

椭圆加工作业中的四圆弧切比雪夫逼近*

彭云柯

(广西工学院机械系 柳州 545006)

摘要: 采用约束非线性切比雪夫逼近论, 给出了一种用四段圆弧逼近椭圆的方法, 可使最大逼近误差达到最小, 从而提高了数控机床和机器人的椭圆加工作业的精度。并且提供了最佳半径的相当准确的近似计算公式, 可作为最后结果使用, 从而避免编程迭代。

关键词: 椭圆 四段圆弧 切比雪夫逼近

中图分类号: TG65

0 前言

随着现代工业的发展, 椭圆形零件广泛应用于各工业领域, 而在椭圆弧的加工作业中, 一般数控机床和机器人仅提供直线和圆弧的插补功能, 不能满足椭圆作业的需要^[1]。工程中常用四段圆弧作近似椭圆^[2], 这给椭圆的加工及计算机作图都带来极大的方便, 避免引入复杂的算法。但现有的用四圆弧作近似椭圆的方法误差较大, 显然应优选参数, 使误差减小。用四圆逼近椭圆时, 各点的误差均不同, 从工件的使用上看, 显然应使最大误差尽量小。切比雪夫逼近论又称最佳一致逼近理论, 是一种使两函数的差的绝对值的最大值达到最小的数学理论^[4]。为此采用约束非线性切比雪夫逼近论, 使圆和椭圆的最大误差达到最小。

1 目标函数

1.1 误差的表达式

设 a 、 b 分别为椭圆的长半轴及短半轴的长, 则椭圆的方程为

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

用四段圆弧逼近椭圆, 一般将四个圆的圆心选在椭圆的两对称轴上(见下图)。由于对称性, 仅考虑第一象限的情形即可。设半径为 r 的圆(小圆)的圆心 O_1 位于椭圆长轴上, 且到椭圆中心 O 的距离为 l ; 半径为 R 的圆(大圆)的圆心 O_2 位于椭圆短轴上, 且距椭圆中心 O 的距离为 h 。又设各圆与椭圆相切于椭圆各相应顶点处, 从而有

$$l = a - r \quad h = R - b \quad (1)$$

这样各圆和椭圆在椭圆的各顶点处误差为 0。下面求逼近误差的表达式。椭圆上的点 (x, y) 到半径为 r 的圆的圆心的距离为 $\sqrt{(x-l)^2 + y^2}$, 它与半径 r 的差即为圆与椭圆沿着圆半径方向的误差

$$e_r = r - \sqrt{(x-l)^2 + y^2} \quad (2)$$

类似可得半径为 R 的圆与椭圆的误差

$$e_R = \sqrt{x^2 + (y+h)^2} - R \quad (3)$$

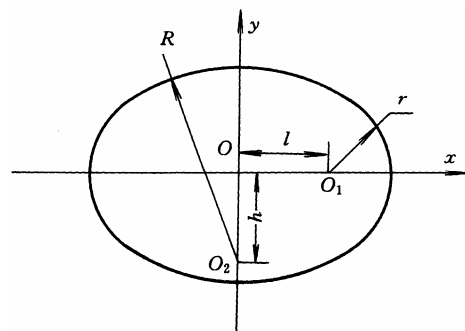


图 椭圆图

1.2 逼近误差的最大值

下面求逼近误差的最大值。由上面的椭圆方程解出 y^2 , 代入 e_r 的表达式(2), 得

$$e_r = r - \sqrt{(1 - b^2/a^2)x^2 - 2lx + b^2 + l^2} \quad (4)$$

把式(4)对 x 求导, 并令 $de_r/dx = 0$, 从中解出

$$x_{r,m} = la^2/(a^2 - b^2) \quad (5)$$

将式(5)及式(1)代入式(4), 即得误差 e_r 的最大值的表达式

$$e_{r,m} = r - b\sqrt{1 - (a-r)^2/(a^2 - b^2)} \quad (6)$$

再将式(1)代入式(5), 可确定 e_r 最大值所在位置

$$x_m = (a-r)a^2/(a^2 - b^2) \quad (7)$$

类似由椭圆方程解出 x^2 , 代入 e_R 的表达式(3),

* 广西教育厅科研资助项目(2002316)。20040218 收到初稿, 20040930 收到修改稿

再将所得 e_R 对 y 求导并令 $de_R/dy=0$, 从中解出

$$y_{Rm} = h b^2 / (a^2 - b^2) \quad (8)$$

又将式(8)及式(1)代入 e_R 的表达式中, 即得 e_R 最大值的表达式

$$e_{Rm} = a\sqrt{1 + (R-b)^2 / (a^2 - b^2)} - R \quad (9)$$

再将式(1)代入式(8), 可得 e_R 的最大值所在位置

$$y_m = (R-b)b^2 / (a^2 - b^2) \quad (10)$$

不难证明, 不论 r, R 取何值, 恒有 e_{rm} 及 e_{Rm} 大于等于 0。

2 约束条件

半径为 r, R 的两圆应相切, 由此可得约束条件。

2.1 半径为 r, R 的两圆切点 C 的坐标

两圆的方程为

$$(x-l)^2 + y^2 = r^2 \quad x^2 + (y+h)^2 = R^2$$

上两式分别求导, 得

$$dy/dx = -(x-l)/y$$

$$dy/dx = -x/(y+h)$$

显然在两圆切点 C 处, 两圆切线与 x 轴夹角的正切 $\tan\alpha = dy/dx$ 应相等, 即上两式右边应相等, 令相等并变换后得

$$hx_C - ly_C - lh = 0 \quad (11)$$

将式(11)与半径为 r 的圆的方程联立, 即可求出切点坐标 x_C, y_C 的表达式 (并将式(1)代入)

$$x_C = (a-r) + (a-r)r/\sqrt{(a-r)^2 + (R-b)^2} \quad (12)$$

$$y_C = (R-b)r/\sqrt{(a-r)^2 + (R-b)^2} \quad (13)$$

类似切点坐标还可以用半径为 R 的圆的方程与式(11)联立并代入式(1)求出

$$x_C = (a-r)R/\sqrt{(a-r)^2 + (R-b)^2} \quad (14)$$

$$y_C = -(R-b) + (R-b)R/\sqrt{(a-r)^2 + (R-b)^2} \quad (15)$$

2.2 约束条件的表达式

显然切点坐标的两种表达式应当相等, 令式(12)和式(14)相等, (或令式(13)和(15)相等, 所得结果也完全一样), 将所得式等号两边平方并整理, 即得约束条件式

$$g = 2rR - 2ar - 2bR + a^2 + b^2 = 0 \quad (16)$$

3 数学模型

用四圆逼近椭圆、使最大逼近误差(的绝对值)达到最小的问题可归结为下列数学问题

$$\begin{aligned} & \min \quad \max |e| \\ & \text{s.t.} \quad g = 0 \end{aligned}$$

这是一个非线性有约束的切比雪夫逼近问题。由参考文献[4, 5], 上述问题的最佳解可由下列方程组求出

$$e_m = e_{rm} = r - b\sqrt{1 - (a-r)^2 / (a^2 - b^2)} \quad (17)$$

$$e_m = e_{Rm} = a\sqrt{1 + (R-b)^2 / (a^2 - b^2)} - R \quad (18)$$

$$g = 2rR - 2ar - 2bR + a^2 + b^2 = 0 \quad (19)$$

$$\lambda_1(\partial e_{rm}/\partial r) + \lambda_2(\partial e_{Rm}/\partial r) + \lambda_3(\partial g/\partial r) = 0 \quad (20)$$

$$\lambda_1(\partial e_{rm}/\partial R) + \lambda_2(\partial e_{Rm}/\partial R) + \lambda_3(\partial g/\partial R) = 0 \quad (21)$$

式中 $\partial y/\partial x$ 表示求偏导数。解上述方程组时, 先由前三式解出 r, R 及 e_m , 再求出后两式的任一组合解 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 如果 $\lambda_1\lambda_2 > 0$, 则表明由前三式求出的 r, R 是四圆逼近椭圆时的最佳半径, 而对应的误差最大值 e_m 已达到最小。后两式又称为在切比雪夫意义下判定是否达到最佳逼近的一阶条件^[5]。

4 最佳半径 r, R 的求解

设

$$\beta = b/a \quad r_0 = r/a \quad R_0 = R/a \quad (22)$$

将式(22)代入式(17)、(18)、(19), 有

$$e_m = e_{rm} = a[r_0 - \beta\sqrt{1 - (1-r_0)^2 / (1-\beta^2)}] \quad (23)$$

$$e_m = e_{Rm} = a[\sqrt{1 + (R_0 - \beta)^2 / (1-\beta^2)} - R_0] \quad (24)$$

$$g = a^2 [2r_0R_0 - 2r_0 - 2\beta R_0 + 1 + \beta^2] = 0 \quad (25)$$

令式(23)、(24)相等, 并有理化分子及化简得

$$\frac{(r_0 - \beta)^2}{r_0 + \beta\sqrt{1 - \frac{(1-r_0)^2}{(1-\beta^2)}}} = \frac{(1 - \beta R_0)^2}{R_0 + \sqrt{1 + \frac{(R_0 - \beta)^2}{(1-\beta^2)}}} \quad (26)$$

设等式两边分母的比值为 k^2 , 即

$$k^2 = \frac{r_0 + \beta\sqrt{1 - (1-r_0)^2 / (1-\beta^2)}}{R_0 + \sqrt{1 + (R_0 - \beta)^2 / (1-\beta^2)}} \quad (27)$$

将 k^2 代回式(26), 得

$$(r_0 - \beta)^2 = k^2 (1 - \beta R_0)^2$$

将 x_m, y_m 的表达式(7)、(10)分别代入它们的取值范围 $0 \leq x_m \leq a$ 及 $0 \leq y_m \leq b$ 中, 可以证明上式括号中的项均为正。则上式两边开方, 得

$$r_0 - \beta = k (1 - \beta R_0) \quad (28)$$

由式(28)解出 r_0 , 代入约束条件式(25), 有

$$2k\beta R_0^2 - 2[k(1+\beta) - \beta(1-\beta)]R_0 + 2k - (1-\beta^2) = 0$$

从中解出 R_0 , 得

$$R_0 = [k(1+\beta) - \beta(1-\beta) + (1-\beta)\sqrt{k^2 + \beta^2}] / 2k\beta \quad (29)$$

将式(29)代入式(28), 即得 r_0 的表达式

$$r_0 = [k(1-\beta) + \beta(1+\beta) - (1-\beta)\sqrt{k^2 + \beta^2}] / 2 \quad (30)$$

计算时先将 k 的初值代入式(30)、(29), 求出 r_0 及 R_0 ; 再将求得的 r_0 、 R_0 代入式(27)求出 k 值; 再将求得的 k 值又代入式(30)、(29)求 r_0 、 R_0 , 反复迭代。计算表明收敛非常快。

k 的初始值可由下面的式子求出

$$k = \beta\sqrt{(3\beta+1)/(\beta+3)} \quad \beta < 0.3 \quad (31)$$

$$k = 0.9\beta\sqrt{(3\beta+1)/(\beta+3)} + 0.1\beta \quad \beta \geq 0.3 \quad (32)$$

在上述算法中式(30)、(29)是式(25)及(28)的精确解析解, 所以不论 k 取何值, 相应的 r_0 及 R_0 (由式(30)、(29)求出) 总能精确满足相切条件式(25), 从而保证了两圆总能光滑相切。如用 k 的初始值代入式(30)、(29), 把所得的 r_0 、 R_0 的初始值作为最终结果, 则对应的最大逼近误差与最佳逼近时的最大误差相比, 一般增加不超过百分之几。因此推荐采用 (由 k 的初值求得的) r_0 、 R_0 的初始值作为四个圆的半径, 即将式(30)、(29)、(31)、(32)作为 r_0 、 R_0 的近似计算公式, 以避免编程迭代。

由上面的方法算得最佳半径 r_0 、 R_0 后, 再由式(23)或(24)可得已达到最小的最大逼近误差。最后由式(7)及(10)可得出两最大误差所在位置, 再由式(12)、(13)或(14)、(15)可求出两圆切点的坐标。

不难证明取 $k=1$, 代入式(30)、(29), 得到的 r_0 、 R_0 即为常用四圆作近似椭圆时的半径公式^[2]。这时最大逼近误差与最佳逼近时的最大误差的比值可达 2 至 3 倍, 可见采用这一方法有较好的效果。

5 一阶条件的验证

上面求出的 r_0 、 R_0 是否是最佳逼近参数, 需看第 3 节中方程组的后两式所表示的一阶条件是否成立。

5.1 λ_1 、 λ_2 、 λ_3 的求解

由式(17)、(18)求导, 知 $\partial e_{rm} / \partial R = 0$ 、 $\partial e_{rm} / \partial r = 0$, 代入方程式(20)、(21)中, 不难验证此时这两个方程的解为

$$\lambda_1 = (\partial e_{rm} / \partial R) (\partial g / \partial r) \quad (33)$$

$$\lambda_2 = (\partial e_{rm} / \partial r) (\partial g / \partial R) \quad (34)$$

$$\lambda_3 = -(\partial e_{rm} / \partial r) (\partial e_{rm} / \partial R)$$

要求各 λ 的具体表达式需先求式中各导数。由

式(16), 求 g 对 r 、 R 的偏导数并将式(22)代入, 得

$$\partial g / \partial r = 2a(R_0 - 1) \quad (35)$$

$$\partial g / \partial R = 2a(r_0 - \beta) \quad (36)$$

再由式(17)、(18)求偏导并将式(22)代入, 得

$$\frac{\partial e_{rm}}{\partial r} = 1 - \frac{\beta(1-r_0)}{(1-\beta^2)\sqrt{1-(1-r_0)^2/(1-\beta^2)}} \quad (37)$$

$$\frac{\partial e_{rm}}{\partial R} = \frac{(R_0 - \beta)}{(1-\beta^2)\sqrt{1+(R_0 - \beta)^2/(1-\beta^2)}} - 1 \quad (38)$$

把这几个导数代进 λ_1 、 λ_2 的表达式(33)、(34)中, 即可得 λ_1 及 λ_2 的具体表达式。

5.2 最佳半径 r_0 、 R_0 的取值范围

为了下面的证明, 需先证明最佳半径 r_0 、 R_0 的取值范围

$$\beta^2 < r_0 < \beta < 1 \quad (39)$$

$$\beta < 1 < R_0 < 1/\beta \quad (40)$$

将式(30)代入式(39), 式(29)代入式(40), 不难证明式(39)、(40)成立。

5.3 一阶条件的判定

要证明一阶条件的满足, 可以证明 $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, 即可证 λ_1 和 λ_2 同号。下面证明 λ_1 、 λ_2 均小于 0, 即证明 λ_1 、 λ_2 表达式中两因式在 r_0 及 R_0 是最佳参数时一正一负。先看 λ_1 的表达式(33), 由式(35)及式(40), 显然 λ_1 的一个因式 $\partial g / \partial r = 2a(R_0 - 1) > 0$ 。现假设另一因式 $\partial e_{rm} / \partial R < 0$, 代入式(38), 有

$$(R_0 - \beta) / m(1 - \beta^2) < \sqrt{1 + (R_0 - \beta)^2 / (1 - \beta^2)}$$

两边平方并化简, 得

$$\beta^2(R_0 - \beta)^2 < (1 - \beta^2)^2 \quad (41)$$

由式(40)可知式(41)括号中的项为正。所以开方并化简得 $\beta R_0 < 1$, 再由式(40), 此式显然成立。即 λ_1 的第二个因式小于 0, 所以有 $\lambda_1 < 0$ 成立。

再看 λ_2 的表达式(34), 由式(36)及式(39)可知 $\partial g / \partial R = 2a(r_0 - \beta) < 0$ 。现假设 λ_2 的另一因式 $\partial e_{rm} / \partial r > 0$, 代入式(37), 仿照 λ_1 的证明, 可证 λ_2 的第二因式大于 0。所以 λ_2 的两因式符号相反, 即 $\lambda_2 < 0$ 。

由上面的分析可知, 由式(30)、(29)计算出来的任意 r_0 、 R_0 , 均能使 $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, 即均能使一阶条件满足, 即总是最佳半径。

6 算例

已知 $\beta = b/a = 0.3$ 的椭圆, 按第 4 节方法迭代后得 $k = 0.231\ 472\ 819$, 将 k 及 $\beta = 0.3$ 代入式(30)、(29), 得最佳半径: $r_0 = 0.143\ 393\ 81$ 、 $R_0 = 2.564\ 433\ 693$ 。

再将所得 r_0 、 R_0 及 $\beta=0.3$ 代入式(23)、(24)即得达到最小的最大误差 $e_m = e_{rm} = e_{Rm} = 0.011\ 375\ 141a$ 。

将 $k=1$ 、 $\beta=0.3$ 代入式(30)、(29), 即得通常用四圆作近似椭圆时的半径: $r_0 = 0.179\ 589\ 272$ 、 $R_0 = 3.034\ 702\ 426$ 。再将所得 r_0 及 $\beta=0.3$ 代入式(23)即得此时的最大误差 $e_{rm} = 0.026\ 513\ 26a$, 则它与最佳逼近时的最大误差的比值为 $2.330\ 807\ 152$ 。

7 结论

一般数控机床和机器人仅提供直线和圆弧的插补功能, 因此常用四段圆弧作近似椭圆, 以便加工作业。利用含约束的非线性切比雪夫逼近论, 给出了一种用四圆逼近椭圆的计算方法, 可使最大逼近误差达到最小, 从而提高了椭圆加工作业的精度。并给出了最佳半径的近似计算公式, 与精确值非常接近, 可作为最后结果使用, 从而避免编程迭代。

参 考 文 献

- 1 刘广超, 周学才. 空间椭圆弧轨迹规划的实现方法. 机器人技术与应用, 2002(3): 32~35
- 2 王林鸿, 陈永辉. 用四心圆法作近似椭圆的偏差分析. 机械工程师, 2002(8): 59~60
- 3 潘尚峰, 张嵘, 马骋, 等. 数控车削中凸变椭圆型面的成形方法. 中国机械工程, 2001, 12(8): 911~914
- 4 Andreassen D O, Watson G A. Nonlinear Chebyshev approximation subject to constraints. Journal of Approximation Theory, 1976, 18: 241~250
- 5 Peng Y K, Zhou J, Yu J. Optimal design of principle parameters for a disk cam mechanism with Oscillating roller

follower. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1991, 4(4): 282~288

Chebyshev Approximating Four Pieces of Circular Arc to Ellipse in Machining and Operating

Peng Yunke

(Department of Mechanical Engineering, Guangxi Institute of Technology, Liuzhou 545006)

Abstract: According to nonlinear Chebyshev approximation theory subject to constraints a computational method approximation four pieces of circular arc to ellipse is presented. By the method the maximum approximate error is decreased to the minimum. Therefore the accuracy in machining and operation of numerical control machine tools and robots is improved. Several approximate formulae that are quite accurate are also presented and can be taken as the formulae of the optimal radii thus the programming and iteration are avoided.

Key words: Ellipse

Four pieces of circular arc
Chebyshev approximation

作者简介: 彭云柯, 男, 1948 年出生, 副教授, 博士。主要研究方向为新型优化理论、现代设计方法、机构理论等。

E-mail: pyk12342004@163.com