

DOI: 10.3901/JME.2010.17.140

# 五轴加工刀具姿态球面 NURBS 曲线设计及优化\*

张小明<sup>1</sup> 朱利民<sup>1</sup> 丁汉<sup>1</sup> 赵灿<sup>2</sup>

(1. 上海交通大学机械与动力工程学院 上海 200240;

2. 黑龙江科技学院现代制造工程中心 哈尔滨 150027)

**摘要:** 基于刚体空间转动的四元数表达, 以有理运动描述五轴数控加工中刀具姿态变化。将刀具姿态点等同于单位球面上的点, 建立单位球面上的点和四元数空间中的点之间的一一映射关系, 从而将离散刀具姿态插值问题归结为在四元数空间插值曲线设计问题。设计出的单位球面上的曲线(刀具姿态曲线)具有通常三维欧式空间 NURBS 曲线的表达形式, 可以直接输入支持双 NURBS 插补的高端数控系统。基于四元数空间度量, 以最小二乘准则优化刀具姿态 NURBS 曲线, 明显改善优化前复杂曲面五轴加工留下的过切线。

**关键词:** 有理运动 球面 NURBS 曲线 刀具姿态 插值与优化

**中图分类号:** TP391.7

## Sphere NURBS Curve Design and Optimization of Tool Orientations in Five-axis Machining

ZHANG Xiaoming<sup>1</sup> ZHU Limin<sup>1</sup> DING Han<sup>1</sup> ZHAO Can<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240;

2. Modern Manufacture Engineering Center, Heilongjiang University of Science and Technology, Harbin 150027)

**Abstract:** The motion of tool orientation is expressed in the frame of rational motion based on the parameterization of rigid body displacement with quaternion. With the identity of tool orientation points and the points on unit sphere, the 1-1 mapping from points on unit sphere to elements of quaternion space is constructed. Thus the problem of interpolation of discrete tool orientation is transformed to that of interpolatory curve design in quaternion space. The obtained NURBS curve has the same mathematical expression as that in Euclidean 3-dimension space, and as a result it can be inputted directly to some CNC system with double-NURBS interpolator. Least square method based on the quaternion space metric is applied to the tool orientations optimization. When the optimized tool orientation is used for milling, the overcut is reduced.

**Key words:** Rational motion Sphere NURBS curve Tool orientation Interpolation and optimization

## 0 前言

五轴联动数控加工相对于传统的三轴联动数控加工, 在提高加工质量、降低加工成本和减少加工时间等方面有着明显的优势。五轴数控加工也是制造叶片、叶轮、螺旋桨等复杂零件的有效手段。

在数控加工中, 刀具路径的生成对加工效率和

质量至关重要<sup>[1]</sup>。在五轴联动数控加工中刀具路径包括两部分: 一是刀触点的平动, 其实质是  $\mathbf{R}^3$  空间中质点的运动; 二是刀轴的转动, 也就是刀具姿态的变化, 由于刀具姿态可以用单位矢量来表达, 因此姿态变化的实质是单位球球面  $S^2$  上质点的运动。在五轴联动加工中, 由于刀具姿态可以实时调整, 因此可以避免刀具的干涉和碰撞, 而且刀具相对于工件表面可以处于最有效的切削状态, 提高了加工效率和加工精度, 但同时必须实时地确定每个插补周期刀具的姿态。

针对在复杂曲面加工中直线插补和圆弧插补

\* 国家重点基础研究发展计划(973 计划, 2005CB724103)和上海市基础研究重点(07JC1402)资助项目。20091118 收到初稿, 20100220 收到修改稿

的很多不足,目前主要的数控系统生产厂商都提供参数样条插补代码,如 FANUC 公司提供的用于 NURBS 插补的 G06.2 代码和西门子公司提供的用于 NURBS 插补的 BSPLINE 代码。虽然这些高档数控系统支持 NURBS 插补,但前提是必须提供符合这些系统要求的刀具路径格式,目前,以西门子 840D(SINUMERIK 840D)为代表的高档数控系统已采用固定间距的双 NURBS 曲线描述刀具路径。

给定一系列的刀具姿态点矢量  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{m+1}$ , 这些姿态点矢量可以看成是单位球面上的离散点,对这些离散点进行插值运算以生成一条连续的轨迹有很多种方法,如 Lagrange 多项式插值、参数三次曲线等,但这些方法不能保证生成的曲线上的点仍然在单位球面上,更重要的是这些生成的曲线不符合 ISO 国际标准。LO<sup>[2]</sup>以传统的欧拉角描述五轴加工中刀具的姿态,但欧拉角描述刚体姿态存在奇异性,且直接对欧拉角插值,算法不具备坐标不变形。SHOEMARK<sup>[3]</sup>从计算机图形学角度最早基于单位四元数表达将欧氏空间  $\mathbf{R}^3$  上的 Bézier 曲线推广到转动群  $SO(3)$  上,导出了球面 Bézier 曲线。PARK 等<sup>[4]</sup>进一步将  $\mathbf{R}^3$  上的 Bézier 曲线推广到一般的黎曼流形上,并给出了该结论在机构运动学上的应用,这些工作本质上是以弯曲空间上的测地线类比  $\mathbf{R}^3$  上的直线,将  $\mathbf{R}^3$  上构造 Bézier 曲线的 De-Casteljau 方法推广到紧 Lie 群和黎曼流形上,但数学概念比较抽象,测地线计算需要用数值方法解偏微分方程,计算量大,运用于工程上往往是不可行的。王宁等<sup>[5]</sup>讨论了球面上的 NURBS 曲线,将  $\mathbf{R}^3$  空间计算 B 样条曲线的 DeBoor 算法推广到球面上,仍然没有突破前述思路,而且这种球面上的 NURBS 曲线不具有  $\mathbf{R}^3$  上 NURBS 曲线的表达形式。对给定的两个单位四元数,HO 等<sup>[6]</sup>用球面四元数插值这两点生成中间的一系列四元数,然后通过干涉检验的结果来不断调整刀具姿态。FLEISIG 等<sup>[7]</sup>提出了单位球面上的 Bézier 曲线设计方法,以单位球面上相邻离散点间大圆弧长为参数节点,用五次球面 Bézier 样条插值离散点,但由于刀具的平动和刀轴的转动采用不同的参数,为了协调平动和转动,需要重新参数化。

另一方面,注意到 CAGD 领域积累了很多成熟有效的方法,JUTTNER 等<sup>[8]</sup>以有理运动的控制结构类比 Bézier 曲线和 B 样条曲线的控制多边形,从而可以将 Bézier 曲线和 B 样条曲线几何算法运用于运动设计之中,经过分段有理 B 样条运动,刚体上点的轨迹为 NURBS 曲线。JUTTNER 等的工作虽然不能自然地导出球面 NURBS 曲线表达形式,但对运

用有理运动来设计插值型的刀具姿态 NURBS 曲线具有一定的启发意义。ZHANG 等<sup>[9]</sup>用对偶四元数描述刀具空间运动,最早将有理运动应用到数控加工中,类似 HO 等<sup>[6]</sup>的做法,以干涉检验结果反馈调整刀具姿态。

综合上述的工作,本文将给定的离散刀具姿态点矢量  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{m+1}$  等同于单位球面上的离散质点矢量,基于刚体空间有理运动的一般表达,推导单位球面上质点运动的四元数表达式,通过在四元数空间设计插值型 B 样条曲线,最终得到单位球面上的插值型 NURBS 曲线,该曲线具有欧氏空间  $\mathbf{R}^3$  NURBS 曲线的标准数学表达式,在此基础上如果以 NURBS 曲线统一描述刀尖点曲线和刀具姿态曲线,有望设计出基于 NURBS 插补原理的通用插补器,同时这种双 NURBS 格式的刀具路径也符合新一代数控系统 STEP-NC 接口标准<sup>[10]</sup>。试验表明,基于四元数空间度量优化刀具姿态 NURBS 曲线,可以明显改善整体叶轮叶片加工中的过切现象。

## 1 刀具姿态插值

利用四元数代数运算可以简单有效地处理刚体空间旋转问题<sup>[11]</sup>。对于给定的离散刀具姿态矢量  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_{m+1}$ , 刀具姿态变化表达式为

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{Q}_i \mathbf{p}_1 \mathbf{Q}_i^{-1} \quad i=1,2,\dots,m+1 \quad (1)$$

式中,四元数  $\mathbf{Q}_i = a_{i0} + a_{ix}\mathbf{i} + a_{iy}\mathbf{j} + a_{iz}\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{Q}_i^{-1}$  与  $\mathbf{Q}_i$  互逆。不失一般性,令  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{i}$ , 则  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}$ 。

令  $\mathbf{p}_i = p_{ix}\mathbf{i} + p_{iy}\mathbf{j} + p_{iz}\mathbf{k}$ , 则式(1)等价于

$$\begin{cases} a_{i0}^2 + a_{ix}^2 - a_{iy}^2 - a_{iz}^2 = p_{ix} \\ 2(a_{i0}a_{iz} + a_{ix}a_{iy}) = p_{iy} \\ 2(a_{ix}a_{iz} - a_{i0}a_{iy}) = p_{iz} \end{cases} \quad (2)$$

式(2)的解为

$$\mathbf{Q}_i = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \lambda_i)} (\cos \phi + \mathbf{i} \sin \phi) \times \left( \mathbf{i} + \frac{p_{iy}}{1 + p_{ix}} \mathbf{j} + \frac{p_{iz}}{1 + p_{ix}} \mathbf{k} \right) \quad (3)$$

式中,  $\phi$  是  $\mathbf{i}$  轴自由转角。

对于由式(3)求出的一系列的四元数点  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_{m+1}$ , 插值这些点生成四元数空间上连续的曲线  $\mathbf{Q}(t) = c_0 + c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ , 如图 1 所示。则刀具姿态的连续变化可以表示为

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{p}_1 \mathbf{Q}^{-1}(t) \quad (4)$$

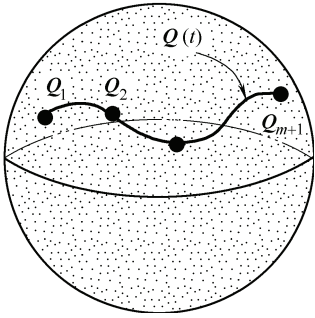


图1 四元数空间上的插值曲线

研究目标是要求刀具姿态点曲线  $p(t)$  位于单位球面上, 且经过离散刀具姿态矢量  $p_1, p_2, \dots, p_{m+1}$ , 同时曲线  $p(t)$  具有  $\mathbf{R}^3$  空间 NURBS 曲线形式。

## 2 插值有理 Bézier 曲线和 NURBS 曲线

由于刀具姿态矢量  $p = (p_x, p_y, p_z)^T$  是单位矢量, 因此可以将其看成是单位球面上的质点, 质点的齐次坐标为  $\bar{p} = (\bar{p}_0, \bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z)^T$ , 其中  $\bar{p}_0 \neq 0$ 。单位球面上质点在球面运动下的坐标变化可以表示成

$$\bar{p}(t) = Q(t)\bar{p}_i Q^{-1}(t) \quad (5)$$

两个四元数  $Q = wq$  和  $q$  表示的是同一个转动, 标量  $w$  可以看成是转动的权因子。对给定的一系列单位四元数  $q_i$  和相应的权因子  $w_i$ , 齐次四元数  $Q_i$  可以表达成

$$Q_i = w_i q_i \quad (6)$$

$m$  次 Bézier 四元数曲线表达式为

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{m+1} B_i^m(t) Q_i \quad (7)$$

式中, 四元数  $Q_i$  称为 Bézier 四元数控制点。

将式(7)代入式(5)得

$$\bar{p}(t) = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_i^m(t) B_j^m(t) Q_i \bar{p}_j Q_j^{-1} \quad (8)$$

由于

$$B_i^m(t) B_j^m(t) = \frac{C_i^m C_j^m}{C_{i+j}^{2m}} B_{i+j}^{2m}(t) \quad (9)$$

式(8)可以写为

$$\bar{p}(t) = \sum_{k=1}^{2(m+1)} B_k^{2m}(t) d_k \quad (10)$$

$$d_k = \frac{1}{C_k^{2m}} \sum_{i+j=k} C_i^{m+1} C_j^{m+1} Q_i \bar{p}_i Q_j^{-1} \quad (11)$$

式(11)中  $d_k$  的齐次坐标又可以写成

$$d_k = w_i^2 \begin{pmatrix} 1 \\ d_k^* \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$d_k^* = \frac{\frac{1}{C_k^{2m}} \sum_{i+j=k} C_i^{m+1} C_j^{m+1} Q_i \bar{p}_i Q_j^{-1}}{\frac{1}{C_k^{2m}} \sum_{i+j=k} C_i^{m+1} C_j^{m+1} Q_i Q_j^{-1}} \quad (13)$$

由式(10)~(13)可以看出, 质点在球面运动下的轨迹  $\bar{p}(t)$  是  $2m$  次有理 Bézier 曲线, 在  $\mathbf{R}^3$  空间中, 其坐标为

$$p(t) = \frac{\sum_{k=1}^{2(m+1)} w_i^2 B_k^{2m}(t) d_k^*}{\sum_{k=1}^{2(m+1)} w_i^2 B_k^{2m}(t)} \quad (14)$$

上述有理 Bézier 曲线是 NURBS 曲线的一种特例, 而且由于有理 B 样条运动可以转化成分段有理 Bézier 表达式, 通过节点插入和节点删除可以得到相应的 NURBS 曲线。

如下几点值得注意。

(1) 四元数符号选取问题。由式(3)给出的四元数  $\pm Q_i$  代表同一个姿态变化, 必须选择一个四元数  $Q_i$  或  $-Q_i$  以保证插值曲线的唯一性, 因此要求  $\arccos(Q_i \cdot Q_{i+1}) \geq 0$ 。

(2) 由式(3)给出的四元数  $\pm Q_i$  表达式中,  $\phi$  是刀具绕刀轴的旋转角, 是一个自由变量, 为了保证插值曲线的唯一性, 必须固定  $\phi$ 。

(3) 由于给出的是由式(3)求出的一系列的四元数点  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{m+1}$ , 要用 Bézier 曲线插值这些点, 必须首先反算 Bézier 曲线的控制顶点。

## 3 四元数空间刀具姿态优化

由于刀具姿态 NURBS 曲线是四元数空间  $Q^4$  上的曲线, 因此其  $k$  阶光顺性(即  $C^k, k \geq 1$ )不能由  $\mathbf{R}^3$  空间上的度量来确定, 而应由四元数空间  $Q^4$  上的度量来确定。

刀具姿态变化表达式(1)可以表示为

$$p_i = D(t)p_1 \quad i = 1, 2, \dots, m+1 \quad (15)$$

$$D(t) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

式中,  $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbf{R}^1$ , 所以刀具姿态曲线的光顺性可以由  $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$  上的度量来确定, 刀具姿态的光顺性问题就可以归结为四元数空间  $Q^4$  里的  $N$  个离散点  $\{q_i^1 \quad q_i^2 \quad \dots \quad q_i^N\} (i = 1, 2, 3, 4)$  的曲线拟合问题。

### 4 算例及试验

#### 4.1 球面 NURBS 曲线算例

考虑由文献[8]给出的离散刀具姿态点数据,运用上述有理运动方法可以设计出一条球面 NURBS 曲线,如图 2 所示。

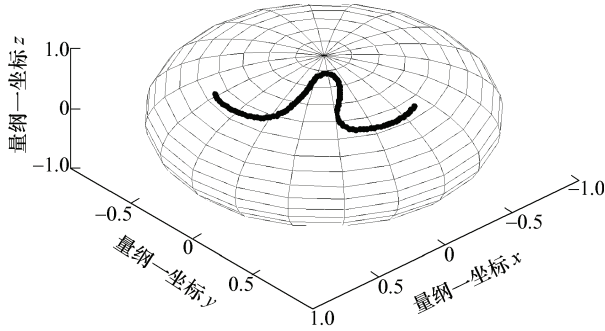


图 2 球面 NURBS 曲线

#### 4.2 刀具姿态 NURBS 曲线优化

考虑整体叶轮叶片的五轴球头刀加工,试验环境如图 3 所示。



图 3 叶轮加工试验环境

叶片前后缘头有两个特点:薄壁且曲率变化剧烈。这两个特点构成了缘头加工的特殊性。缘头部分曲率有一个剧烈的变化过程,在螺旋加工中刀轴需要转过 180°左右的角度。此时,相邻两个刀位点刀轴之间的夹角比叶身部分增大许多,并可能参差不齐,由此引起刀轴晃动,最后发生啃切,在叶片表面产生竖纹或凹坑并伴随着振动现象的发生,严重影响表面质量,如图 4 所示。如何使刀具姿态光顺变化是叶轮在五轴加工过程中的一个问题。

利用前述刀具姿态球面 NURBS 曲线优化方法可以对 UG 生成的刀具姿态曲线在四元数空间进行优化,优化后的刀具姿态球面曲线如图 5 所示,优化前和优化后的四元数空间刀具姿态曲线如图 6、7

所示。从图 5 中可以看出,去除刀具姿态曲线上的尖点后刀具姿态曲线光顺性得到改善。

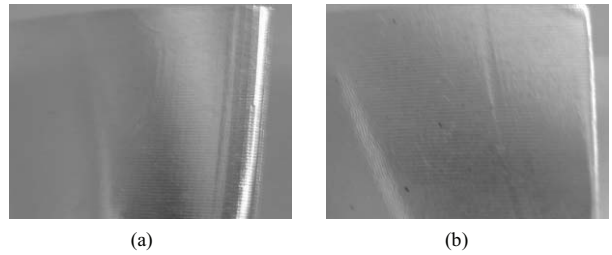


图 4 叶片加工中的过切现象

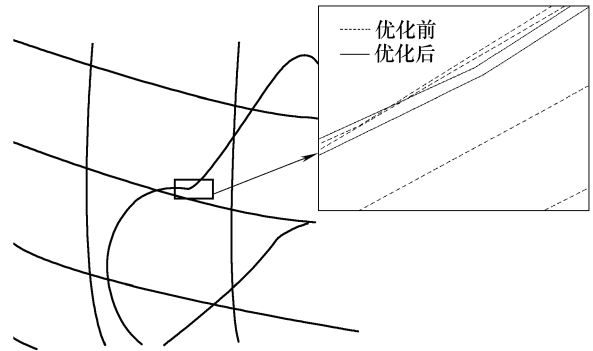


图 5 优化前和优化后刀具姿态球面曲线

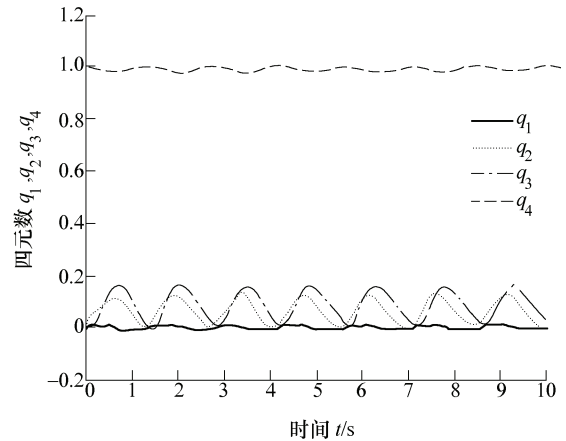


图 6 优化前四元数空间刀具姿态曲线

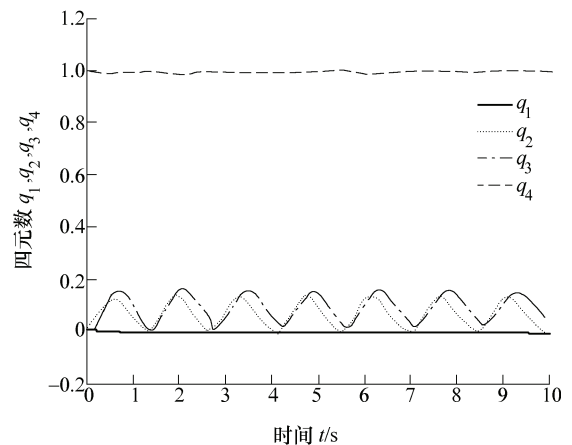


图 7 优化后四元数空间刀具姿态曲线

在刀具姿态优化过程中需要对生成的新的刀路进行 NC 校验(通过 VeriCut 仿真来实现),以保证刀具路径是无干涉的。经刀具姿态优化后,加工出的叶片如图 8 所示,在试验中观察到机床的振动明显减轻,有利于机床的平稳工作,通过结果可以看出优化后的叶片边缘表面的竖纹和过切明显减少。

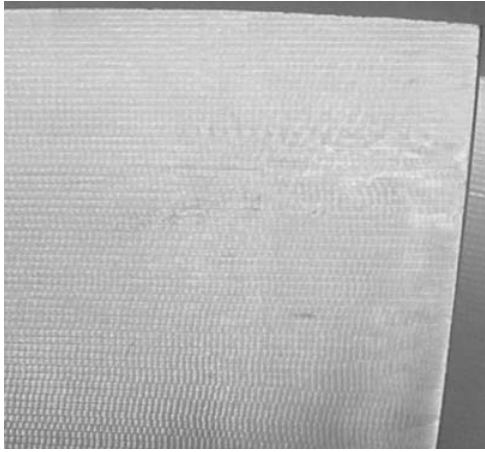


图 8 刀具姿态优化后加工叶片

## 5 结论

(1) 建立了刀具姿态点和四元数空间中的点之间的一一映射关系,基于刚体有理运动设计方法,将离散刀具姿态插值问题转化为在四元数空间插值型曲线设计问题。设计出的刀具姿态曲线具有  $\mathbf{R}^3$  空间 NURBS 曲线的表达形式,这种球面 NURBS 曲线满足高端数控系统要求的双 NURBS 刀具路径格式。

(2) 基于四元数空间度量,优化刀具姿态 NURBS 曲线,明显改善整体叶轮叶片加工中的过切现象。

## 参 考 文 献

- [1] CHOI B K, JERARD R B. Sculptured surface machining: Theory and applications[J]. Boston: Kluwer Academic, 1998.
- [2] LO C C. Real-time generation and control of cutter path

for 5-axis CNC machining[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 1999, 39: 471-488.

- [3] SHOEMARK K. Animating rotation with quaternion curves[J]. ACM Computer Graphics, 1985, 19(3): 245-254.
- [4] PARK F C, RAVANI B. Bézier curves on Riemannian manifolds and Lie groups with kinematics applications[J]. Journal of Mechanical Design, 1995, 117: 36-40.
- [5] 王宁,唐月红. 球面 NURBS 曲线[J]. 南京航空航天大学学报, 2001, 33(6): 596-598.
- WANG Ning, TANG Yuehong. Sphere NURBS curve[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics Astronautics, 2001, 33(6): 596-598.
- [6] HO M C, HWANG Y R, HU C H. Five-axis tool orientation smoothing using quaternion interpolation algorithm[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2003, 43: 1 259-1 267.
- [7] FLEISIG R V, SPENCE A D. A constant feed and reduced angular acceleration interpolation algorithm for multi-axis machining[J]. Computer-Aided Design, 2001, 33: 1-15.
- [8] JUTTLER B, WAGNER M G. Computer-aided design with spatial rational B-spline motions[J]. Journal of Mechanical Design, 1996, 119 (2): 193-201.
- [9] ZHANG W, ZHANG Y F, GE Q J. Five-axis tool path generation for sculptured surface machining using rational Bézier motions[J]. Computer-Aided Design and Applications, 2004, 1(2): 251-260.
- [10] SUH S H, CHUNG D H, LEE B E, et al. Developing an integrated STEP-compliant CNC prototype[J]. Journal of Manufacturing Systems, 2002, 21(5): 350-362.
- [11] ROSCHEL O. Rational motion design-a survey[J]. Computer-Aided Design, 1998, 30(3): 169-178.

作者简介: 张小明,男,1979 年出生,博士研究生。主要研究方向为数字化制造。

E-mail: cheungxm@gmail.com