_i$  为相对于轴承间隙  $c$  的量纲一位移,  $F_x, F_y$  为量纲—非线性油膜力分量<sup>[10]</sup>,  $\delta_i$  为 Sommerfeld 修正数,  $\mu$  为润滑油动力粘度,  $\omega$  为激励频率.  $\tau$  为量纲—时间,  $u_1, u_2$  为转子量纲—偏心量,  $p_x(x_2, y_2), p_y(x_2, y_2), p_x(x_4, y_4), p_y(x_4, y_4)$  为转子系统碰摩力在  $x, y$  方向的分量<sup>[10]</sup>.

## 2 系统周期运动稳定性分析

### 2.1 系统周期运动及稳定性求解方法

不平衡转子—轴承系统动力学问题可归结为以下形式的非自治系统<sup>[11]</sup>

$$\dot{X} = F(X, t, \omega) \quad (X, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \quad (2)$$

式中  $X$  为系统的状态矢量,  $\omega$  为系统参数. 利用 Poincaré 映射可以将求解连续动力系统的周期解及判稳问题转换为求解 Poincaré 映射的不动点及判稳问题, 即求解以下形式的非线性方程组

$$G(X, \omega) = X - P(X, \omega) = 0 \quad (3)$$

的零解问题.  $P$  为 Poincaré 映射算子.

通过求解式(3)的同伦曲线  $X = X(\omega)$  的方法确定迭代初值, 即求解下述常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dot{X}(\omega) = -[G'_X(X, \omega)]^{-1} G'_\omega(X, \omega) \\ X(\omega_0) = X_0 \end{cases} \quad (4)$$

考虑到计算效率, 采用中点求积公式求解上述初值问题

$$\begin{cases} X_1 = X_0 - \Delta\omega [G'_X(X_0, \omega)]^{-1} G'_\omega(X_0, \omega) \\ X_{k+1/2} = X_k + \frac{1}{2}(X_k - X_{k-1}) \\ X_{k+1} = X_k - \Delta\omega [G'_X(X_{k+1/2}, \omega)]^{-1} G'_\omega(X_0, \omega) \end{cases} \quad (5)$$

式中  $X_k$  是第  $k$  步牛顿迭代的周期解,  $\Delta\omega$  为参数步长.

在算法中引入阻尼因子  $\lambda$  形成改进的牛顿迭代式

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k + \lambda\Delta X \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \\ J\Delta X = -G \end{cases} \quad (6)$$

式中  $J$  是 Jacobi 矩阵. 定义标量函数  $f(X)$

$$f(X) = \frac{1}{2} \|G(X)\|^2 \quad (7)$$

首先取  $\lambda = 1$ , 若式(5)得到的  $X_{k+1}$  是  $f(X)$  的下降点, 此时方法变为 Newton-Raphson 法, 具有二阶收敛速度; 若不然, 则逐步减小  $\lambda$  以便找到下降点. 为了使步长与  $f$  下降的速度相当, 利用式(8)判断  $X_{k+1}$  是否是  $f$  的下降点

$$f(X_{k+1}) \leq f(X_k) + \alpha \nabla f(X_{k+1} - X_k) \quad (8)$$

式中  $\alpha$  应取一个很小的正数, 一般选  $\alpha = 10^{-4}$ .

该方法既保留 Newton-Raphson 的二阶收敛速度, 又改善对初始值的依赖性, 成为有效的全局收敛算法. 迭代过程中可以求出周期解对应的状态转移矩阵, 其矩阵特征值称之为 Floquet 乘子. 根据 Floquet 乘子在复平面上的位置, 可以分析系统周期解的稳定性和确定分岔类型.

### 2.2 故障转子系统的稳定性和分岔分析

系统参数为:  $m_1=m_5=4.0$  kg,  $m_2=m_4=32.1$  kg,  $m_3=8.0$  kg,  $R=25$  mm,  $L=12$  mm,  $c=0.11$  mm,  $\mu=0.018$  Pa·s,  $c_1=c_5=1\ 050$  N·s/m,  $c_2=c_4=2\ 100$  N·s/m,  $c_3=1\ 150$  N·s/m,  $k_1=k_2=25$  MN/m,  $k_c=45$  MN/m,  $f=0.1, b=0.01, \delta_0=0.2$  mm,  $e_1=0.05$  mm,  $e_2=0.05$  mm,  $\beta=\pi/2, \phi_0=0$ .

利用打靶算法, 追踪系统的周期不平衡响应, 求得不同转动角速度(简称转速, 下同)下系统的周期解. 图 2 为量纲—裂纹深度  $a=0.7$  时耦合故障转子的响应, 表 1 为  $a=0.7$  时不同系统转速下转子的最大 Floquet 乘子. 由图 2a 和表 1 可见, 当系统转速  $\omega < 662$  rad/s 时, 主导 Floquet 乘子在复平面单位圆内, 因此系统周期解是渐近稳定的, 碰摩故障尚未发生. 当系统转速  $\omega = 662$  rad/s 时, 系统周期解的 Floquet 乘子以一对共轭复数方式穿出单位圆, 根据 Floquet 理论可知系统发生了 Hopf 分岔, 系统响应由周期 1 分岔为拟周期运动, 并发生碰摩. 图 2b 为利用四阶定步长 Runge-Kutta 法直接数值积分得到的系统响应的分岔图, 其验证了打靶法得到的结果的正确性. 进一步分析耦合故障转子系统在其它转速下的分岔特性, 表 2 为系统在某些转速下对应的最大 Floquet 乘子, 可以看到在系统在不同的转速时, 会发生 Hopf 分岔、倍周期分岔和鞍结分岔等分岔形式.

图 3 和图 4 分别为碰摩和裂纹故障转子系统的响应图, 双跨裂纹转子系统以倍周期分岔形式失稳, 失稳转速为  $\omega = 541$  rad/s; 双跨碰摩转子系统以 Hopf 分岔形式失稳, 失稳转速为  $\omega = 669$  rad/s. 同图 2 的耦合故障比较可见: 碰摩故障对裂纹—碰摩耦合故障转子系统的稳定性起主要作用, 系统响应的失稳分岔形式与单一碰摩故障时一致, 均以 Hopf 分岔形式失稳.

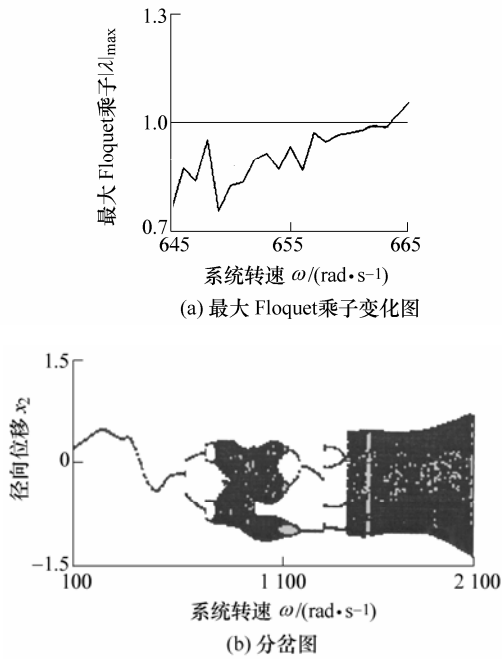


图 2  $a=0.7$  时耦合故障转子系统的响应曲线

表 1  $a=0.7$  时不同系统转速下转子的最大 Floquet 乘子

系统转速 $\omega(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$	最大 Floquet 乘子 $ \lambda _{\text{max}}$	系统转速 $\omega(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$	最大 Floquet 乘子 $ \lambda _{\text{max}}$
641	0.727 81	660	0.980 37
645	0.768 10	661	0.989 42
650	0.832 60	662	1.004 31
655	0.941 97	663	1.008 72
658	0.957 53	664	1.033 67
659	0.975 86	665	1.067 16

表 2  $a=0.7$  时不同系统转速下耦合故障转子周期解的特性

系统转速 $\omega(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$	最大 Floquet 乘子 $ \lambda _{\text{max}}$	结论
650	0.832 60	周期解稳定(周期 1)
662	1.004 31	Hopf 分岔(周期 1→拟周期)
670	1.012 90	Hopf 分岔(拟周期→周期 2)
765	1.128 67	倍周期分岔(周期 2→周期 4)
1 360	1.127 39	Hopf 分岔(周期 2→周期 4)
1 480	1.243 28	鞍结分岔(周期 4→拟周期)

进一步分析裂纹深度对系统周期运动稳定性的影响。图 5 为  $a=1.0$  时耦合故障转子系统的响应，表 3 为  $a=1.0$  时不同系统转速下转子的最大 Floquet 乘子，可见，当系统转速  $\omega < 659 \text{ rad/s}$  时，主导 Floquet 乘子在复平面单位圆内，因此系统周期解是渐近稳定的。当系统转速  $\omega = 660 \text{ rad/s}$  时，系统周期解的 Floquet 乘子通过  $(-1, 0)$  穿出单位圆，根据 Floquet 理论可知系统发生了倍周期分岔，由周期 1 分岔为周期 2 运动。与图 2 比较可见，对于裂纹一碰摩耦合故障转子—轴承系统，当量纲一裂纹深度小于 0.7 时，碰摩故障对转子系统的影响占主要地位，系统以 Hopf 分岔形式失稳；而当量纲一裂纹深度为 1.0

时，随着裂纹深度的加大，其影响逐渐显现，系统以倍周期分岔形式失稳，且失稳转速降低，即稳定性降低，系统更容易失稳。

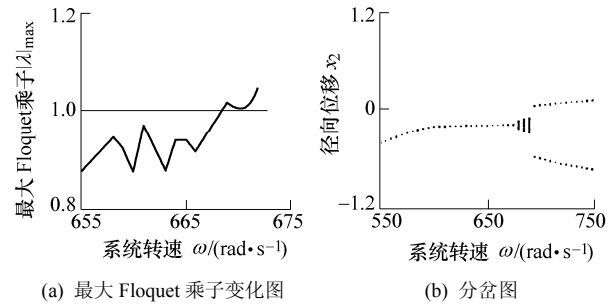


图 3 碰摩故障转子系统的响应曲线

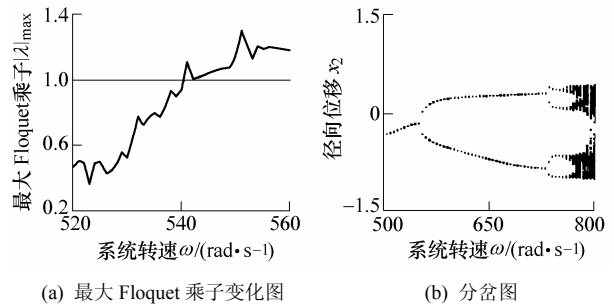


图 4 裂纹故障转子系统的响应曲线

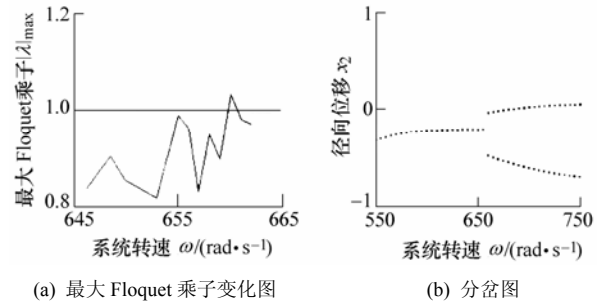


图 5  $a=1.0$  时耦合故障转子系统的响应曲线

表 3  $a=1.0$  时不同系统转速下转子的最大 Floquet 乘子

系统转速 $\omega(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$	最大 Floquet 乘子 $ \lambda _{\text{max}}$	系统转速 $\omega(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$	最大 Floquet 乘子 $ \lambda _{\text{max}}$
635	0.833 74	658	0.964 03
640	0.855 84	659	0.952 51
650	0.820 16	660	1.037 46
655	0.902 20	661	0.984 30
657	0.991 91	662	0.974 58

### 3 双跨转子试验研究

双跨转子系统试验台和碰摩装置如图 6 所示，为接近实际情况，试验所使用的是圆形碰摩装置，用来模拟局部的碰摩行为，定子材质为黄铜。裂纹轴的量纲一裂纹深度为  $a=0.7$ 。图 7 为耦合故障转子系统升降速瞬态过程的三维谱阵图，其幅值谱图上不但有 1/2 倍工频成分，还有 2/2、3/2、4/2、5/2 等

1/2 倍工频成分的整数倍频率成分, 这些频域的特点可以作为裂纹—碰摩耦合故障的诊断依据。

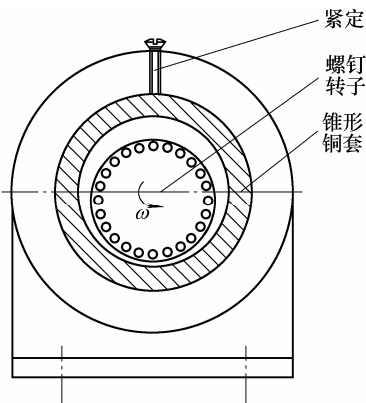
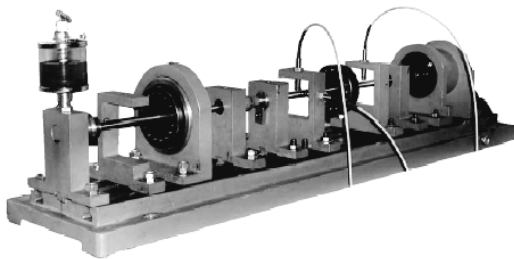


图6 双跨转子系统试验台和碰摩装置图

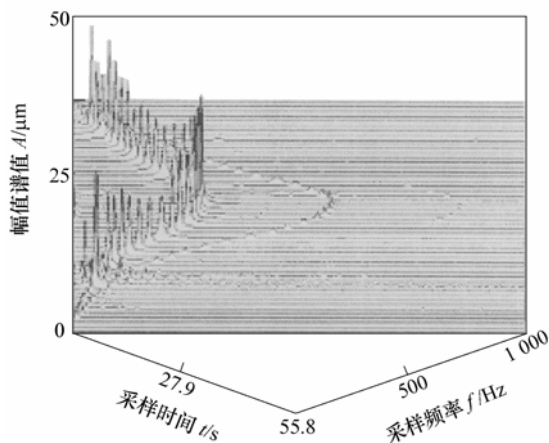


图7 耦合故障转子系统升降速瞬态过程的三维谱阵图

## 4 结论

(1) 建立了带有裂纹—碰摩耦合故障的多跨转子—轴承系统非线性动力学模型, 利用求解非线性非自治系统周期解的延拓打靶方法计算系统的稳定周期解, 结合 Floquet 理论讨论了系统周期运动的稳定性及其失稳规律。

(2) 双跨裂纹转子系统以倍周期分岔形式失稳, 双跨碰摩转子系统以 Hopf 分岔形式失稳, 且带有裂纹故障的转子系统更容易失稳。

(3) 对于裂纹—碰摩耦合故障转子—轴承系统, 当裂纹较小时, 碰摩故障对转子系统的影响占主要地位, 系统以 Hopf 分岔形式失稳; 随着裂纹深

度的加大, 其影响逐渐显现, 系统以倍周期分岔形式失稳, 且失稳转速降低, 即稳定性降低, 系统更容易失稳。

(4) 通过试验研究发现: 耦合故障转子系统响应谱上不但有 1/2 倍工频成分, 还有 2/2、3/2、4/2、5/2 等 1/2 倍工频成分的整数倍频率成分, 这些时域和频域的特点可以作为裂纹—碰摩耦合故障的诊断依据。

## 参 考 文 献

- [1] MAYES I W. Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor[J]. ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1984, 106(2): 139-145.
- [2] LEE C W. Modeling of a simple rotor with a switching crack and its experimental verification[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 1992, 114(2): 217-225.
- [3] HUANG S H. Vibration and stability of a rotating shaft containing a transverse crack[J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 162(3): 387-401.
- [4] MENG G, GASCH R. Stability and stability degree of a cracked flexible rotor supported on journal bearings[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2000, 122(1): 116-125.
- [5] 杨积东, 徐培民, 闻邦椿. 裂纹扩展对转子动特性的影响[J]. 东北大学学报, 2001, 22(4): 203-206.  
YANG Jidong, XU Peimin, WEN Bangchun. Character of a flexible rotor with crack propagation[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2001, 22(4): 203-206.
- [6] 王立平, 杜润生, 史铁林, 等. 转子开闭裂纹的计算机仿真与特性分析[J]. 中国机械工程, 2000, 11(7): 721-723.  
WANG Liping, DU Runsheng, SHI Tielin, et al. Computer simulation and characteristic analysis of a rotor with a switching crack[J]. China Mechanical Engineering, 2000, 11(7): 721-723.
- [7] EHRICH F. Observations of sub-critical super-harmonic and chaotic response in rotor-dynamics[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 1992, 114(1): 93-100.
- [8] CHU F, ZHANG Z. Bifurcation and chaos in a rub-impact Jeffcott rotor system[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 210(1): 1-18.
- [9] 孙政策, 徐健学, 周桐, 等. 碰摩转子中弯扭耦合作用的影响分析[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(11): 1163-1169.

(下转第 132 页)