

# 威布尔分布下失效率的 Bayes 验证试验方法\*

陈文华

(浙江大学流体传动与控制国家重点实验室 杭州 310027)

崔 杰

(中国航天科工集团公司三院 31 研究所 北京 100074)

潘 骏

(浙江科技学院机电工程系 杭州 310012)

周升俊 卢献彪

(杭州航天电子有限公司 杭州 310015)

摘要：为在尽可能短的试验时间内确定产品可靠性是否达到规定的要求，以 Gamma 分布为先验分布，以失效率为验证指标，讨论了 Weibull 分布下产品可靠性的 Bayes 验证试验设计方法，以某型航天电连接器为例，制定了相应的 Bayes 定时截尾验证试验方案，并对试验方案进行了 Monte-Carlo 模拟评价。与经典的定时截尾验证试验方法相比，所建立的 Bayes 验证试验方案所需的试验时间仅为经典试验方案的 45% 左右。对试验方案的 Monte-Carlo 模拟评价结果表明，后验使用方风险的理论值与实际值基本一致，说明所制定的试验方案能够满足预定的试验要求。

关键词：Weibull 分布 失效率 Bayes 验证

中图分类号：TB114.3

## 0 前言

在产品的可靠性验证试验中，由于 Bayes 方法考虑了历史数据和工程经验所提供的先验信息，因而与只根据当前试验结果就对产品的可靠性作出评估的经典方法相比，Bayes 方法可减少验证试验的工作量，降低验证试验的费用。尽管参考文献[1~6]给出了指数分布下以失效率、平均无故障寿命和可靠度为验证指标的 Bayes 验证试验方案，但是在工程实际中，大约仅有 15% 的电子产品寿命可以用指数分布恰当地加以描述<sup>[7]</sup>。而 Weibull 分布由于其形状参数，在数据拟合上极富于弹性，可用于描述各种产品的寿命分布，指数分布仅是其形状参数为 1 的一种特殊情况。因此，为在尽可能短的时间内确定产品可靠性是否达到规定的要求，有必要研究威布尔分布下产品可靠性的 Bayes 验证试验问题。参考文献[8]以可靠度为验证指标，讨论了 Weibull 型产品的可靠性验证问题；本研究则以失效率为验证指标，讨论了 Weibull 分布下产品可靠性的验证

试验方法，同时制定了相应的验证试验方案，并对试验方案进行了 Monte-Carlo 模拟评价。

## 1 先验分布的确定

贝叶斯学派认为，从生产产品的历史经验来看，同样工厂生产的同样产品的失效率是随机变量，即服从某个先验分布，当前验证的这批产品的失效率只是总失效率的一个实现，在估计当前验证产品的失效率时，应考虑这个事实，不仅只是用当前的抽样数据，还要利用先验分布所提供的信息<sup>[9]</sup>。

假设  $q$  服从先验分布  $p(q)$ ， $q$  的取值范围是  $[0, +\infty)$ ，现通过随机抽样得到一组数据  $x$ ，其似然函数为  $L(x|q)$ ，现通过  $x$  来估计  $q$ ，根据 Bayes 定理可得到参数  $q$  的后验分布为

$$p(q|x) = p(q)L(x|q)$$

基于上式可以对产品的可靠性指标进行 Bayes 推断，由此可见，Bayes 验证试验的重点是确定先验分布。

对于失效率  $I$  的先验分布，考虑到在理论上失效率  $I$  的取值范围为  $[0, +\infty)$ ，而实际上主要集中在某个很小的区域内的特点，例如当产品的失效率为五级时，其取值主要集中在  $[10^{-6}, 10^{-5}]$  这一区间

\* 国家自然科学基金(50375142)、航天支撑技术基金(2003HTZJDX01)和高等学校重点实验室访问学者基金资助项目。20050326 收到初稿，20050908 收到修改稿

内；而 Gamma 分布有两个参数  $a$  和  $b$ ，针对  $a$  和  $b$  的不同取值，Gamma 函数呈现不同的形状，尤其当  $1 < a < 2$  时，具有与失效率  $I$  的实际取值非常吻合的特点，现将其引入到本研究中作为失效率  $I$  的先验分布，其密度函数为

$$g(I; a, b) = \frac{b^a I^{a-1}}{\Gamma(a)} \exp(-bI) \quad I > 0$$

式中， $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$  ( $a > 0$ )。其分布参数  $a$ ， $b$  的取值，可以由先验信息给出失效率的两个  $p_1$  和  $p_2$  分位数  $LL$  和  $UL$ ，然后由方程组

$$\begin{cases} \int_0^{LL} \frac{b^a I^{a-1}}{\Gamma(a)} \exp(-bI) dI = p_1 \\ \int_0^{UL} \frac{b^a I^{a-1}}{\Gamma(a)} \exp(-bI) dI = p_2 \end{cases} \quad (1)$$

解出。例如，在失效率为  $K$  级的验证试验中，可取  $LL$  和  $UL$  为该级失效率的最小和最大值，即取  $LL = 10^{-(K+1)}$ ， $UL = 10^{-K}$ ； $p_1$  和  $p_2$  则可根据产品的历史试验数据确定，也可以由有关专家根据产品设计、生产条件、质量控制情况确定。

## 2 验证试验方案的设计

假定产品寿命服从两参数的 Weibull 分布，则其概率密度函数为

$$f(t) = (m/h)(t/h)^{m-1} \exp[-(t/h)^m] \quad t > 0$$

相应的可靠度和失效率函数分别为

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp[-(t/h)^m] \quad t > 0 \\ I(t) &= mt^{m-1}/h^m \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $m$  —— 形状参数

$h$  —— 产品的特征寿命

在样本量  $n$  与产品批量  $N$  之比  $n/N \leq 0.1$  的情况下，由同一批产品中随机抽取的  $n$  个产品在试验截尾时间  $t$  之前最多有  $c$  个产品失效的概率，即似然函数为

$$L(I) = p(r \leq c) = \sum_{r=0}^c C_n^r [1 - R(t)]^r [R(t)]^{n-r} \quad (3)$$

$$R(t) = \exp\left(-\frac{t^m I(t)}{mt^{m-1}}\right) \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)得

$$L(I) = p(r \leq c) = \sum_{r=0}^c C_n^r \left[1 - \exp\left(-\frac{t^m I(t)}{mt^{m-1}}\right)\right]^r \left[\exp\left(-\frac{t^m I(t)}{mt^{m-1}}\right)\right]^{n-r} \quad (5)$$

式中  $I(t)$  —— 待验证的可靠性指标

$t$  —— 要求的产品寿命

$t$  —— 试验的截止时间

在获得产品失效率  $I(t)$  的先验分布以及似然函数后，即可以制定相应的验证方案。对于极限(LQ)型验证试验而言，在给定了极限失效率  $I_1(t)$  和后验使用方风险  $b^*$  后，就可以确定试验样本量  $n$ 、允许失效数  $c$  以及截尾时间  $t$ 。

由于后验使用方风险  $b^*$  是指产品在已经通过验证试验的条件下，产品质量不合格的概率，即

$$P[I(t) > I_1(t) | r \leq c] = b^* \quad (6)$$

当失效率的先验分布为 Gamma 分布，定时截尾试验的似然函数为式(5)时，由式(6)可以得到后验使用方风险的具体表达式为

$$\int_{I_1(t)}^\infty P(r \leq c | I) g(I) dI / \int_0^\infty P(r \leq c | I) g(I) dI = \frac{\int_{I_1(t)}^\infty A \frac{b^a I^{a-1}}{\Gamma(a)} \exp(-bI)}{\int_0^\infty A \frac{b^a I^{a-1}}{\Gamma(a)} \exp(-bI)} = b^* \quad (7)$$

$$\text{式中 } A = \sum_{r=0}^c C_n^r \left\{1 - \exp\left[-t^m I / (mt^{m-1})\right]\right\}^r \times \left\{\exp\left[-t^m I / (mt^{m-1})\right]\right\}^{n-r}$$

例如，对于某型航天电连接器，已知其寿命分布为形状参数  $m=3.8587$  两参数 Weibull 分布<sup>[10]</sup>，使用方要求到  $t=14$  年的储存期时其失效率不低于五级，即  $I_1(t) = 1 \times 10^{-5} \text{ h}^{-1}$ ，且使用方风险  $b^*$  为 10%。根据该先验信息，取  $LL=1 \times 10^{-6}$ ， $UL=1 \times 10^{-5}$ ， $p_1 = 0.1$ ， $p_2 = 0.2$ ，则可由式(1)解出先验分布  $g[I(t); a, b]$  中的两个超参数为

$$a = 1.5714 \quad b = 323764$$

这样，由式(7)即可解出与不同的样本量  $n$  和允许失效数  $c$  相对应的试验截尾时间  $t$ ，得到一系列的 Bayes 定时截尾验证试验方案，如表 1 所示。为了便于比较，表 1 同时列出了相应的经典定时截尾验证试验方案。由表 1 可以看出，Bayes 验证试验方案所需的总试验时间  $t$  比经典的验证试验方案少，其比值在 45% 左右。

## 3 试验方案的 Monte-Carlo 模拟评价

在 Bayes 验证试验中，由于失效率  $I(t)$  被看作是一具有先验分布的随机变量，因此，在 Bayes 验证试验方案的 Monte-Carlo 模拟评价时，首先根据  $I(t)$  的先验分布  $g[I(t); a, b]$  产生一个失效率  $I(t)$  的抽样值。其次，根据此抽样值由式(2)求出特征寿

表 1 失效率为 5 级的 LQ 型验证试验方案

h

样本量 $n$	试验方法	允许失效数 $c$				
		0	1	2	3	4
5	Bayes 验证	64 268.3	82 159.1	88 960.2	92 199.5	94 085.1
	经典验证	135 011.0	159 530.0	180 093.0	202 173.0	234 400.0
4	Bayes 验证	66 614.3	83 310.6	89 608.1	92 620.9	
	经典验证	143 049.0	170 683.0	196 195.0	230 864.0	
3	Bayes 验证	68 750.0	84 414.8	90 232.0		
	经典验证	154 121.0	187 359.0	226 079.0		
2	Bayes 验证	70 695.5	85 483.9			
	经典验证	171 197.0	218 851.0			

命  $h$ ，并以此为分布参数产生一个样本量为  $n$  的 Weibull 分布随机数序列  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ ，从小到大排列，作为试样的失效时间。然后，令变量  $Ac = 0$ ， $Uq = 0$ ，求出随机数序列  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  中小于截尾时间  $t$  的失效个数  $r$ ，若  $r \leq c$ ，变量  $Ac$  加 1，而且若此时  $I(t)$  的抽样值大于极限质量  $I_1(t)$ ，变量  $Uq$  加 1。重复上述步骤  $M$  次(一般  $M \geq 1000$ )，最后累加得到  $Ac$  和  $Uq$ ，则比值  $Uq/Ac$  即为近似的后验使用方风险  $b^*$ 。

对于表 1 所示的样本量  $n = 5$ 、允许失效数  $c = 3$ 、试验截尾时间  $t = 92199.5$  h 的 Bayes 验证试验方案，模拟 5 次，每次的重复次数  $M = 2000$ ，模拟结果如表 2 所示。

表 2 Monte-Carlo 模拟结果

模拟次数	后验使用方风险 $b^*/\%$
1	10.06
2	9.95
3	10.05
4	9.60
5	10.10

从表 2 可以看出，模拟值与理论值是接近的，说明建立的 Bayes 验证试验方案是满足试验要求的，同时也说明对 Bayes 验证试验后验风险所作出的解释是合理的。

## 4 结论

由于 Bayes 验证方法充分利用了产品可靠性的先验信息，因此，在 Weibull 分布下，与经典的验证试验方法相比，Bayes 验证方法可以大大减少试验工作量，节省试验费用。对试验方案的 Monte-Carlo 模拟评价表明，对于失效率所建立的 Bayes 定时截尾验证试验方案是合理的，提出的验证试验方法是正确的。

## 参 考 文 献

1 王玲玲. 指数分布下可靠性 Bayes 验证. 华东师范大学

学报(自然科学版), 1993(3): 1~10

- 2 张志华, 姜礼平. 指数型产品失效率鉴定试验的 Bayes 方案. 应用概率统计, 2000, 16(1): 66~70
- 3 陈宜辉, 姜礼平, 吴树和. 指数分布下 Bayes 鉴定试验方案. 运筹与管理, 2002, 11(2): 56~59
- 4 许志强, 王艳. 指数分布下失效率  $I$  的 Bayes 验证试验抽样试验方案. 长春工业大学学报(自然科学版), 2004, 25(1): 76~78
- 5 Ten L M, Xie M. Bayes reliability demonstration test plan for series-systems with binomial subsystem Data. In: Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, 1998: 241~246
- 6 Mario V, Michael M. Designing a reliability demonstration test on a lithography expose tool using bayesian techniques. IEEE Transactions Components, Packing and Manufacturing Technology—Part A, 1994, 17(3): 458~462
- 7 Wayne N. Accelerated testing-statistical model, test plans, and data analyses. New York: A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, 1990
- 8 张士峰. Weibull 型产品的可靠性验证. 国防科技大学学报, 2001, 23(4): 16~19
- 9 成平. 经验贝叶斯估计. 数理统计与应用概率, 1989(3): 156~163
- 10 陈文华. 航天电连接器可靠性试验和分析的研究: [博士学位论文]. 杭州: 浙江大学, 1997

## BAYESIAN DEMONSTRATION TEST METHOD FOR FAILURE RATE UNDER WEIBULL DISTRIBUTION

Chen Wenhua

(State Key Laboratory of Fluid Power Transmission and Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Cui Jie

(The 31th Institute of China Aerospace Science & Industry Corp., Beijing 100074)

Pan Jun

(Zhejiang College of Science and Technology,  
Hangzhou 310012)

Zhou Shengjun Lu Xianbiao

(Hangzhou Aerospace Electrical Technology Co., Ltd,  
Hangzhou 310015)

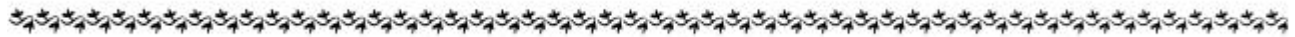
**Abstract :** In order to make sure whether the reliability of products is satisfied with the provided requirements within testing time as short as possible, it is discussed that Bayesian demonstration testing method on the reliability of products whose life is fitted to Weibull distribution, with Gamma distribution as prior distribution and failure rate as demonstration index. Taken aerospace electrical connectors of

certain type for example, Bayesian demonstration testing plan of censoring is made out and evaluated by Monte-Carlo simulation method. Compared with classical demonstration testing method of censoring, the time of the Bayesian demonstration testing is only about 45% of the classical one. Via Monte-Carlo simulated evaluation on the testing plan, the result reveals that the value of posterior user's risk in theory is basically the same as it in fact. So the testing plan can meet the predestinate requirements of the testing.

**Key words :** Weibull distribution Failure rate  
Bayesian demonstration

作者简介：陈文华，男，1963 年出生，教授，博士生导师。主要研究方向为可靠性设计、试验与统计分析，机械传动与机构。

E-mail : chenwh8@zju.edu.cn



## 国家自然科学基金重点资助项目成果简介

### 液压元件典型激振流场控制理论与方法的研究

主题词：液压控制元件 流体振动 流动噪声 噪声评价方法

项目批准号：50175097

项目完成人：浙江大学 傅新 冀宏 杨华勇

本项目主要研究了液压控制元件节流槽噪声特性、噪声评价方法，为液压元件噪声控制及优化设计提供了新思路和方法，主要成果如下。

(1) 提出了阀套移动式压力分布测量方法，建立了包括阀套移动式液压阀压力分布测量、噪声测量和流动气穴显示系统，压力分布实测结果与流场仿真结果吻合良好，这种压力分布测量方法对于高压、高速、小尺寸复杂流场具有普适性。

(2) 通过对非全周开口滑阀液动力流场解析及试验测量，发现滑阀稳态液动力在流动方向变化时，液动力大小和方向都会发生变化，并通过理论分析证明了这种现象，为控制液动力提供了新的方法及思路。

(3) 通过对大量节流槽的噪声测试和压力分布测量，获得了节流槽型阀口噪声特性规律，研究发现在收缩流动方向时，具有等截面段的节流槽噪声较低，而渐扩形节流槽噪声很大；在扩散流方向时，节流槽的形状对噪声影响较小。

(4) 结合空泡动力学理论和大量试验结果，提示了节流槽结果与噪声内在关系。研究发现阀口压力分布压力恢复越快速节流槽的噪声越小，压力恢复缓慢则气泡尺寸越大噪声越大；气泡尺寸是噪声声级的决定性因素。

(5) 提出了两种预测阀口噪声的方法，一种是通过对接流槽的流动分析提出了流动阻力模型并给出了数学表达式，数学模型包含了阀口主要结构参数和工作参数；一种是基于流场仿真结果预测结果噪声的方法，通过对压力分布特征进行提取，获得阀口声级的相对衡量指标——噪声指数。

本项目现已在国内权威、知名刊物及国际会议上发表论文 20 篇，其中被 EI 检索 8 篇，已被引用 2 篇次；申请国家发明专利 11 项，其中已授权发明专利 2 项；培养博士研究生 2 名。