

DOI: 10.3901/JME.2009.05.264

基于滚动导靴—导轨接触模型的高速曳引 电梯振动分析*

梅德庆¹ 杜小强^{1,2} 陈子辰¹

(1. 浙江大学现代制造工程研究所 杭州 310027;
2. 浙江理工大学机械与自动控制学院 杭州 310018)

摘要: 高速曳引电梯采用滚动导靴作为稳定导向机构,但其橡胶靴衬的非线性率相关特征使其在滚轮不圆度偏差和导轨不平顺激励下会产生振动。根据 Kalker 三维 Hertz 滚动接触简化理论建立滚动导靴—导轨的三维滚动接触模型,推导了滚动导靴和导轨之间的法向、纵向和横向接触刚度系数,用于计算接触区内的法向赫兹力和切向蠕滑力。考虑滚动导靴的不圆度偏差和导轨廓形偏差,拟合出滚动导靴—导轨不平顺激励的数学模型,进而建立了高速曳引电梯系统动力学方程。采用 Newmark 方法对模型求解后,计算结果与某电梯实际运行时的振动信号进行时域和频域比较,仿真结果与实测结果吻合较好,表明所提出的高速曳引电梯系统动力学模型合理可行,可以很好地预测高速曳引电梯的振动响应。

关键词: 高速曳引电梯 滚动接触 振动 非线性

中图分类号: TH113.1

Vibration Analysis of High-speed Traction Elevator Based on Guide Roller-rail Contact Model

MEI Deqing¹ DU Xiaoqiang^{1,2} CHEN Zichen¹

(1. Institute of Advanced Manufacturing Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027;
2. School of Mechanical Engineering & Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018)

Abstract: Guide rollers installed on high-speed traction elevator to make it run steadily have nonlinear rate-dependent characteristic, which induces the elevator vibration when it is stimulated by the roller roundness tolerance and the guide rail irregularity. According to the Kalker's simplified theory of three-dimensional Hertzian rolling contact, the contact model of guide roller-rail is set up and the expressions of the contact stiffness in three directions are derived to calculate the normal Hertzian force and the tangential creep force. The irregularity excitation between guide roller and rail is fitted by taking the roller roundness tolerance and the rail profile irregularity into account. The system dynamic equations of high-speed traction elevator are constructed. Using Newmark method, the vibration behavior of a high-speed traction elevator is analyzed. Compared with the practical measurement results both in time and frequency domain, the calculated results are in good agreement, which means that the system dynamic model of high-speed traction elevator based on guide roller-rail contact model is valid. Therefore the proposed model can be used to predict the vibration response of high-speed traction elevator.

Key words: High-speed traction elevator Rolling contact Vibration Nonlinear

0 前言

随着高层、超高层建筑的不断涌现以及工作节奏的不断加快,对高速电梯的需求不断增长,电梯

的舒适性指标也在不断提升。有效地预测和控制高速电梯的动力学性能和运动规律,是目前高速电梯开发中的关键技术问题。为保证运行的稳定性、减小噪声,高速曳引电梯采用滚动导靴作为导向机构,表层覆盖橡胶靴衬的滚轮在弹簧力的压紧下贴靠在 T 型导轨的工作面上,这样能够自动补偿导轨的几何形状与安装误差,具有缓冲吸振作用。

* 浙江省科技计划重大机电装备专项资助项目 (2006C11251)。
20080525 收到初稿,20081219 收到修改稿

在分析电梯系统动力学特性时，常将滚动导靴简化为线性弹簧—阻尼元件。然而，研究表明曳引电梯的滚动导靴具有非线性率相关特征^[1-2]，与导轨不平顺激励共同作用会引起电梯系统的振动，尤其是水平振动^[3-4]。因此，本文通过研究滚动导靴与导轨之间的滚动接触关系，在高速曳引电梯系统动力学模型中引入滚动导靴—导轨接触模型，从而提高电梯系统动态特性模拟的准确性，研究结果具有重要的理论意义和学术价值。

1 滚动导靴—导轨接触模型

弹性固体滚动时接触区内的相互作用状况称作滚动接触问题，滚动体之间在接触区法向存在 Hertz 接触力，在纵向和横向存在蠕滑力(横向是指垂直于滚动体截面的方向，纵向是指沿滚动方向，以下同)。同样，高速曳引电梯的滚动导靴与导轨之间也存在滚动接触作用。根据 Kalker 提出的三维 Hertz 滚动接触快速计算模型—简化理论^[5]，假设滚动导靴与导轨接触区中的任一点弹性位移仅和作用在该点的同方向力有关，将滚动导靴—导轨之间的接触点模拟成由三个相互垂直正交的弹簧组成的弹簧组(图 1)，图 1 中 k_{Gx} 、 k_{Gy} 和 k_{Gz} 分别是滚动导靴接触区各点沿 x 、 y 和 z 方向的刚度系数， k_{Rx} 、 k_{Ry} 和 k_{Rz} 则是导轨接触区各点沿 x 、 y 和 z 方向的刚度系数。根据这个假设模型，可以分别推导出滚动导靴—导轨接触区的法向接触刚度系数、纵向接触刚度系数和横向接触刚度系数。

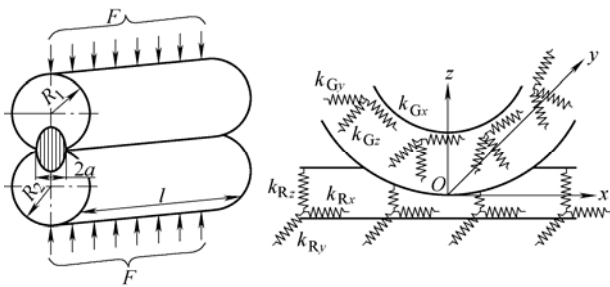


图 1 滚动导靴—导轨三维滚动接触模型

对于法向问题，根据 Hertz 弹性接触理论^[6]，在法向载荷 F 作用下，滚动导靴与导轨之间可以视为两个轴线平行的滚动圆柱体接触问题(其中一个圆柱体的截面半径为 R ，另一个圆柱体的截面半径为 ∞)，产生的矩形接触区域横向宽度与圆柱体轴长 l 相等，纵向宽度为 $2a = \sqrt{16FR/(\pi IE^*)}$ ，可以推导出滚动导靴与导轨接触区的法向接触刚度系数

$$k_z = \frac{\pi IE^*}{2} \tag{1}$$

式中， $\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$ ； E_1 、 E_2 分别为滚动导靴和导轨的抗拉弹性模量； ν_1 、 ν_2 分别为滚动导靴和导轨的泊松比。

对于纵向和横向问题，不考虑自旋情况，依据滑动方程^[5]和 Kalker 线性蠕滑率/力关系式^[7]推导接触刚度系数。由于 Kalker 线性蠕滑率/力关系式仅适用于椭圆接触域，所以根据面积等效原则将滚动导靴—导轨的矩形接触区域转化成椭圆域，易知该椭圆域纵向半轴长等于 a ，横向半轴长 $b = 2l/\pi$ 。从而可以推得滚动导靴与导轨之间纵向接触刚度系数和横向接触刚度系数分别为

$$\begin{cases} k_x = \frac{3}{4} C_{11} G l \\ k_y = \frac{3}{4} C_{22} G l \end{cases} \tag{2}$$

式中， G 为滚动导靴和导轨的合成切变模量； C_{ij} 为 Kalker 蠕滑系数，可根据 a/b 及合成泊松比 ν 由 Kalker 蠕滑系数表查得^[8]。合成切变模量 G 和合成泊松比 ν 依据式(3)计算

$$\begin{cases} \frac{1}{G} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \\ \nu = \frac{G}{2} \left(\frac{\nu_1}{G_1} + \frac{\nu_2}{G_2} \right) \end{cases} \tag{3}$$

式中， $G_1 = E_1/(2+2\nu_1)$ 、 $G_2 = E_2/(2+2\nu_2)$ 分别是滚动导靴和导轨材料的切变模量。

2 高速曳引电梯系统动力学模型

2.1 滚动导靴—导轨作用力

图 2 为曳引电梯轿体结构示意图，假设电梯轿体质心与中心重合，以轿体中心 O 为坐标原点建立笛卡尔坐标系 $Oxyz$ ， x 轴正向定义为面对轿门位于电梯外时指向右侧， y 轴正向定义为由轿体中心指向轿门， z 轴正向与重力加速度方向相反。本文考虑的电梯系统共有 18 自由度：轿体垂向运动 z 、轿体横移运动 x 、轿体侧移运动 y 、轿体侧翻运动 θ 、轿体俯仰运动 γ 、轿体旋转运动 φ 、各滚动导靴垂直于接触面的径向位移。为了说明方便，对每个滚动导靴进行编号： L_i 和 R_i 分别表示滚动导靴安装在 Oxz 平面的左半平面和右半平面内，其中， $i=1,2,3$ 表示位于轿体顶部的滚动导靴， $i=4,5,6$ 则表示滚动导靴位于轿体底部。这样，在与导轨的接触作用下，滚动导靴受到的纵向蠕滑力记作 F_{Vj} ，横向蠕

滑力记作 F_{Hj} , 法向赫兹力记作 F_{Nj} , 其中, $j = L_i, R_i$ 。

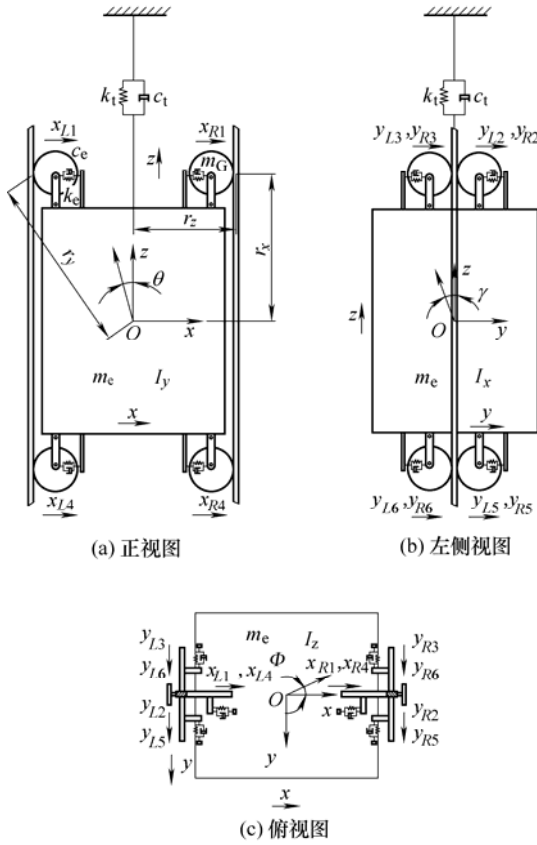


图 2 曳引电梯轿体结构及振动形式示意图

(1) 法向赫兹力。对于平滑导轨(轨面无不平整), 根据前面推导的法向接触刚度计算滚动导靴与导轨之间的法向赫兹力为

$$\begin{cases} F_{Nr} = -k_N x_r & r = L_1, R_1, L_4, R_4 \\ F_{Ns} = -k_N y_s & s = L_2, L_3, L_5, L_6, R_2, R_3, R_5, R_6 \end{cases} \quad (4)$$

式中, k_N 为滚动导靴与导轨之间的法向接触刚度; x_r 、 y_s 为对应下标编号的滚动导靴垂直于接触面的径向运动位移。

若各滚动导靴与对应的导轨工作面之间存在法向不平顺 $Z_{r(s)}(t)$, 则滚动导靴与导轨之间的法向赫兹力为

$$\begin{cases} F_{Nr} = -k_N (x_r - Z_r(t)) \\ F_{Ns} = -k_N (y_s - Z_s(t)) \end{cases} \quad (5)$$

(2) 纵向蠕滑力

$$F_{Vp} = -k_{Vp} z \quad p = L_i, R_i \quad (6)$$

式中, k_{Vp} 为滚动导靴与导轨之间的纵向接触刚度。

(3) 横向蠕滑力

$$\begin{cases} F_{HLi} = -k_{HLi} (y + (-1)^i \gamma r_x + \varphi r_y) \\ F_{HRi} = -k_{HRi} (y + (-1)^i \gamma r_x - \varphi r_z) \\ F_{Hj} = -k_{Hj} (x - \theta r_y) \\ F_{Hk} = -k_{Hk} (x + \theta r_y) \end{cases} \quad (7)$$

$i = 1, 4 \quad j = L_2, L_3, R_2, R_3 \quad k = L_5, L_6, R_5, R_6$

式中, k_{Hq} 为滚动导靴与导轨之间的横向接触刚度, ($q = L_i, R_i, j, k$); r_x 、 r_y 、 r_z 分别为任一组滚动导靴中心到 x 轴、 y 轴、 z 轴的距离。

由于 Kalker 线性蠕滑理论只适用于小蠕滑率的情形, 对于大蠕滑率的情况, 蠕滑力呈现饱和状态, 蠕滑力与蠕滑率成非线性关系, 因此需要采用 Johnson-Vermeulen 理论对滚动导靴与导轨之间的切向蠕滑力作如下修正^[9]

$$F_R' = \begin{cases} fF_N \left[\frac{F_R}{fF_N} - \frac{1}{3} \left(\frac{F_R}{fF_N} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(\frac{F_R}{fF_N} \right)^3 \right] & F_R \leq 3fF_N \\ fF_N & F_R > 3fF_N \end{cases} \quad (8)$$

式中, f 为滚动导靴与导轨之间的滑动摩擦因数; $F_R = \sqrt{F_V^2 + F_H^2}$ 为纵向和横向合成蠕滑力; F_N 为法向赫兹力。

引入修正系数 $\varepsilon = F_R'/F_R$, 得到修正后的蠕滑力

$$\begin{cases} F_V' = \varepsilon F_V \\ F_H' = \varepsilon F_H \end{cases} \quad (9)$$

2.2 系统动力学方程

设高速曳引电梯的轿体质量为 m_e , 绕各轴的转动惯量分别为 I_x 、 I_y 、 I_z , 单个滚动导靴质量为 m_G , 滚动导靴上压紧弹簧刚度为 k_e 、阻尼为 c_e , 曳引绳刚度为 k_t 、阻尼为 c_t , 曳引机垂向位移激励为 z_t 。根据 D'Alembert 原理可推导出高速曳引电梯系统动力学方程为

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = F \quad (10)$$

式中, m 为系统的质量矩阵; c 为系统的阻尼矩阵; k 为系统的刚度矩阵; F 为系统的广义力矢量; q 、 \dot{q} 、 \ddot{q} 分别为系统的广义位移、速度、加速度矢量。各矩阵矢量元素如下

(1) 质量矩阵 m

$$m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

式中

$$m_1 = \begin{pmatrix} m_e + 12m_G & & & & \\ & m_e + 8m_G & & & 0 \\ & & m_e + 4m_G & & \\ & & & I_y + 8m_G r_y^2 & \\ & & & & I_x + 4m_G r_x^2 \\ & & & & & I_z + 4m_G r_z^2 \end{pmatrix}$$

$m_2 = m_G \times I$ (I 是 12 阶单位矩阵)

(2) 阻尼矩阵 c

梯导轨的总体廓形偏差 δ_t 。

4 振动响应分析实例

根据上述理论,本文对某电梯试验塔内的一台额定速度为 3 m/s 的高速曳引电梯样机进行了动力学分析与仿真,并与试验测试结果进行比较。采用 Newmark 方法求解动力学方程,仿真时间步长与实测采样时间间隔均为 1/512 s。查机械设计手册可知^[10]:滚动导靴的橡胶靴衬的弹性模量为 7.84 MPa,泊松比为 0.47;导轨材料(Q235-A 镇静钢)的弹性模量为 206 GPa,泊松比为 0.3;橡胶与钢之间的滑动摩擦系数为 0.75。滚动导靴—导轨不平顺激励输入采用上节提出的激励模型,其中滚动导靴径向圆跳动取为 0.04 mm,导轨廓形偏差拟合曲线如图 3 所示。曳引机垂直位移激励采用与曳引机转动频率一致的简谐激励。电梯的其他结构参数与运行参数列于下表。

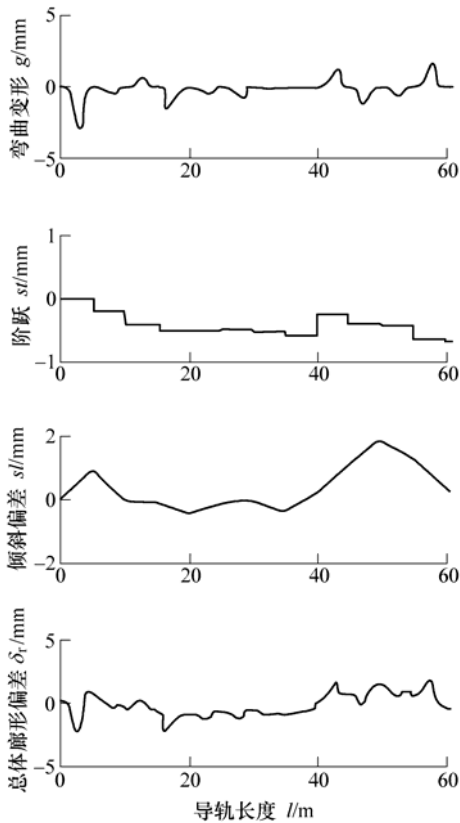


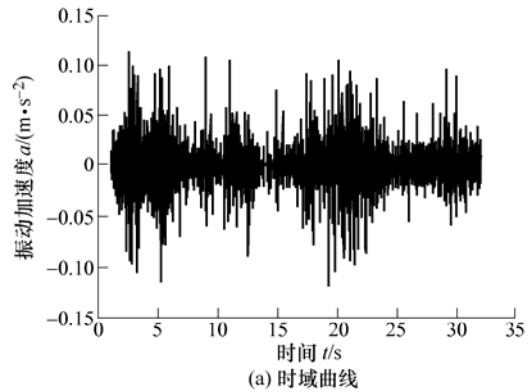
图3 拟合得到的电梯导轨廓形偏差

图 4、5 分别为仿真和实测得到的 3 m/s 高速曳引电梯轻载工况上行时轿厢水平方向振动加速度响应时域曲线与功率谱图。对比仿真结果和实测结果:仿真得到的水平方向振动加速度的最大值为 0.119 94 m/s²,方均根值为 0.015 04 m/s²;实测结果

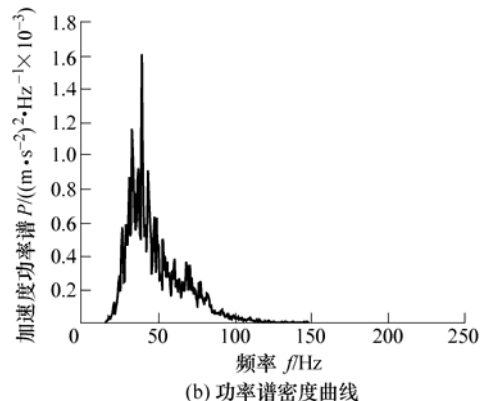
表 某电梯系统配置及测试工况参数

参数名称	参数值
轿厢质量 m_1/kg	1 150
轿体质量 m_2/kg	450
钢丝绳弹性模量 E/GPa	80
钢丝绳数量 n	8
钢丝绳直径 d_1/mm	10
曳引机转动角频率 $\omega/(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$	29.27
滚动导靴公称直径 d_2/mm	150
滚动导靴质量 m_G/kg	13.5
滚动导靴弹簧刚度 $k_G/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-1})$	12 500
轿体绕 x 轴转动惯量 $I_x/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	1 900.67
轿体绕 y 轴转动惯量 $I_y/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	1 800.74
轿体绕 z 轴转动惯量 $I_z/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	455.295
滚动导靴到 x 轴距离 r_x/m	1.9
滚动导靴到 y 轴距离 r_y/m	2.047
滚动导靴到 z 轴距离 r_z/m	0.761
单根导轨长度 l_s/m	5
导轨总长 l/m	61
提升高度 h/m	51
顶层高度 h_{top}/m	5.1
全程运行时间 t/s	32
最大速度 $v_{\text{max}}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	3
最大加速度 $a_{\text{max}}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	0.881

的水平方向振动加速度的最大值为 0.175 61 m/s²,方均根值为 0.015 74 m/s²。这表明仿真和实测响应两者在时域范围内幅值相近,从图 4 中也可看出两



(a) 时域曲线



(b) 功率谱密度曲线

图 4 3 m/s 电梯轿厢轻载工况下水平方向振动仿真结果

个时域曲线的变化趋势大体一致。由功率谱图可见，仿真与实测加速度响应的主要频率成分都集中在20~100 Hz 范围内，仿真结果的大部分主振频率与实测结果对应，有 26 Hz、32.5 Hz、36.5 Hz、39 Hz、43 Hz、48 Hz、52.5 Hz、60.5 Hz、70 Hz、77.5 Hz、82 Hz，但对应频率的主次程度并不一致，即在仿真与实测结果中水平振动响应能量的频率分布有差异。仿真和实测结果的功率谱图均显示能量最大的振动频率成分为 39 Hz。

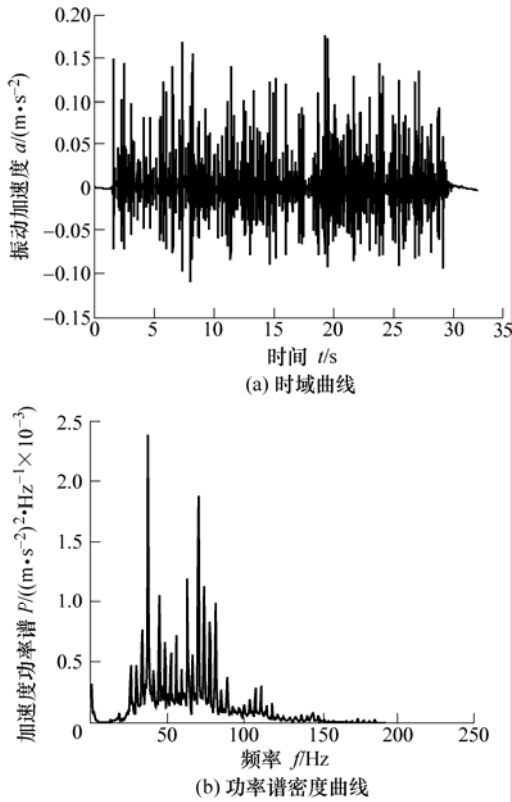


图5 3 m/s 电梯轿厢轻载工况下水平方向振动实测结果

图 6、7 分别为所分析的 3 m/s 高速曳引电梯额定载重工况下(1 250 kg)轿厢水平方向振动加速度响应计算结果与试验结果，两者在时域与频域均有较好的一致性。分析结果表明，在高速曳引电梯系统动力学模型中引入滚动导靴—导轨接触模型，相对于将滚动导靴简化为线性弹簧—阻尼系统的方法来说，能更准确地反映电梯系统的实际动态特性，可以用于指导高速曳引电梯的设计与分析任务。

导致仿真结果与实测结果之间存在误差的原因之一是系统模型和参数与实际电梯系统还存在一定差异，主要是：仿真所采用的系统惯性元件、弹性元件和阻尼元件的参数与实际值并不完全一致，尤其是系统阻尼的估计对仿真结果有很大影响；实际电梯轿体并非仿真模型中的单一刚体，而是由减振橡胶垫分隔的轿架和轿厢组成；轿体结构并非严

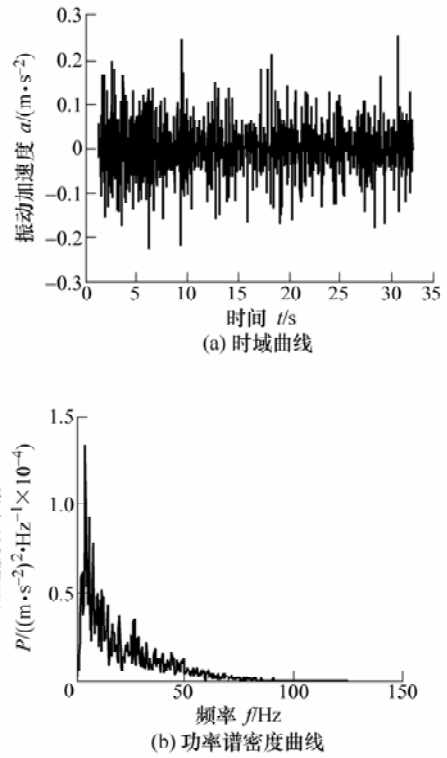


图6 3 m/s 电梯轿厢额定载重工况下水平方向振动仿真结果

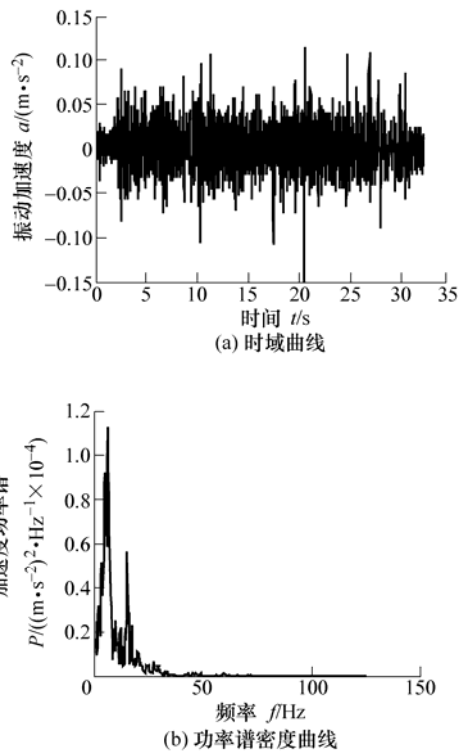


图7 3 m/s 电梯轿厢额定载重工况下水平方向振动实测结果

格对称，质心与结构中心并不重合；采用数学模型拟合的导轨激励与实际条件下的导轨不平顺形态不可能完全一致；电梯运行过程中导轨存在结构振动

和弹性变形, 从而影响轮轨滚动接触几何关系和蠕滑力。导致仿真结果与实测结果之间误差的另一个原因是采集电梯振动响应时受到测试仪器精度与测试环境的限制, 测试结果难免存在误差和噪声, 尽管对实测结果进行了小波去噪, 但得到的结果与系统的真实响应还是有一定差异的。因此, 可以预见如果能够使系统模型更加贴近实际系统, 进一步改进系统结构模型和激励模型, 例如, 提高系统模型阻尼参数的准确性、将曳引机和导轨作为系统子结构之一并进行详细建模、根据轿厢与轿架的实际尺寸及质量分布进行轿体子结构的动力学分析、采用更为真实的导轨不平顺输入等, 那么实现准确预测电梯系统的振动响应是完全有可能的。

5 结论

(1) 以 Kalker 的三维 Hertz 滚动接触简化理论为基础, 对滚动导靴与导轨之间的耦合接触关系进行了研究, 分别应用 Hertz 弹性接触理论与 Kalker 蠕滑理论推导了滚动导靴与导轨之间的三向接触刚度系数表达式。

(2) 建立了基于滚动导靴—导轨接触模型的高速曳引电梯系统动力学方程, 并应用数值分析方法对电梯系统振动响应进行求解。仿真结果与实测结果吻合较好, 表明所提出的高速曳引电梯系统动力学模型合理可行, 可以很好地预测高速曳引电梯系统的振动响应。

参 考 文 献

- [1] SINGH M P, SUAREZ L E, RILDOVA. Seismic response of rail-counterweight systems in elevators[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2002, 31(2): 281-303.
- [2] WEE H, KIM Y Y, JUNG H, et al. Nonlinear rate-dependent stick-slip phenomena: Modeling and parameter estimation[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(8): 1 415-1 431.
- [3] 张纯, 胡振东, 曾勤谦. 电梯轮轨耦合高频振动计算模型研究[J]. *力学季刊*, 2005, 26(3): 497-501.

ZHANG Chun, HU Zhendong, ZENG Qinian. Modeling investigation on high frequency vibration of rail/roller interaction in elevator[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2005, 26(3): 497-501.

- [4] SHIGEYUKI N, KEIJI M, MASAHARU T. Parametric vibration of elevator[J]. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C*, 1996, 62(8): 3 037-3 045.
- [5] 孔祥安, 江晓禹, 金学松. 固体接触力学[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1999.
KONG Xiang'an, JIANG Xiaoyu, JIN Xuesong. *Solid contact mechanics*[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1999.
- [6] JOHNSON K L. 接触力学[M]. 徐秉业, 罗学富, 译. 北京: 高等教育出版社, 1992.
JOHNSON K L. *Contact mechanics*[M]. Translated by XU Bingye, LUO Xuefu. Beijing: Higher Education Press, 1992.
- [7] KALKER J J. On the rolling contact of two elastic bodies in the presence of dry friction[D]. Delft: Delft University of Technology, 1967.
- [8] 卡尔克. 三维弹性体的滚动接触[M]. 李自力, 译. 成都: 西南交通大学出版社, 1993.
KALKER. *Three-dimensional elastic bodies in rolling contact*[M]. Translated by LI Zili. Chengdu: Southwest Jiaotong University Press, 1993.
- [9] 翟婉明. 车辆—轨道耦合动力学[M]. 2 版. 北京: 中国铁道出版社, 1997.
ZHAI Wanming. *Vehicle-track coupling dynamics*[M]. 2nd ed. Beijing: China Railway Publishing House, 1997.
- [10] 汝元功, 唐照民. 机械设计手册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995.
RU Yuangong, TANG Zhaomin. *Mechanical design handbook*[M]. Beijing: Higher Education Press, 1995.

作者简介: 梅德庆, 男, 1973 年出生, 博士, 副教授。主要研究方向为振动检测与控制、精密制造技术。

E-mail: medqmei@zju.edu.cn