

# 现场双经纬仪三维坐标测量系统\*

周富强 张广军 江洁

(北京航空航天大学自动化学院 北京 100083)

吴斌 叶声华

(天津大学)

**摘要:** 分析了经纬仪透视投影模型以及双经纬仪三维坐标测量模型。采用线性与非线性相结合的方法来求解双经纬仪坐标测量系统的参数,首先由8个以上空间点在两台经纬仪投影平面内对应的投影坐标计算出本质矩阵 $E$ ,通过本质矩阵 $E$ 的奇异值分解以及空间绝对距离的约束采用线性方法求出右经纬仪的投影矩阵,然后建立包含空间点在两台经纬仪投影平面内投影点固有约束以及空间点三维坐标在内的目标函数,并以线性方法求出的参数为初值,采用非线性优化的方法求解最优测量系统的参数。该方法保证了求解参数为全局最优,且求解速度快。试验结果表明,该方法切实可行。

**关键词:** 坐标测量 经纬仪 极线约束 本质矩阵 透视投影

**中图分类号:** TP391

## 0 前言

现代先进制造业水平的提高,对大型异形物体的几何尺寸以及关键特征点的空间三维坐标提出了更高的要求,准确地测量出这些几何参数对于保证加工产品的质量、零部件的现场成功安装以及物体的整体定位,有着十分重要的意义。这些几何参数可以采用三坐标测量机进行测量,三坐标测量机的精度能够满足大多数场合对较小零部件的测量精度要求,但只能在安装有三坐标测量机的场所进行测量。为了满足对大型物体的测量要求,天津大学研制了多视觉传感器坐标测量系统,实现了对轿车白车身关键尺寸的自动测量<sup>[1]</sup>。近几年,以经纬仪作为传感器,用两台或两台以上经纬仪配合计算机及相应的硬件、软件所组成的空间坐标测量系统在工程测量以及计量学中得到广泛的应用<sup>[2-7]</sup>。经纬仪坐标测量系统可以现场组建,能够就地测量大小或形状全然不同的物体,尤其是大型异形物体,如飞机、卫星、轮船以及轿车白车身等。经纬仪坐标测量系统也可以作为大型测量设备如多视觉传感器坐标测量系统的参数标定设备或者测量精度的检定设备,因此研究现场经纬仪坐标测量系统的建立方法具有十分重要的意义。

传统的经纬仪坐标测量系统采用空间前方交汇测量原理<sup>[8]</sup>,由两台经纬仪观测到的空间同一点相

对于经纬仪的角度值,由空间三角关系从纯几何意义上得到空间点的三维坐标。这种测量方法要求准确测得两台经纬仪观测中心之间的距离以及高度差,由于依靠简单的步骤得到这些参数是不够准确的且比较复杂,因此测量精度难以提高。天津大学提出了基于透视投影的方法建立经纬仪三坐标测量系统<sup>[1]</sup>,简化对这些因素的限制,通过对两台经纬仪组建的坐标测量系统测量出空间点的深度坐标进行非线性优化求解两台经纬仪组成的测量系统的参数,从而提高双经纬仪坐标测量系统的测量精度。由于该方法没有对其他二维坐标进行优化,同时没有提到如何给出非线性优化的初值,因此在数据不是十分理想的情况下,得不到正确的解。在此基础上,考虑同一空间点在两台经纬仪投影平面内的投影点固有的共面约束关系,由对应点求出本质矩阵,采用线性方法求解出经纬仪坐标测量系统的系统参数作为初值,然后建立包括对空间点的3个坐标在内的优化目标函数,最终采用非线性优化方法求解测量系统的最优参数。

## 1 经纬仪透视投影模型

如图1所示,以经纬仪观测中心 $O$ 为坐标原点,建立经纬仪三维坐标系 $Oxyz$ , $Oxz$ 平面平行于经纬仪度盘平面, $x$ 轴方向任意定义, $y$ 轴垂直于水平度盘向下, $z$ 轴由右手法则定义。在 $z=1$ 处定义一个垂直于 $z$ 轴的投影平面 $\pi_p$ ,并以 $z$ 轴与 $\pi_p$ 的交点 $O'$ 为原点在 $\pi_p$ 上建立二维坐标系

\* 国家杰出青年科学基金资助项目(50125518)。20021205收到初稿,20030630收到修改稿

$O'x'y'$ , 其中  $Ox \parallel O'x'$ ,  $Oy \parallel O'y'$ 。任意空间点  $P$  在  $\pi_p$  上的投影点  $p$  是直线  $OP$  与  $\pi_p$  的交点, 即满足理想的透视投影关系。设  $P$  在  $Oxyz$  下坐标为  $(x, y, z)$ , 在  $O'x'y'$  下坐标为  $(x', y')$ , 则有

$$x' = x/z \quad y' = y/z \quad (1)$$

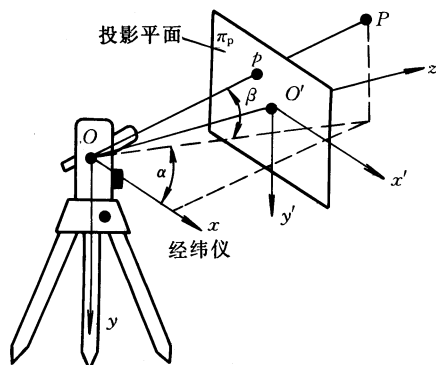


图 1 经纬仪透视投影模型

经纬仪观测空间目标点时, 直接获得目标的水平角  $\alpha$  和垂直角  $\beta$ , 由图 1 表示的几何关系可得

$$\begin{cases} x' = 1/\tan \alpha \\ y' = \tan \beta / \sin \alpha \end{cases} \quad (2)$$

式(1)和(2)为建立的经纬仪透视投影模型, 由经纬仪观测到空间点的角度值后, 就可以根据模型求出空间点在投影平面内的投影坐标。

## 2 双经纬仪空间三维坐标测量原理

由两台经纬仪组成的空间点三维测量系统的数学模型和相应的各种坐标系如图 2 所示。设左经纬仪坐标系与整个测量系统的测量坐标系  $Oxyz$  一致, 右经纬仪坐标系为  $O_2x_2y_2z_2$ 。假定两个经纬仪的投影平面到各自的观测中心的距离都为 1, 左经纬仪的投影平面坐标系为  $O'_1x'_1y'_1$ , 右经纬仪的投影平面坐标系为  $O'_2x'_2y'_2$ 。

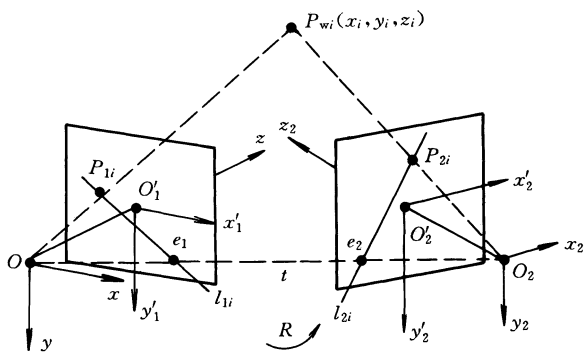


图 2 双经纬仪空间坐标测量数学模型

设空间点  $P_{wi}$  在左经纬仪和右经纬仪投影平面内的投影分别为  $p_{1i}$  和  $p_{2i}$ 。  $P_{wi}$  在  $Oxyz$  下的齐次坐

标矢量为  $\tilde{x}_i = [x_i \ y_i \ z_i \ 1]^T$ , 在  $O_2x_2y_2z_2$  下的齐次坐标矢量为  $\tilde{x}_{2i} = [x_{2i} \ y_{2i} \ z_{2i} \ 1]^T$ 。  $p_{1i}$  在  $O'_1x'_1y'_1$  坐标系下的齐次坐标矢量为  $\tilde{x}'_{1i} = [x'_{1i} \ y'_{1i} \ 1]^T$ ,  $p_{2i}$  在  $O'_2x'_2y'_2$  下的齐次坐标矢量为  $\tilde{x}'_{2i} = [x'_{2i} \ y'_{2i} \ 1]^T$ 。根据经纬仪的透视投影模型得到

$$\begin{cases} \tilde{x}'_{1i} = [x_i/z_i \ y_i/z_i \ 1]^T \\ \tilde{x}'_{2i} = [x_{2i}/z_{2i} \ y_{2i}/z_{2i} \ 1]^T \end{cases} \quad (3)$$

$Oxyz$  与  $O_2x_2y_2z_2$  之间的欧氏变换可表示为

$$\lambda \tilde{x}_{2i} = [R \ | \ t] \tilde{x}_i \quad \lambda \neq 0 \quad (4)$$

式中  $R$ ——两个经纬仪坐标系之间的相对方向

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$t$ ——为两经纬仪坐标系原点之间的平移矢量

$$t = [t_x \ t_y \ t_z]^T$$

由式(3)和(4)可知, 空间点  $P_{wi}$  与在两个经纬仪的投影  $p_{1i}$  和  $p_{2i}$  之间的关系分别为

$$\lambda_1 \tilde{x}'_{1i} = [I \ | \ 0] \tilde{x}_i = P_1 \tilde{x}_i \quad \lambda_1 \neq 0 \quad (5)$$

$$\lambda_2 \tilde{x}'_{2i} = [R \ | \ t] \tilde{x}_i = P_2 \tilde{x}_i \quad \lambda_2 \neq 0 \quad (6)$$

式中  $P_1$ —— $3 \times 4$  左经纬仪投影矩阵

$P_2$ —— $3 \times 4$  右经纬仪投影矩阵

$I$ —— $3 \times 3$  单位矩阵

由以上分析可知, 只要求出右经纬仪的投影矩阵  $P_2$ , 就可以根据两个经纬仪测量获得的投影坐标来获得空间点的三维坐标。

空间点  $P_{wi}$  和两个经纬仪的观测中心  $O$  及  $O_2$  确定一个平面, 空间点在两个经纬仪投影平面内的投影对应点满足极线约束关系。图 2 中  $l_{1i}$  为右经纬仪投影平面内投影点所对应的左经纬仪投影平面内的极线,  $e_1$  为左经纬仪投影平面内所有极线的交点,  $l_{2i}$  为左经纬仪投影平面内投影点所对应的右经纬仪投影平面内的极线,  $e_2$  为右经纬仪投影平面内所有极线的交点。这种共面约束的几何表示为  $l_{O_2P_{2i}}(l_{O_1O_2} \times l_{O_1P_{1i}}) = 0$ , 相应的代数表示为

$$\tilde{x}'_{2i}{}^T t \times R \tilde{x}'_{1i} = \tilde{x}'_{2i}{}^T [t]_x R \tilde{x}'_{1i} = \tilde{x}'_{2i}{}^T E \tilde{x}'_{1i} = 0 \quad (7)$$

式中  $[t]_x$ ——三维矢量  $t$  定义的一个反对称矩阵

$$[t]_x = \begin{bmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{bmatrix}$$

$E$ ——本质矩阵

采用反对称矩阵的形式, 本质矩阵可以表示为

$$E = t_x R \quad (8)$$

本质矩阵  $E$  包含了右经纬仪投影矩阵的全部参数，即两个经纬仪之间的相对位置和方向，因此只要求出  $E$ ，通过分解，就可能求出右经纬仪的投影矩阵  $P_2$ ，从而建立双经纬仪三维坐标测量系统。

### 3 经纬仪三坐标测量系统的参数标定

由式(7)和本质矩阵的基本性质可知，本质矩阵的参数独立变量为 5 个，因此至少知道 5 个投影点的对应点坐标，就可以求出本质矩阵，然后通过本质矩阵的分解来求解右经纬仪的投影矩阵。下面讨论求解  $P_2$  的线性方法和非线性方法。

#### 3.1 求 $P_2$ 的线性方法

由式(2)，可以获得空间点在两个经纬仪投影平面内的对应点坐标，采用 R. H. Hartley<sup>[9]</sup>提出的归一化 8 点算法求解本质矩阵  $E$ 。然后通过对本质矩阵进行奇异值分解来求解旋转矩阵  $R$  和带有比例因子的平移矢量  $t'$ <sup>[10,11]</sup>。设  $t = kt'$ ， $k$  为比例系数，由  $E^T t' = 0$  可知平移  $t'$  是下列问题的解

$$\min_{t'} \|E^T t'\|^2 \text{ 约束条件为 } \|t'\| = 1$$

实际上  $t'$  是矩阵  $E^T E$  对应于最小特征值的单位特征矢量。 $E$  的奇异值分解为

$$E = U \text{diag}(1,1,0) V^T \tag{9}$$

则  $t'_1 = -u_3$  或者  $t'_2 = u_3$ ， $u_3$  为  $U$  的最右边一列。 $R$  矩阵为

$$R_1 = UZV^T \quad R_2 = UZ^T V^T$$

式中  $Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

因此  $P_2$  对应 4 种可能的解

$$\begin{aligned} P_{21} &= [UZV^T \mid u_3] \\ P_{22} &= [UZV^T \mid -u_3] \\ P_{23} &= [UZ^T V^T \mid u_3] \\ P_{24} &= [UZ^T V^T \mid -u_3] \end{aligned}$$

以上四种可能的右投影矩阵，只有一种在物理上可实现。利用三维重建的方法来确定正确的  $P_2$ ，选取任意位置三维空间点，利用获得的经纬仪投影坐标，根据式(5)和(6)，计算出在 4 种可能的右投影矩阵下的空间三维坐标，选取计算出的三维空间坐标的  $z$  坐标为正时所对应的右投影矩阵为最终的右投影矩阵  $P_2$ ，这时表示在两个经纬仪构建的三维测量系统中，空间点位于两个经纬仪的前面。

在由前面采用由本质矩阵分解求解的  $P_2$  的过程中，假定了平移矢量的模  $\|t'\| = 1$ ，由求出的参数

来计算空间点的三维坐标是带有比例系数的。设  $x_i = kx'_i$ ，式中  $x_i$  为实际的三维空间坐标， $x'_i$  为在  $\|t'\| = 1$  时计算出的空间三维坐标。采用已知长度的标尺，标尺的两端带有特征点  $m_1$  和  $m_2$ ，可以由经纬仪瞄准，当求出带有比例系数的右经纬仪投影矩阵，就可以分别计算出标尺两个端点带有比例系数的空间三维坐标  $m'_1$  和  $m'_2$ 。设标尺实际长度为  $d$ ，计算出带有比例系数的两点之间的距离为  $d'$ ，则有

$$\begin{aligned} m_2 - m_1 &= k(m'_2 - m'_1) \Rightarrow \\ d &= kd' \Rightarrow k = d/d' \end{aligned} \tag{10}$$

因此只要知道任意空间两点之间的距离，就可以最终确定平移矢量的比例因子，从而在欧氏空间上完全确定两台经纬仪之间的相对方向  $R$  以及它们之间的相对位置  $t$ ，即确定  $P_2$ ，建立双经纬仪三维坐标测量系统。在根据式(10)计算比例因子时，考虑到测量数据的误差，采用多组双对应点，分别计算出每组的比例因子，最终取平均值作为最后的比例因子。即

$$k = \frac{d}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{d'_i} \quad n > 1 \tag{11}$$

#### 3.2 求 $P_2$ 的非线性方法

在上述线性方法给出解析解：先估计本质矩阵，再从中算出右投影矩阵，方法虽然简单，但结果并不令人满意，因为没有考虑数据点的噪声影响。如果由经纬仪观测得到的两个投影点坐标不够准确，由此而计算出的系统参数就不准确，采用这样计算出的系统参数来计算标尺的长度，就会引起距离误差。设距离误差为

$$e_{di} = |d - d'_i| \tag{12}$$

在理想情况下，分别通过经纬仪的两个观测中心和两个投影点的两条直线(图 2 中的  $l_{Op_{1i}}$  和  $l_{Op_{2i}}$ ) 在空间应该相交于一点，实际上由于投影点  $p_{1i}$  和  $p_{2i}$  测量误差的存在，两条直线并不准确相交于空间点  $P_{wi}$ ，式(7)所表示的共面约束关系不能准确满足。即当数据有噪声时，图 2 中的点  $p_{2i}$  不大可能位于直线  $l_{2i}$  上，但点  $p_{2i}$  到  $l_{2i}$  的距离应该尽可能小，设直线参数  $l_{2i} = (a_{2i}, b_{2i}, c_{2i})^T$ ，点  $p_{2i}$  到  $l_{2i}$  的距离为

$$d_{2i}(x'_{2i}, l_{2i}) = \frac{|x'^T_{2i} [t]_x R x'_{1i}|}{\sqrt{a^2_{2i} + b^2_{2i}}} \tag{13}$$

类似地，点  $p_{1i}$  到  $l_{1i}$  的距离应该尽可能小，设直线参数  $l_{1i} = (a_{1i}, b_{1i}, c_{1i})^T$ ，点  $p_{1i}$  到  $l_{1i}$  的距离为

$$d_{li}(x'_{li}, l_{li}) = \frac{|x'^T_{li} [t]_x R x'_{2i}|}{\sqrt{a_{li}^2 + b_{li}^2}} \quad (14)$$

综合式(12)~(14), 最优的系统参数估计, 应该使得三种距离达到最小, 由此建立估计  $P_2$  的优化目标函数为

$$f(\mathbf{R}, \mathbf{t}) = \rho_1 \sum_{i=1}^{n/2} e_{di}^2 + \rho_2 \sum_{i=1}^n (d_{li}^2 + d_{2i}^2) \quad (15)$$

上式中考虑在欧氏空间上的距离不变性, 取  $\rho_1 \gg \rho_2$ , 以增强空间距离约束, 实际上可选取  $\rho_1 = 1, \rho_2 = 0.1$ 。  $\mathbf{R}$  满足正交约束, 只有 3 个独立变量,  $\mathbf{t}$  有 3 个独立变量, 需要求解的系统参数为 6, 因此需要至少 3 对空间对应点。为了在非线性的过程中保证  $\mathbf{R}$  的正交约束, 并给出比较稳定的数值解, 将旋转矩阵以四元素形式表示为  $\mathbf{q} = (q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3)^T$ , 满足约束  $\|\mathbf{q}\| = 1$ 。由线性方法求出的参数作为非线性优化的初值, 采用 Levenberg-Marquardt 方法对式(15)表示的目标函数进行非线性优化, 由于线性方法计算结果比较接近最优估计参数, 因此经过比较少的迭代后, 就可以很快的收敛到全局最小。从而既保证了计算结果的准确性, 又提高了计算速度。

### 4 试验

采用两台精度为 1" 的 Leica 电子经纬仪 T1800 和一个标准长度为 1 021.413 的标准尺来建立一个双经纬仪三维坐标测量系统。根据测量的需要将经纬仪固定在适当的位置并建立各自的坐标系, 以左经纬仪为基准, 建立整个系统的测量坐标系, 将标准尺摆放在测量空间中 4 个不同的位置, 则可以得到 8 个观测点, 由经纬仪透视投影模型求出投影坐标, 采用线性方法求解右经纬仪投影矩阵, 然后作为初值, 采用非线性优化方法求解最优系统参数。

线性方法求解结果

$$P_2 = \begin{bmatrix} 9.9999 \times 10^{-1} & 1.6011 \times 10^{-5} & -5.6788 \times 10^{-3} & -3.4486 \times 10^3 \\ -1.8680 \times 10^{-5} & 9.9999 \times 10^{-1} & -4.6993 \times 10^{-4} & 3.8175 \times 10^1 \\ 5.6788 \times 10^{-3} & 4.7000 \times 10^{-4} & 9.9999 \times 10^{-1} & -1.1235 \times 10^2 \end{bmatrix}$$

非线性方法求解结果

$$P_2 = \begin{bmatrix} 9.9999 \times 10^{-1} & 1.5897 \times 10^{-6} & -5.6183 \times 10^{-3} & -3.4486 \times 10^3 \\ -1.6219 \times 10^{-6} & 9.9999 \times 10^{-1} & -5.7361 \times 10^{-6} & 3.4865 \times 10^1 \\ 5.6183 \times 10^{-3} & 5.7451 \times 10^{-6} & 9.9999 \times 10^{-1} & -1.2638 \times 10^2 \end{bmatrix}$$

为了验证所提方法的可行性, 将标尺放在测量空间的不同位置, 用测量系统检验出的标尺值与其

实际值(1021.413)进行比较。图 3 为由经纬仪获得的标尺在不同位置时两个端点在经纬仪投影平面内的投影坐标。图 4 为实际测量的标尺 3D 空间坐标以及标尺所处的实际位置状态。

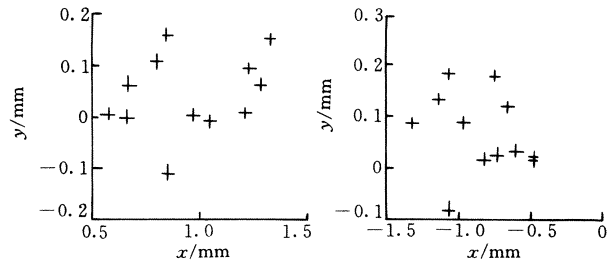


图 3 经纬仪获得的标尺端点投影坐标

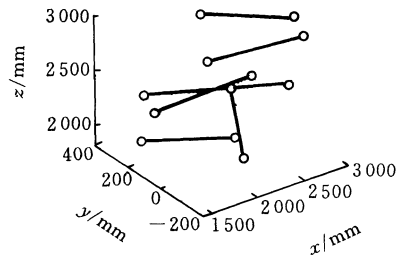


图 4 标尺在建立的经纬仪测量系统中的 3D 坐标

表 1 为所建立的经纬仪坐标测量系统观测处于空间不同位置时测得的标尺端点的空间坐标及计算标尺长度与实际值的比较结果。结果表明, 所提的方法是正确的, 空间测量的相对误差为  $\pm 0.002\%$ 。

表 1 测点的 3D 坐标及比对结果 mm

x	y	z	计算距离	偏差
1 745.680	233.529	2 173.054	1021.416	+0.003
2 764.406	213.943	2 244.492		
1 879.489	16.848	3 255.972	1021.429	+0.016
2 852.191	4.796	2 944.490		
1 412.797	126.928	2 107.591	1021.412	-0.001
2 407.077	113.497	1 874.120		
1 902.409	-9.736	2 849.503	1021.396	-0.017
2 921.648	-23.308	2 784.571		
1 868.942	353.614	2 193.864	1021.384	-0.029
2 822.742	15.742	2 332.906		
1 871.709	-245.411	2 198.236	1021.429	+0.016
2 713.293	310.353	2 036.437		

### 5 结论

建立了经纬仪透视投影模型以及双经纬仪三维坐标测量模型。并采用线性与非线性相结合的方法来求解双经纬仪坐标解测量系统的参数, 首先获得空间点在两台经纬仪投影平面内对应的投影坐标, 由此计算出本质矩阵, 通过本质矩阵的奇异值分解以及空间绝对距离的约束采用线性方法求出右经纬仪的投影矩阵, 然后建立包含空间点在两台经纬仪

投影平面内投影点固有约束以及空间点三维坐标在目标函数, 并以线性方法求出的参数为初值, 采用非线性优化的方法求解最优测量系统的参数。该方法保证参数为全局最优, 而且求解速度快。试验结果表明, 该方法切实可行。

### 参 考 文 献

- 1 罗明. 多传感器机器视觉测量系统的研究及应用: [博士学位论文]. 天津: 天津大学, 1996
- 2 罗明. 非接触式光学三坐标测量系统. 光电工程, 1996, 23(3): 18~23
- 3 陆敬舜. 型架双经纬仪三维测量法. 南京航空航天大学学报, 1994, 26(5): 628~634
- 4 郝继贵, 王仲, 周富强, 等. IVECO 车身视觉检测系统现场溯源研究. 计量学报, 2000, 21(1): 28~33
- 5 罗明. 多视觉检测系统的定标. 计量学报, 1995, 16(3): 217~220
- 6 Wendt. Development of test and calibration for automated theodolite systems in production metrology. PTB Germany, 1996
- 7 Coordinate measuring machine calibration methodologies. USA, NIST, 1998
- 8 Allan A L. The principles of theodolite intersection systems. Survey Review, 1988, 29: 27
- 9 Hartley R I. In defense of the eight-point algorithm. IEEE PAMI, 1997, 19(6): 580~593
- 10 Hartley R I. Estimation of relative camera positions for uncalibrated cameras. In: ECCV'92, Lecture Notes in Computer Science-series, Springer, Berlin, 1992, 588: 579~587
- 11 Hartley R I. An investigation of the essential matrix. <http://www.syseng.anu.edu.au/~hartley/>. Research report, 1992: 1~40

## THREE-DIMENSIONAL COORDINATE MEASURING SYSTEM WITH BINO-THEODOLITES ON SITE

Zhou Fuqiang Zhang Guangjun Jiang Jie  
(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

Wu Bin Ye Shenghua  
(Tianjin University)

**Abstract:** The perspective projection model of the theodolite is analyzed and the mathematical model of the three-dimensional coordinates measuring system with bino-theodolites(TCMSBT) is analyzed. A new method, involving a direct linear solution and an iterative nonlinear solution, to determine all the geometrical parameters of the TCMSBT is proposed. Firstly, essential matrix  $E$  can be determined from 8 or more point correspondences in two projective planes of bino-theodolites and on the basis of absolute distance constraint, the projective matrix of the right theodolite can be determined by the singular value decomposition of  $E$  with closed-form method. Secondly, taking the parameters obtained in the first step as an initial guess, all the accurate geometrical parameters of the TCMSBT are estimated by nonlinear minimization of the cost function relative to the distance error affected by the measurement errors for the three coordinates of the space point and the co-planarity errors which two projective points and two observed centers of the bino-theodolites should follow. The two-steps procedures to determine the geometrical parameters permit a rapid estimation considerably reducing the number of iterations, moreover, the convergence is nearly guaranteed due to the linear guess obtained in the first step. It shows that this method is practical by experiments.

**Key words:** Coordinate measuring Theodolite  
Epiopolar constrained Essential matrix  
Perspective projection

**作者简介:** 周富强, 男, 1972 年出生, 博士, 副教授。主要研究方向为激光及光电测试技术、图像理解和机器视觉。