

柔索驱动并联机器人动力学建模与数值仿真*

訾 斌 段宝岩 杜敬利

(西安电子科技大学机电工程学院 西安 710071)

摘要: 柔索驱动并联机器人采用柔索代替连杆作为驱动元件,并结合了并联机构和柔索驱动的优点。500 m 口径大射电望远镜(Five-hundred meter aperture spherical radio telescope, FAST)粗调系统通过 6 根索长的协调变化使馈源舱作跟踪射电源的 6 自由度运动,其工作特点与并联机器人类似,因此可被看作柔索驱动并联机器人。基于此,根据 FAST 5 m 缩比试验模型,首先应用悬链线解析表达式推导出柔索两端固定时索端拉力与索长之间的关系,用于求解特定长度的驱动柔索对处于某一位姿的馈源舱的作用力。其次,对该舱索系统进行逆运动学分析,采用拉格朗日方程建立柔索驱动并联机器人的逆动力学模型。最后,针对 FAST 5 m 缩比模型的设计方案进行动力学仿真,数值结果表明该动力学建模是合理的。

关键词: 柔索驱动并联机器人 悬链线解析表达式 动力学建模 数值仿真

中图分类号: TH751 O328

0 前言

随着射电天文科学的发展,国际社会对射电天文望远镜的观测能力提出了新的要求。新一代 500 m 口径大射电望远镜(Five-hundred meter aperture spherical radio telescope, FAST)是一个 500 m 口径、总接受面积达 1 km^2 的工程,该项目已经纳入国家“十一五”大科学与工程立项进程。工程的完成,必将对射电天文、深空通信等产生深远的影响。FAST 的创新设计方案是由 6 根柔索控制具有 6 自由度馈源舱跟踪射电源运动^[1-2],其工作特点与并联机器人类似,因此称其为一种柔索驱动并联机器人。柔索驱动并联机器人作为馈源舱支撑机构,属于 FAST 一级粗调系统保证馈源舱的运动定位精度达到厘米级;同时,安装在馈源舱内的精调 Stewart 平台对馈源的动态运动定位精度进行实时误差补偿,使得馈源的动态运动定位精度保持在毫米级。

柔索驱动并联机器人是 20 世纪 80 年代发展起来的新型机器人^[3]。由于采用柔索代替连杆作为机器人的驱动元件,使得柔索驱动并联机器人既具有并联机构高刚度、高精度、高负载能力的优点,又具有柔索机构质量轻的优点,同时,由于没有铰链副转角的限制,加大了工作空间。经过深入研究,现已形成比较完整的体系,并且形式多种多样^[4-5]。从控制观点看,柔索驱动并联机器人是多变量和本质上非线性的系统,同时又是复杂的耦合动力系统,每个控制任务本身就是一个动力学任务。为了尽可

能减少馈源舱实际运动与理想轨迹的偏差,以实现期望的目标,建立较为准确的动力学模型十分必要^[6]。已有很多文献对柔索驱动并联机器人的动力学进行了分析。SHIANG 等^[7]对 3 自由度索系并联机器人进行了动力学分析;MOTOJI 等^[8]对欠约束柔索机器人的动力学与控制进行了研究;PHAM 等^[9]研究了柔索驱动并联机器人的工作空间。不过这些文献都把柔索看作无质量的直线单元。文献[10]在考虑柔索质量的情况下对柔索驱动机器人进行了静力学分析。本文针对已经建成的 FAST 5 m 缩比试验模型的特点,使用悬链线解析表达式来模拟并分析柔索的力学特性^[11]。在此基础上采用拉格朗日方程建立了柔索驱动并联机器人系统的动力学模型,解决了已知馈源舱运动轨迹对柔索驱动并联机器人逆运动学、逆动力学分析的问题。同时为实现 FAST 柔索驱动并联机器人系统的精确控制奠定了基础。

1 柔索的力学分析

馈源舱的空间扫描运动是通过 6 根大跨度柔索以 $0.5 \sim 2.0 \text{ cm/s}$ 的速度牵引实现的。由于舱索系统的基频很低,在外部扰动作用下,该柔索驱动并联机器人系统的响应很慢,因此分析时使用舱体在某一静止位姿时柔索的静态拉力替代在该位姿时柔索系统的动态作用力,进行准动力学的简化分析。文献[12]计算结果表明,柔索在重力和惯性力的共同作用下,动态作用力与静态拉力的差别受馈源舱的速度和加速度的共同影响。当馈源舱以实际的观测速度运行时,静态拉力与动态作用力的差别不超过 1 N,而这一差别对柔索长度的计算影响较小,从而

* 国家自然科学基金(10433020, 50475171)和教育部留学回国人员实验室基金(030401)资助项目。20061113 收到初稿,20070717 收到修改稿

对馈源舱位姿产生的影响不大。当柔索长度锁定不变时,由精调平台的调整引起馈源舱运动的速度和加速度均不大于观测时舱体的运行速度和加速度,因此可以采用静态拉力代替动态作用力。这样不仅能够满足控制精度要求,而且可明显减小计算工作量,以便实现实时控制。

研究柔索驱动并联机器人系统力学模型时,假定柔索是完全柔性的,无扭转刚度且只能承受张力,同时其弹性变形可以忽略不计,而FAST 50 m模型现场试验也证明了这一假设的合理性^[13],故本文在对柔索进行力学分析时使用了相同的假设条件。

馈源舱柔索支撑系统中的6根柔索一端绕过塔顶滑轮,另一端与舱体固接。当舱体处于某一位姿时,柔索的索端位置都是已知的。考虑图1所示的柔索 i ($i=1,2,\dots,6$),在自重作用下保持平衡,其横截面积为 A ,单位索长的重力为 a_0 ,悬链线长度为 L_0 。定义重力的方向沿 z 轴负向。

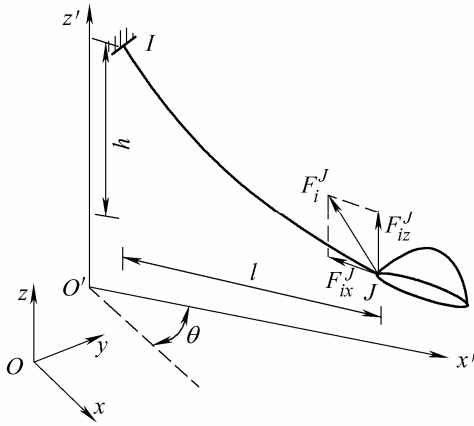


图1 一端固定的柔索单元

柔索在重力作用下平衡时的形状为一悬链线,设其两个端点 I, J 之间的水平跨距为 l ,竖直方向的高差为 h 。柔索 i 的水平张力记为 H_i ,端点 J 受到竖直向上的拉力 F_z^J 的作用。为简便起见,式(1)~(14)中省略了表示柔索编号的下标 i 。在这些边界条件下柔索的悬链线形状^[14]可以描述为

$$z = \frac{H}{a_0} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{a_0 x}{H} + \zeta \right) - \operatorname{ch} \zeta \right] \quad (1)$$

$$\zeta = \operatorname{sh}^{-1} \left(\frac{a_0 h}{2H \operatorname{sh} \eta} \right) - \mu \quad (2)$$

$$\mu = \frac{a_0 l}{2H} \quad (3)$$

对应的悬链线长度 L_0^2 满足

$$L_0^2 = \frac{l^2}{\mu^2} \operatorname{sh}^2 \mu + h^2 \quad (4)$$

柔索两端固定时 h, l 均为已知量,可以得到柔

索长度 L_0 关于 μ 的非线性函数为

$$f(\mu) = \frac{l^2}{\mu^2} \operatorname{sh}^2 \mu + h^2 - L_0^2 = 0 \quad (5)$$

将式(5)对 μ 求导可得

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = \frac{2l^2}{\mu^2} \operatorname{sh} \mu \left(\operatorname{ch} \mu - \frac{\operatorname{sh} \mu}{\mu} \right) \quad (6)$$

于是,采用具有二次收敛性的Newton-Raphson迭代法求解式(6)就可以得到与给定索长 L_0 对应的 μ ,以期在索长解算时获得更快的求解速度。限于篇幅有限,此处不再列出。

迭代时 μ 的初值可按下面方法确定。定义参数

$$\delta = \left[\frac{(L_0^2 - h^2)}{l^2} \right]^2 \quad (7)$$

证明 $\delta > 1$ 。设柔索两个端点 I, J 之间的弦长为 L ,由图1可知

$$L^2 = h^2 + l^2 \quad (8)$$

由于柔索悬链线长度 L_0 总是大于 L ,因此

$$L_0^2 > h^2 + l^2 \quad (9)$$

并且有

$$\delta = \left[\frac{(L_0^2 - h^2)}{l^2} \right]^2 > 1 \quad (10)$$

文献[15]表明,引入参数 δ ,使用下面的表达式就可得到一个很好的估计值,经过4~6次迭代即可收敛。

当 $1 < \delta \leq 3.67$ 时

$$\mu = [(120\delta - 20)^{1/2} - 10]^{1/2} \quad (11)$$

当 $3.67 < \delta < 4.5 \times 10^5$ 时

$$\mu = 2.337 + 1.095 \ln \delta - 0.00473(7.909 - \ln \delta)^{2.46} \quad (12)$$

得到 μ 后可直接由式(3)求出柔索的水平张力

H 。端点 J 对柔索竖直方向的作用力 F_z^J 可表示为

$$F_z^J = \frac{a_0}{2} \left(L_0 + h \frac{\operatorname{ch} \mu}{\operatorname{sh} \mu} \right) \quad (13)$$

于是,当柔索两端位置给定时,在柔索局部坐标系 $O'x'y'z'$ 中,柔索 i 对舱体的作用力 \mathbf{F}^J 可表示为

$$\mathbf{F}^J = (H \ F_z^J)^T \quad (14)$$

由于柔索 i 位于局部坐标系的 $O'x'z'$ 平面内(图1),为将柔索对舱体的作用力转换到全局坐标系中,特引入坐标变换阵

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \quad (15)$$

式中, θ_i 为柔索 i 局部坐标系的 $O'x'z'$ 平面与全局坐标系 Oxz 平面的夹角。坐标变换矩阵 \mathbf{B}_i 的实质是将

柔索的水平张力沿全局坐标系的 Oxy 平面进行分解。这样, 由全局坐标系到柔索局部坐标系的坐标变换矩阵可以表示为

$$\mathbf{B}_i^+ = \mathbf{B}_i^T = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

式中, \mathbf{B}_i^+ 表示 \mathbf{B}_i 矩阵的广义逆。

于是, 全局坐标系下柔索 i 对舱体的作用力

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i^J \quad (17)$$

2 柔索驱动并联机器人系统

FAST 5 m 柔索驱动并联机器人结构示意图如图 2 所示, 由柔索塔、柔索、馈源舱等组成。6 根柔索 $A_1B_1 \sim A_6B_6$ 的上端 $A_1 \sim A_6$ 与柔索塔相连, 下端 $B_1 \sim B_6$ 与馈源舱相连。柔索塔 $A_1 \sim A_6$ 均匀分布在一个圆周上, B_1 、 B_3 、 B_5 均匀地分布在舱体底圆上, B_2 、 B_4 、 B_6 在半球形舱体顶端 O_2 附近均匀分布。端点 B_i 与馈源舱连接情况的平面示意图如图 3 所示。

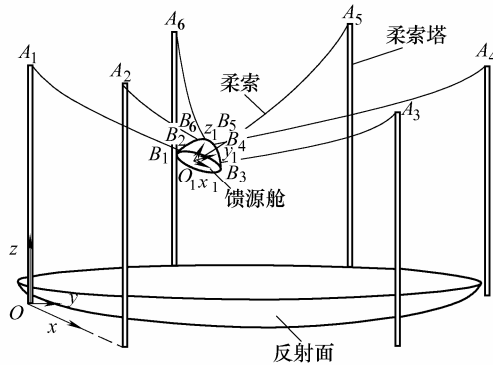


图 2 FAST5 m 柔索驱动并联机器人结构示意图

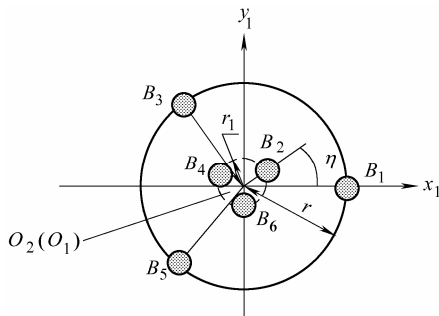


图 3 端点 B_i 与馈源舱连接情况的平面示意图

柔索驱动并联机器人是通过合理而精确地控制驱动柔索的伺服电动机, 确保各根柔索所需的长度, 从而实现馈源舱高精度跟踪期望轨迹。建立馈源舱的运动学和动力学方程需要如下几个坐标系: $Oxyz$ 是固结于柔索塔 1 底部的全局坐标系; $O_1x_1y_1z_1$ 是固结于馈源舱底圆上的局部坐标系。将馈源舱视为刚

体, 则馈源舱有 6 自由度。在本系统中, 馈源舱的位置和姿态可用 6 个量表示: 舱体局部坐标系的原点坐标 $O_1(x, y, z)$, 馈源舱绕 z 轴旋转的 α 角(横滚), 绕 y 轴旋转的 β 角(俯仰), 绕 x 轴旋转的 γ 角(偏转)。 $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ 选为广义坐标。

3 柔索驱动并联机器人运动学分析

图 2 中柔索塔高为 h , 六个塔基点构成一个正六边形, 边长为 a 。根据图 2 中的几何关系, 可求得柔索塔顶点相对于 $Oxyz$ 坐标系的 $A_1 \sim A_6$ 坐标分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{A_1} &= (0 \ 0 \ h)^T & \mathbf{r}_{A_2} &= (a \ 0 \ h)^T \\ \mathbf{r}_{A_3} &= \left(\frac{3}{2}a \ \frac{\sqrt{3}}{2}a \ h \right)^T & \mathbf{r}_{A_4} &= (a \ \sqrt{3}a \ h)^T \\ \mathbf{r}_{A_5} &= (0 \ \sqrt{3}a \ h)^T & \mathbf{r}_{A_6} &= \left(-\frac{1}{2}a \ \frac{\sqrt{3}}{2}a \ h \right)^T \end{aligned}$$

由图 4 可见, 柔索端点 B_i 的绝对矢径 $\mathbf{r}_{B_i} = (x_{B_i} \ y_{B_i} \ z_{B_i})^T$ 可由式(18)给出

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{B_i} &= \mathbf{r}_{O_1} + \mathbf{R} \mathbf{r}_{B_{i,1}} \quad i=1,2,\dots,6 \quad (18) \\ \mathbf{R} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \\ \cos \beta \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (19) \end{aligned}$$

式中, $\mathbf{r}_{O_1} = (x \ y \ z)^T$ 是舱体局部坐标系原点 O_1 的绝对矢径; $\mathbf{r}_{B_{i,1}}$ 是 B_i 点在局部坐标系中的相对矢径。 \mathbf{R} 是舱体关于姿态角 α, β, γ 的姿态矩阵。

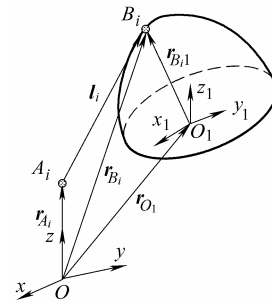


图 4 第 i 根柔索的相关矢量

由图 3 可知, $\mathbf{r}_{B_{i,1}}$ 与角度 η 有关。不妨假设馈源舱体和装有馈源的精调装置重心在舱体结构的中轴上, 若给定馈源点坐标, 则可得馈源舱结构的上顶点 O_2 , 馈源舱的底面圆心点的坐标 O_1 , 在舱体局部坐标系 $O_1x_1y_1z_1$ 中 $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ 点的坐标可

表示如下

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{B_1} = (r \ 0 \ 0)^T \\ \mathbf{r}_{B_3} = (r \cos \theta \ r \sin \theta \ 0)^T \\ \mathbf{r}_{B_5} = (r \cos 2\theta \ r \sin 2\theta \ 0)^T \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{B_2} = \left(r_1 \cos \eta \ r_1 \sin \eta \ \sqrt{r^2 - r_1^2} \right)^T \\ \mathbf{r}_{B_4} = \left(r_1 \cos(\eta + \theta) \ r_1 \sin(\eta + \theta) \ \sqrt{r^2 - r_1^2} \right)^T \\ \mathbf{r}_{B_6} = \left(r_1 \cos(\eta + 2\theta) \ r_1 \sin(\eta + 2\theta) \ \sqrt{r^2 - r_1^2} \right)^T \end{cases} \quad (21)$$

式中, r , r_1 分别是馈源舱底部三个索耳 B_1 、 B_3 、 B_5 和顶部 B_2 、 B_4 、 B_6 三个索耳的分布半径; 夹角 η 为常数; $\theta = 120^\circ$ 。

馈源舱与柔索塔连接点中心 A_i 、 B_i 在各自坐标系的坐标分别为 \mathbf{r}_{A_i} 、 \mathbf{r}_{B_i} , 如图 4 所示。

根据位置几何关系, 柔索长度矢量可表示为

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_{B_i} - \mathbf{r}_{A_i} \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (22)$$

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_{O_1} + \mathbf{R} \mathbf{r}_{B_{i1}} - \mathbf{r}_{A_i} \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (23)$$

柔索驱动并联机器人的 Jacobian 矩阵描述了柔索空间执行机构的运动速度与馈源舱运动速度之间的线性关系^[16], 即

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{O_1} \quad (24)$$

$$\dot{\mathbf{l}} = (\dot{l}_1 \ \dot{l}_2 \ \dot{l}_3 \ \dot{l}_4 \ \dot{l}_5 \ \dot{l}_6)^T \quad (25)$$

式中, \mathbf{J} 为 6×6 的 Jacobian 矩阵, $\dot{\mathbf{l}}$ 为关节空间执行机构的运动速度。

\mathbf{r}_{O_1} 为馈源舱的运动速度, 可用与之固联的舱体局部坐标系沿全局坐标系三轴的平动和绕三轴的转动来描述, 即

$$\dot{\mathbf{r}}_{O_1} = (\mathbf{v} \ \mathbf{w})^T = (\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma})^T \quad (26)$$

$$\mathbf{v} = (\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z})^T \quad \mathbf{w} = (\dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma})^T$$

式中, \mathbf{v} 和 \mathbf{w} 分别是馈源舱的速度和角速度矢量。

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial l_i}{\partial x} & \frac{\partial l_i}{\partial y} & \frac{\partial l_i}{\partial z} & \frac{\partial l_i}{\partial \alpha} & \frac{\partial l_i}{\partial \beta} & \frac{\partial l_i}{\partial \gamma} \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$i = 1, 2, \dots, 6$$

为方便起见, 使用简化符号推导 Jacobian 矩阵, 公式详见文献[2]。

4 柔索驱动并联机器人动力学分析

馈源舱刚体相对点 O_1 的惯量阵为

$$\mathbf{I}_{O_1} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (28)$$

为方便起见, 常采用固连于刚体的轴系, 同时令这轴系 $O_1x_1y_1z_1$ 和刚体在点 O_1 的各惯性主轴相重合。这样一来, 各惯量积 $I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$ 。馈源舱在全局坐标系 $Oxyz$ 下的惯量阵为

$$\mathbf{I} = \mathbf{R} \mathbf{I}_{O_1} \mathbf{R}^T \quad (29)$$

馈源舱刚体的动能是质量集中于质心的动能(平动)和绕质心简化转动动能(转动)的简单叠加。

集中于质心的动能为

$$T_1 = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} \quad (30)$$

绕质心转动的动能为

$$T_2 = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{I}_{O_1} \mathbf{R}^T \mathbf{w} = \frac{1}{2} (\mathbf{R}^T \mathbf{w})^T \mathbf{I}_{O_1} (\mathbf{R}^T \mathbf{w}) \quad (31)$$

柔索的质量与馈源舱的质量相比可忽略不计。

基于以上分析, 把柔索处理成为力元。因此柔索机器人系统的动能仅为馈源舱刚体的动能

$$T = T_1 + T_2 \quad (32)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (33)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \{ I_{xx} (\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta + \dot{\beta} \sin \alpha \cos \beta - \dot{\gamma} \sin \beta)^2 + I_{yy} [(\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cdot \cos \gamma) \dot{\alpha} + (\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) \dot{\beta} + \dot{\gamma} \cos \beta \sin \gamma]^2 + I_{zz} [(\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma) \dot{\alpha} + (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma) \dot{\beta} + \dot{\gamma} \cos \beta \cos \gamma]^2 \} \quad (34)$$

因此馈源舱系统的势能仅为馈源舱的重力势能 V , 可表示如下

$$V = mgz \quad (35)$$

式中, g 为重力加速度。

拉格朗日函数为

$$L = T - V \quad (36)$$

选广义坐标 $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ 为 $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$, 式(36)可化为

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2} \{ I_{xx} (\dot{q}_4 \cos q_4 \cos q_5 + \dot{q}_5 \sin q_4 \cos q_5 - \dot{q}_6 \sin q_5)^2 + I_{yy} [(\cos q_4 \sin q_5 \cdot \sin q_6 - \sin q_4 \cos q_6) \dot{q}_4 + (\cos q_4 \cos q_6 + \sin q_4 \cdot \sin q_5 \sin q_6) \dot{q}_5 + \dot{q}_6 \cos q_5 \sin q_6]^2 + I_{zz} [(\cos q_4 \cdot \sin q_5 \cos q_6 + \sin q_4 \sin q_6) \dot{q}_4 + (\sin q_4 \sin q_5 \cos q_6 - \cos q_4 \sin q_6) \dot{q}_5 + \dot{q}_6 \cos q_5 \cos q_6]^2 \} - mgq_3 \quad (37)$$

首先推导拉格朗日方程中所需要的拉格朗日函数对广义坐标 $[q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 q_6]$ 和广义速度 $[\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \dot{q}_4 \dot{q}_5 \dot{q}_6]$ 的偏导数。限于篇幅, 此处不再列出。

作用在馈源舱上的外力和力矩可以统一称为广义作用力 \mathbf{F} , 即

$$\mathbf{F} = (F_x F_y F_z M_\alpha M_\beta M_\gamma)^T = (f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6)^T \quad (38)$$

6 根柔索的张力矢量 \mathbf{u} 为

$$\mathbf{u} = (u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6)^T \quad (39)$$

式中, $u_i = |\mathbf{u}_i|$ ($i=1, 2, \dots, 6$), 见式(17)。则 \mathbf{F} 和 \mathbf{u} 的关系为^[17]

$$\mathbf{u} = -\mathbf{J}^T \mathbf{F} \quad (40)$$

拉格朗日方程式为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i \quad i=1, 2, \dots, 6 \quad (41)$$

把式(37)求导的各式以及式(40)代入式(41), 经过一系列变换, 可得求解柔索驱动并联机器人系统的逆动力学模型为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = -(\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{u}(t) \quad (42)$$

式中, \mathbf{q} 、 $\dot{\mathbf{q}}$ 、 $\ddot{\mathbf{q}}$ 分别为馈源舱的位姿、速度和加速度矢量, \mathbf{M} 为柔索机器人的惯性矩阵, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 为哥氏力离心力矩阵, $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ 为重力矩阵, $\mathbf{u}(t)$ 为柔索张力控制输入矢量。

式(42)中的 \mathbf{J} 为柔索驱动并联机器人的 Jacobian 矩阵, 且在整个运动空间内为非奇异。

采用上述柔索驱动并联机器人逆运动学和逆动力学模型, 可以根据已知的馈源舱运动规划求出需要的柔索驱动力。式(42)也可以改写为

$$\mathbf{u} = -\mathbf{J}^T [\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q})] \quad (43)$$

5 柔索驱动并联机器人数值算例

下面通过 FAST 5 m 柔索驱动并联机器人缩比试验模型的数值试验来分析动力学建模的合理性。FAST 5 m 模型中的相关参数如下: 塔高 $h=2.5$ m, 塔分布圆直径为 5 m, 相邻两塔之间距离 $a=2.5$ m, 反射面直径为 4 m, 柔索参数见 GB 1102-1974 (柔索断面积 $A=2.788 \times 10^{-5} \text{ m}^2$, 单位长度质量为 $m_0=0.00262$ kg/cm), 柔索直径为 1.0 mm。馈源舱参数如下: 馈源舱直径 $r=0.42$ m, 舱上三根索的索耳分布圆直径 $r_1=0.03$ m, 安装在馈源舱上的二级精调系统和馈源舱的总质量取为 20 kg,

$\eta=8^\circ$ 。数值仿真结果如图 5~9 所示。 I_{O_1} (单位为 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$) 取

$$\mathbf{I}_{O_1} = \begin{pmatrix} 0.782 & 0 & 0 \\ 0 & 0.782 & 0 \\ 0 & 0 & 0.293 \end{pmatrix}$$

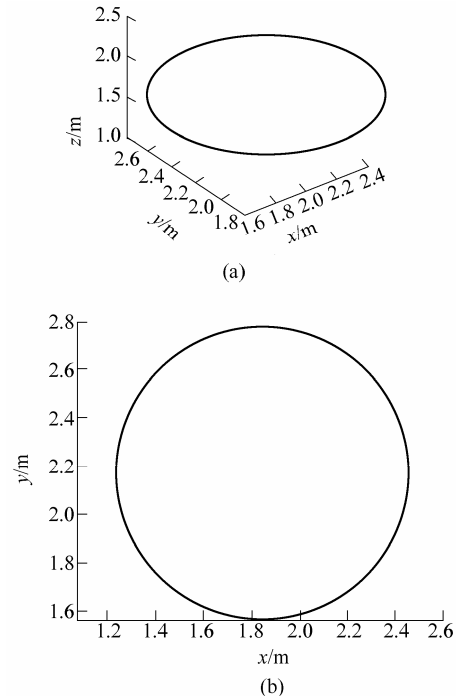


图 5 馈源舱中心跟踪期望轨迹

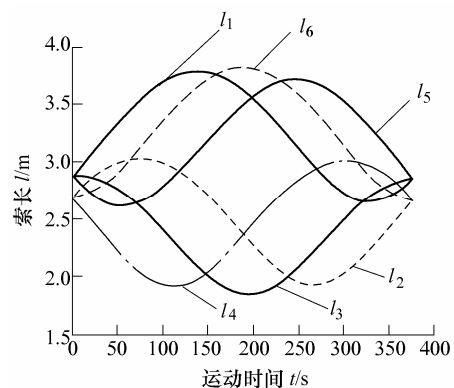


图 6 馈源舱沿水平圆运动中的索长变化

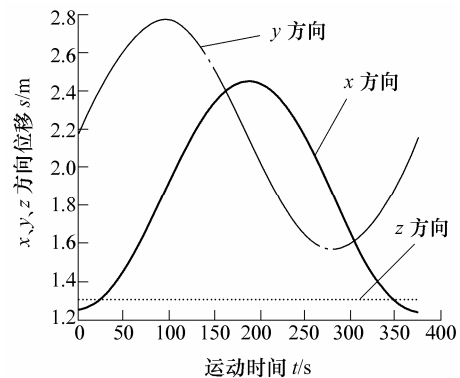


图 7 馈源舱中心 x 、 y 、 z 方向位移

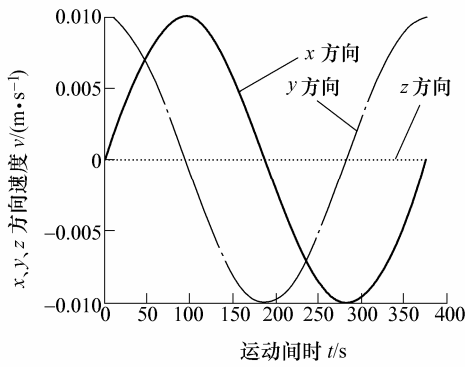
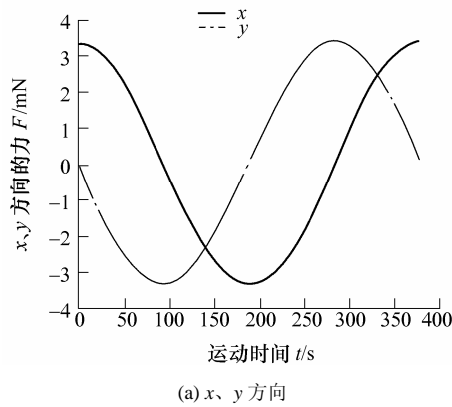
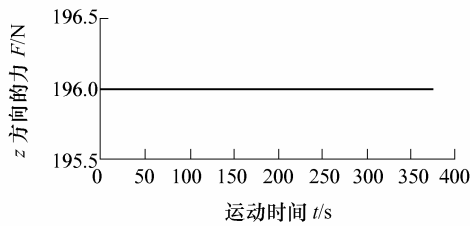


图 8 馈源舱中心 x、y、z 方向速度



(a) x、y 方向



(b) z 方向

图 9 作用在馈源舱上沿 x、y、z 方向的力

设馈源舱中心以 0.01 m/s 的速率在以(1.85, 2.5 cos($\pi/6$), 1.3)(m)为圆心、0.6 m 为半径的水平圆上运行。运行中绕 x、y、z 三坐标轴的姿态角始终为零，即运行过程中馈源舱只作位置运动而姿态保持不变。运动以(1.25, 2.5 cos($\pi/6$), 1.3)(m) 为起点，经过 376.99 s 运行一圈。图 5 中给出了馈源舱中心跟踪期望轨迹；图 6 给出了馈源舱沿水平圆运动中的索长变化。图 7、8 分别给出了馈源舱中心运动沿 x、y、z 方向的位移曲线和速度变化曲线。图 9 分别给出了作用在馈源舱上的合力沿 x、y、z 方向的力。

由图 5 可见，馈源舱运行一个完整的水平圆轨迹，馈源舱中心的运行轨迹合理。图 6 中 $l_1 \sim l_6$ 为与索塔 $A_1 \sim A_6$ 相连柔索的长度，由于索塔 $A_1 \sim A_3$ 与索塔 $A_4 \sim A_6$ 相对称，馈源舱在空间水平圆运动时，索长也作互相对称的变化。另外，连续光滑变

化的索长曲线也是控制柔索驱动并联机器人系统平稳运行的理想数据。图 7、8 中沿 x、y 方向的位移，速度符合周期变化曲线，而沿 z 方向的位移(1.3 m)与速度(0)都不变，与给定的期望运动轨迹要求相符。分析图 9 可知，作用在馈源舱上沿 x、y 方向的力正好与馈源舱作圆周运动所需的向心力相等，而作用在馈源舱上沿 z 方向的力正好等于馈源舱的重力，从而证明了分析结果的正确性。以上数值分析结果表明该动力学建模是合理的。

6 结论

(1) 介绍了 FAST 5 m 柔索驱动并联机器人的结构构型。针对已经建成的 FAST 5 m 缩比试验模型的特点，应用悬链线方程来模拟并分析柔索的力学特性。在此基础上采用拉格朗日方程建立了柔索驱动并联机器人系统的动力学模型。数值结果验证了该动力学模型的合理性，同时为实现 FAST 柔索驱动并联机器人系统的精确控制奠定了基础。

(2) 对于口径 500 m 的 FAST 射电望远镜而言，舱一索运动时柔索的动能是不能忽略的，这时所建的模型需要作相应的修改。

(3) 在馈源舱运行过程中，各根柔索的长度是随时间变化的，如何真实地在模型中反映这一特点，是下一步需考虑的工作。另外，索端拉力与索长关系在本文中是基于两端固定时给出的，而所研究的柔索牵引并联机构却不是两端固定的，这时相对应关系如何，需要作进一步的研究。

参 考 文 献

- [1] DUAN Baoyan. A new design project of the line feed structure for large spherical radio telescope and its nonlinear dynamic analysis[J]. Mechatronics, 1999, 9(1): 53-64.
- [2] SU Yuxin, DUAN Baoyan. The application of the Stewart platform in large spherical radio telescope[J]. Journal of Robotic Systems, 2000, 17 (7): 375-383.
- [3] ALBUS J. The NIST ROBOCRANE[J]. Journal of Robotic Systems, 1993, 10(5): 709-724.
- [4] PUSEY J, FATTAH A, AGRAWAL S. Design and workspace analysis of a 6-6 cable-suspended parallel robot[J]. Mechanism and Machine Theory, 2004, 39(7): 761-778.
- [5] PAUL B, IMME E U. Wrench-based analysis of cable-driven robots[C]//Proc. of IEEE Int. Conf. on

- Robotics and Automation, April 26-May 1, 2004, New Orleans, USA. New Orleans: IEEE, 2004: 4 950-4 955.
- [6] JORGE A. 机器人机械系统原理理论、方法和算法[M] 宋伟刚, 译. 北京: 机械工业出版社, 2004.
- [7] SHIANG W J, CANNON D, GORMAN J. Dynamic analysis of the cable array robotic crane[C]//Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, May 10-15, 1999, Detroit, Michigan, USA. Michigan: IEEE, 1999: 2 495-2 500.
- [8] MOTOJI Y, NORITAKA Y, AKIRA M. Trajectory control of incompletely restrained parallel wire-suspended mechanism based on inverse dynamics[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2004, 20(5): 840-850.
- [9] PHAM C B, YEO S H, YANG G L, et al. Force-closure workspace analysis of cable-driven parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41(1): 53-69.
- [10] KAZAKS K, ZHOU Q, WANG J S. Static analysis of cable-driven manipulators with non-negligible cable mass [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2006, 22(3): 425-433.
- [11] WANG Y C. Effect of cable stiffness on a cable-stayed bridge[J]. Structural Engineering and Mechanics, 1999, 8(1): 27-38.
- [12] 孙欣. 大射电望远镜悬索式馈源支撑系统的非线性静力学、运动学和动力学理论及方法的研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2001.
- [13] 保宏, 杜敬利, 段宝岩. 大型射电望远镜馈源支撑系统静刚度分析[J]. 机械工程学报, 2006, 42(7): 119-125.
- [14] QIU Yuanying, DUAN Baoyan, WEI Qiang. Optimal distribution of the cable tensions and structural vibration control of the cabin-cable flexible structure[J]. Structural Engineering and Mechanics, 2002, 14 (1): 39-56.
- [15] AHMADI-KASHANI K. Development of cable elements and their applications in the analysis of cable structures [D]. Manchester: University of Manchester Institute of Science and Technology, 1983.
- [16] GUO Qingding, LIU Ying. Local structurization kinematic decoupling of six-leg virtual-axis NC machine tool[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2002, 17(4): 515-518.
- [17] OH S R, AGRAWAL S K. A reference governor based controller for a cable robot under input constraints[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2005, 13(4): 639-645.

DYNAMIC MODELING AND NUMERICAL SIMULATION OF CABLE-DRIVEN PARALLEL MANIPULATOR

ZI Bin DUAN Baoyan DU Jingli
(School of Electromechanical Engineering,
Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract: Cable-driven parallel manipulator (CPM), in which cables are used to replace links to manipulate objects, is developed from parallel and serial cable driven manipulator. Compared with the parallel manipulator, this kind of manipulator has more advantages. The cooperative variation of lengths of the six long cables pulls the feed cabin to track radio source with 6 DOFs. Similar to a parallel manipulator, the cable-driven system for five-hundred meter aperture spherical radio telescope (FAST) is viewed as a CPM. According to its 5 m scaled model, the relationship between end forces and cable length is derived based on the analytical equation of catenary of a cable with two endpoints fixed. So the actuating forces on the cabin locating at a certain position and pose can be solved with the given driving cable lengths. Secondly, based on the inverse kinematics analysis the inverse dynamic formulation of CPM is established by using Lagrange's equations. Finally, the dynamic modeling can be justified by the example.

Key words: Cable-driven parallel manipulator

Analytical equation of catenary

Dynamic modeling Numerical simulation

作者简介: 警斌, 男, 1975 年出生, 博士研究生。主要研究方向为柔索结构分析、机电控制及自动化。

E-mail: binzi@mail.xidian.edu.cn