第 39 卷第 6 期　　机 械 工 程 学 报　　Vol.39 No. 6
2003 年 6 月　　CHINESE JOURNAL OF MECHANICAL ENGINEERING　　Jun. 2003

含湿毛细多孔介质传热与传质基本方程的一组代数显式解析解*

蔡睿贤　张　娜
(中国科学院工程热物理研究所　北京　100080)

摘要：对含湿毛细多孔介质传热与传质过程的基本主控方程，以建议使用的加法分离变量法导出了一套代数显式解析特解。它仅由时间的线性项与几何坐标的二次项组成，比较简单明了，具有一定的物理意义。这个特解尤其适合作为标准解发展计算传热传质学。

关键词：多孔介质　传热传质　解析解
中图分类号：O361.2

0　前言

含湿毛细多孔介质中的传热与传质过程在生产与生活中常会碰到，对它的研究已进行得比较广泛，参考文献[1]中对之进行了概括的总结。当然所有研究都要首先基于对实际的试验研究，然后总结出规律，得出数理模型及其主控方程，并按此进行理论分析及进一步数值计算，又反过来指导实践。早年的理论研究，大多是基于对主控方程求出的解析解进行，例如不可压流体力学与常物性导热理论都是如此。近年来由于电子计算机与计算数学的飞跃发展，已改以数值计算为主。但解析解如能找到，在理论上仍有其不可代替的作用。尤其是它还可以作为标准解用来校核数值解的准确性、收敛性与稳定性等，以及启发计算工作者创造更好的计算方法例如差分格式与网格生成等。该研究的目的就是对含湿毛细多孔介质的传热传质主控方程找出其可能有的代数显式解析解以促进多孔介质传热传质学的发展。

1　主控方程

按参考文献[1～3]，对统计均匀多孔介质体，吸湿后体积不发生变化，在无贯流情况下，孔隙中的表面力基本保持均匀，毛细势远大于重力势，可忽略后者，且不存在融冻问题时，在常物性前提下得出的几何二元热湿迁移主控方程是

$$\frac{\partial w}{\partial t}=D_{\mathrm{m}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+D_{\mathrm{t}}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

及

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=a_{\mathrm{e}}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

式中　w,θ ——质量含湿率与温度

t, x, y——时间与几何坐标

D_{m}——湿分迁移的“质扩散系数”

$$D_{\mathrm{m}}=\frac{\lambda_{\mathrm{m1}}}{\rho_0}\left(\frac{\partial \pi}{\partial w}\right)$$

D_{t}——湿分迁移的“热质扩散系数”

$$D_{\mathrm{t}}=\frac{1}{\rho_0}\left[\lambda_{\mathrm{m1}}\left(\frac{\partial \pi}{\partial \theta}\right)+\rho_{\mathrm{a}} D_{\mathrm{v}}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\theta}\right]$$

$$\lambda_{\mathrm{e}}=\frac{1}{\lambda+r\rho_{\mathrm{a}} D_{\mathrm{v}}\dfrac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\theta}}$$

$$a_{\mathrm{e}}=\frac{\lambda_{\mathrm{e}}}{\rho_0 c}$$

λ_{m1}——材料的导湿系数

ρ_0——多孔介质干骨架的密度

π——质迁移势

ρ_{a}——湿空气密度

δ——湿空气的湿量

D_{v}——多孔材料中水蒸气在空气中的表观扩散系数

λ——湿材料的热导率(包括固体骨架、液态水和湿空气的导热作用)

r——气化潜热

c——每单位质量干材料的含湿分时的比热容

* 国家自然科学基金(50246003,59925615)和国家重点基础研究发展规划课题(G2000026305)资助项目。20020630 收到初稿，20030325 收到修改稿

2 求解方法

求导解析解的方法有下列两个特点。

一是在推导解析解时，先不考虑是针对何种具体初始条件与边界条件。而在找到可能的解析解后，再看该解会有怎样的初始条件与边界条件。由于求解析解的主要目的是求得有理论意义的标准解，而不是求解具体问题，所以这是可以允许的一种有效简化办法。参考文献[4]与[5]就是这么做的。

另外是在求解时不是用经典的常规办法而是用加法分离变量法[6]。在经典的常规分离变量法中，是假定一个未知函数 $\theta(x,t) = X(x)T(t)$ 来设法分离变量。但这种办法无法对上述主控方程组进行分离变量。加法分离变量法则假定 $\theta(x,t) = X(x) + T(t)$，这样做就可以对很多常规分离变量法无能为力的方程或者方程组进行分离变量。

3 主控方程的一组代数显式解析解

如设上述主控方程式(1)及(2)的待求变量为 $w=T_1(t)+X_1(x)+Y_1(y)$ 及 $\theta = T_2(t) + X_2(x) + Y_2(y)$，则这两个方程可进行第一步分离变量得出下列二式

$$T_1' = C_1 = D_{\mathrm{m}}(X_1'' + Y_1'') + D_{\mathrm{t}}(X_2'' + Y_2'') \tag{3}$$

$$T_2' = C_2 = a_{\mathrm{e}}(X_2'' + Y_2'') \tag{4}$$

式中各 C_i 均为常数，后同。由式(3)与(4)的左侧等号，可得出

$$T_1 = C_1 t + C_3 \tag{5}$$

$$T_2 = C_2 t + C_4 \tag{6}$$

将式(4)右侧等号再进行分离变量，可得

$$a_{\mathrm{e}} X_2'' = C_5 = C_2 - a_{\mathrm{e}} Y_2'' \tag{7}$$

由式(7)的左，右两侧可分别得出(对加法分离变量法常数项已在式(5)与(6)中出现，不必再加)

$$X_2 = C_5 x^2 /(2a_{\mathrm{e}}) + C_6 x \tag{8}$$

$$Y_2 = (C_2 - C_5) y^2 /(2a_{\mathrm{e}}) + C_7 y \tag{9}$$

将式(8)与(9)代入式(3)右侧并分离变量，即可求得 X_1 与 Y_1，具体步骤与上述一样，不赘述。X_1 与 Y_1 的示式如下

$$X_1 = C_8 x^2 /2 + C_9 x \tag{10}$$

$$Y_1 = [C_1 / D_{\mathrm{m}} - C_2 D_{\mathrm{t}} /(a_{\mathrm{e}} D_{\mathrm{m}}) - C_8] y^2 /2 + C_{10} y \tag{11}$$

将式(5)，(10)与式(11)相加，即得出 w 的示式为

$$w = [C_1 / D_{\mathrm{m}} - C_2 D_{\mathrm{t}} /(a_{\mathrm{e}} D_{\mathrm{m}}) - C_8] y^2 /2 + C_{10} y + C_3 + C_8 x^2 /2 + C_9 x + C_1 t \tag{12}$$

同样将式(6)，(8)及式(9)相加，得出 θ 的示式是

$$\theta = C_2 t + C_4 + C_5 x^2 /(2a_{\mathrm{e}}) + C_6 x + C_6 x + (C_2 - C_5) y^2 /(2a_{\mathrm{e}}) + C_7 y \tag{13}$$

式(12)与(13)就是主控方程式(1)与式(2)的一个特解。其可能的初始条件与边界条件例如可以将 $t=0$， $x=0$ 及 1 与 $y=0$ 及 1 代入式(12)与式(13)而得出。虽然这些初始与边界条件与很多情况下取为常数不一样，不过在物理上是可能的，不影响该解作为标准解的作用。

式(1)与式(2)是相互耦合的，而且在数学上是三元的，有三个自变量，不易找到非常数的解析解。据所知只有参考文献[3]中给出了一个几何一元非定常解。它也不是本解的退化特例。与本解是相互独立的。

4 特解的一些物理图景

所得特解的因变量变化很简明：质量含湿率 w 与温度 θ 均是时间的线性函数与几何坐标的二次多项式函数，不包含任何特殊函数。其变化曲线非常简单，为节省篇幅，不再赘述。

对此特解， $C_2>0$ 时相应整个场随时间增大是增温的， $C_1>0$ 时相应整个场随时间增大而增湿，而对温度场没有影响。当 C_1 与 C_2 小于 0 时，则情况正好相反。各种物性只对解的几何变化有影响，而对随时间变化没影响。对上述情况需要特别强调的是它只是反映一种特解，并不代表普遍情况。另外，在所考虑区域的边界上是有热量与湿分的传递的。当 $C_1=0=C_2$ 时，此解是个定常的特解，在相应的边界热量与湿分传递情况下可以保持所研究区域内的湿分与温度不变。

本特解导出了参考文献[1～3]给出的主控方程所反映的物理过程中的一个特例，有其物理意义。但其更重要的作用还是可以作为标准解，促进计算传热传质学的发展。由于它是代数显式的，更方便于使用。

5 结论

对含湿毛细多孔介质传热与传质主控方程，利用加法分离变量法导出一套代数显式解析特解。它反映了一个简单的物理过程，有其理论意义。尤其是它还可以作为标准解用以校验及发展计算传热传

质学的发展，有其实用价值。

参 考 文 献

1 王补宣. 多孔介质的传热传质. 清华大学学报(自然科学版)，1992，32(增 1)：5～12

2 雷柯夫 A B. 建筑热物理理论基础. 任兴季，张志清，等译. 北京：科学出版社，1965

3 王补宣，方肇洪. 含湿毛细多孔介质的传热与传质和热湿迁移特性测定方法的探讨. 工程热物理学报，1985，6(1)：60～62

4 蔡睿贤，张娜. 锅炉受热面动态过程的一套显式解析特解. 机械工程学报，2000，36(7)：10～13

5 蔡睿贤，张冬阳. 两相非定常流的一些显式解析解. 机械工程学报，2001，37(9)：1～3

6 Cai R X, Zhang N. Unsteady one-dimensional analytical solutions for bioheat transfer equations. Progress in Natural Sciences, 1998, 8(6)：733～739

ALGEBRAICALLY EXPLICIT ANALYTICAL SOLUTION FOR HEAT AND MASS TRANSFER IN WET POROUS MEDIA

Cai Ruixian Zhang Na

(*Institute of Engineering Thermophysics*, *Chinese Academy of Sciences*)

Abstract: An algebraically explicit analytical solution for governing equations of heat and mass transfer process in wet capillary porous media is derived. An extraordinary method is applied to obtain the analytical solution: instead of the ordinary method of separating variable assuming that the solution is a product of several 1-D functions, it is assumed the solution is a sum of several 1-D functions. The solution only consists of linear function of time and binomial functions of geometric coordinates, its physical meaning is simple and clear . Besides the theoretical significance, the algebraically explicit analytical solution is especially valuable for computational heat and mass transfer as a benchmark solution to check the accuracy, convergency and effectiveness of numerical solutions and to improve the numerical computation skills such as differential schemes, grid generation ways and so on.

Key words: Porous media Heat and mass transfer Analytical solution

作者简介：蔡睿贤，1934 年出生，中国科学院院士。