

DOI: 10.3901/JME.2011.07.022

齿轮传动啮合接触冲击分析*

唐进元^{1,2} 周 炜^{1,2} 陈思雨^{1,2}

- (1. 中南大学现代复杂装备设计与极端制造教育部重点实验室 长沙 410083;
2. 中南大学机电工程学院 长沙 410083)

摘要: 基于接触动力学相关理论和齿轮传动物理模型, 提出齿轮传动啮合接触冲击概念, 研究齿轮啮合传动时由啮合点处速度差异导致的轮齿接触冲击现象, 建立齿轮啮合接触冲击模型, 给出啮合接触冲击求解算法, 分析不同冲击转速、冲击位置对冲击合力、冲击时间和冲击应力的影响, 并利用解析计算式对比计算各个冲击位置和冲击速度条件下的最大冲击力, 验证数值计算结果的有效性。研究表明: 冲击转速和冲击位置对冲击合力、冲击时间以及冲击应力均产生较大影响。同时还给出不同冲击条件下齿面上最大接触应力点在整个冲击接触过程的分布, 为接触疲劳和疲劳累积的深入研究提供参考, 计算结果表明最大接触应力点集中在齿宽中部附近区域, 并且受冲击速度的影响很小。

关键词: 齿轮传动 接触 冲击 啮合

中图分类号: TH132.41

Contact-impact Analysis of Gear Transmission System

TANG Jinyuan^{1,2} ZHOU Wei^{1,2} CHEN Siyu^{1,2}

- (1. Key Laboratory of Modern Complex Equipment Design and Extreme Manufacturing of Ministry of Education, Central South University, Changsha 410083;
2. School of Mechanical and Electrical Engineering, Central South University, Changsha 410083)

Abstract: A new concept of impact in gear meshing based on contact dynamics and physical model of gear drive is put forward. The phenomenon of contact/impact between the meshing tooth pair caused by the velocity difference at the meshing point is studied. The model of contact-impact of gear meshing is built, and the solution algorithm is given. The influences of different impact velocity and impact position on the resultant impact force, impact time and impact stress are analyzed, and the maximal impact forces at each impact position and each impact velocity are calculated and compared by using the analytical calculation equation, so as to verify the validity of the numerical calculation result. The research shows that both impact velocity and impact position have significant influences on the resultant impact force, impact time and impact stress. Besides, the distributions of the maximal stress points on the tooth surface during the impact process under different impact conditions are also given, thus providing reference for in-depth research of contact fatigue and accumulated fatigue. The calculation result shows that the maximal contact stress points concentrate in the nearby area of the middle of tooth breadth.

Key words: Gear transmission Contact Impact Mesh

0 前言

齿轮传动在工业生产中广泛应用, 对于齿轮啮合的动态特性研究一直备受关注^[1], 以期减少齿轮传动系统中的振动与噪声, 提高其使用性能。迄今为止, 大部分学者都将注意力聚焦在了以下两方面

因素引起的齿轮冲击: ① 轮齿变形和加工误差产生的啮入啮出冲击; ② 齿侧间隙产生的冲击。事实上, 啮合接触的轮齿在工作时, 还会产生接触冲击(图 1), 即相互接触的两轮齿, 当主动轮转速增加, 通过接触推动从动轮转动, 这个过程从接触动力学的角度, 实际上是一个接触冲击的过程, 该冲击过程也可表述为: 轮齿因瞬态法向相对接触速度的不同而引起的冲击, 对这种啮合时的接触冲击, 目前研究论文很少, 相关的文献综述如下。

* 国家重点基础研究发展计划(973 计划, 2011CB706800)和国家自然科学基金(50875263)资助项目。20100605 收到初稿, 20101204 收到修改稿

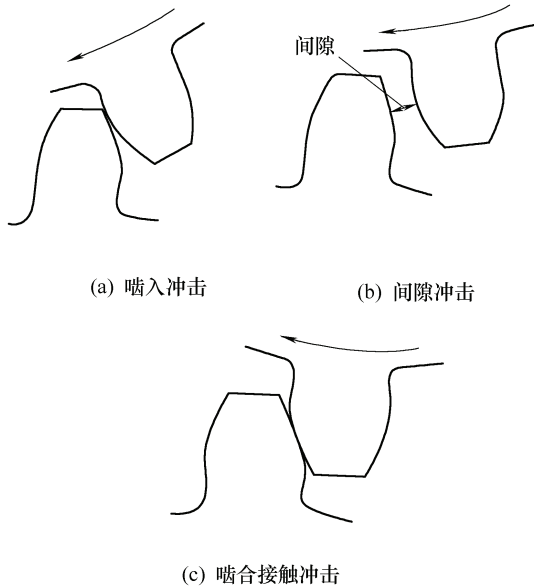


图1 齿轮啮合时各种冲击示意图

对于因轮齿变形和加工误差而产生的啮入啮出冲击,文献[2]基于线外啮入冲击速度计算了动载荷因子。文献[3-8]从解析的角度试图探寻齿轮基节误差、变形和齿面载荷对冲击速度、冲击时间和啮合冲量之间的定量关系,其计算结果表明啮合冲击时间一般是换齿时间的5%~10%。其中文献[3]在啮合冲量大小和齿轮转动惯量对啮合冲击激励的影响方面做了大量工作,得到了增大齿轮的转动惯量可以减小啮合冲击的结论,不过以此会降低齿轮的固有频率而可能使系统产生共振,当质量太小时甚至会产生脱啮。文献[4]建立了有效周节差与冲击参量间的关系,以弹性体冲击时的能量转换关系,导出啮入冲击冲击合力的计算公式,然后从刚度变化的角度研究了轮齿啮出过程的冲击问题并提供了啮出冲击合力的求解方法。文献[5]对寻找修缘参数和啮合冲击速度之间的关系进行了尝试并给出具体计算方法。文献[6]通过首先确定啮合点的位置进而确定了冲击速度的计算公式,同时相应提出了齿轮设计参数的优化方案。文献[7]在齿轮沉切尖点的啮合冲击进行了初步尝试。文献[8]研究了线外啮合与传递误差的关系并得出了定量的计算公式。文献[9]根据机械动力学理论对齿宽、轮齿受载变形、传动比、模数、工况、载荷以及齿轮结构等对冲击合力的影响进行了相关论述,提供了冲击速度与冲击合力的计算准则,并阐明速度大于载荷对冲击合力的影响;文献[10]比较了不同冲击转速情形下的冲击合力与冲击时间,指出冲击时间随转速增加而减小,该文还对齿宽与冲击合力之间的数量关系作了研究,结

果表明冲击合力随齿宽加宽而增大。此外,文献[11]也从齿轮啮合原理的角度分析了齿轮的加工误差和弹性变形对于齿轮啮合冲击的影响,给出了冲击速度和冲击作用时间的表达式,并结合声学理论计算了用于对齿轮冲击加速度噪声进行估算的冲击噪声声压和声辐射功率等声学特性参数。文献[12]论述了线外啮合冲击与齿轮点蚀破坏之间的关系。

文献[13]考虑了不同齿侧间隙对齿轮冲击的影响,其认为齿侧间隙会引起冲击过程的滞后,对于速度引起的冲击,滞后时间与侧隙大小成正比,但冲击时间大小不受其影响。另外,其研究结果还指出:冲击合力随齿侧间隙的变化与同时参与啮合的齿对数相关。文献[14]则用动态子结构法考虑了齿侧间隙对一减速机的动态特性进行了仿真。

对于主从动轮在瞬态因相对转速而引起的啮合冲击,文献[13, 15]作了有益尝试,文献[15]考虑了一对薄齿轮在不同啮合位置时由速度引起的啮合冲击,并用有限元法和多体动力学方法分别进行了仿真,给出了冲击时啮合刚度和冲击合力随啮合位置的变化关系,但遗憾的是其工作没有考虑不同冲击速度的影响,也没有考虑冲击时间与啮合冲击位置的关系。同时,由于齿轮冲击后接触的实际是一个区域,因此考虑冲击过程中冲击应力的分布更具实际意义。

本文主要研究啮合轮齿在工作时由于主从动轮接触点速度不同而导致的啮合接触冲击,以一对渐开线直齿轮单对轮齿的冲击过程为对象,研究冲击速度、冲击位置与冲击合力、冲击时间以及冲击应力间的关系,探寻冲击过程中齿面最大应力点的分布规律。

1 齿轮啮合接触冲击模型与求解算法

1.1 关于两接触弹性体的接触动力学相关理论

两弹性体 Ω_1 和 Ω_2 接触时(图2),由动力学基本控制方程^[10],经Hamilton变分原理可推导出运动方程式

$$m_i \ddot{U}_i + c_i \dot{U}_i + k_i U_i = F_i + R_i \quad i \in \Omega_1, \Omega_2 \quad (1)$$

式中 m_i, c_i, k_i ——两接触弹性体的质量、阻尼与刚度矩阵

F_i, R_i ——两接触弹性体的外载荷与接触力矢量

$U_i, \dot{U}_i, \ddot{U}_i$ ——两接触弹性体的位移、速度和加速度矢量

由于很多文献已作详尽推导,在此不再赘述。

由动量守恒定律, 将运动方程式(1)从接触开始时刻 t_A 到接触结束时刻 t_E 对时间积分, 得到

$$m \cdot (\dot{U}_E - \dot{U}_A) + \lim_{t_E \rightarrow t_A} \int_{t_A}^{t_E} (c\dot{U} + kU - F - R) dt = 0 \quad (2)$$

对于式(2), 当接触的两弹性体 Ω_1 和 Ω_2 速度相同或相差较小时, 易知接触后系统速度的改变量为 0 或一小量, 此时两弹性体的接触过程通常会持续一段时间, 物体之间接触力的影响与其他作用力相近, 此即为两弹性体之间的持续接触。与此相对, 当弹性体 Ω_1 以一定的相对速度与 Ω_2 接触时, 系统的速度发生跳跃性的变化, 接触的时间通常很短, 在接触过程中两接触体的位置一般认为是不变的, 此时接触体间会产生很大的接触力。

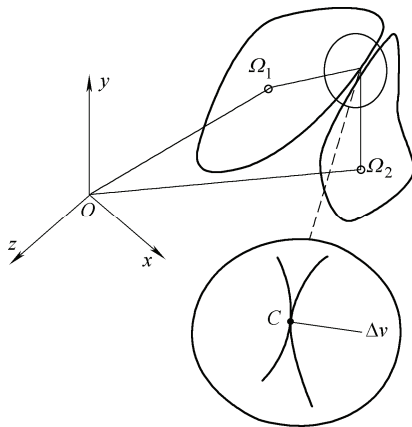


图 2 两弹性体接触冲击示意图

依据文献[16], 式(2)中其他力在接触过程中产生的冲量与接触力 F 相比很小, 并可近似认为是 0, 从式(2)导出式(3)

$$m \cdot (\dot{U}_E - \dot{U}_A) - \lim_{t_E \rightarrow t_A} \int_{t_A}^{t_E} F dt = 0 \quad (3)$$

这就是弹性体相互接触时产生的冲击碰撞(只考虑由法向相对速度引起的正碰)。冲击碰撞与持续接触的过程应分别处理, 前者描述两物体接触过程中速度发生瞬时改变的现象。

特别地, 当接触体中的 Ω_2 被约束时, 弹性体 Ω_1 将会以冲击时的相对速度作反向运动。HU 等^[17]还在研究中发现, 当两弹性体作冲击碰撞时, 接触体的材料特性、几何特性以及运动特性都会对接触冲击产生影响, 所以在动力学计算过程中考虑这些因素的作用是合理也是必要的。

1.2 齿轮啮合接触冲击模型的建立

齿轮传动的物理模型见图 3。齿轮正常工作时, 主动轮 Φ_1 轮齿的齿廓推动从动轮 Φ_2 轮齿的齿廓实现啮合运动, 由于设计时使两轮按照预定的传动比运动, 从而保证在接触点处两轮只存在切向相对速度, 而法向两齿廓接触点间的相对速度 $\Delta v=0$, 所以

齿轮传动时轮齿间的接触表现为两弹性体间的持续接触(不考虑塑性变形的影响)。另一方面, 当主动轮突然变速而使啮合的轮齿对之间突然产生一法向相对速度 Δv 时, 轮齿对间的接触便可视作弹性体间的冲击碰撞(可由图 2 描述), 由此产生齿轮传动系统的接触冲击。此时从动轮处于相对静止状态, 而主动轮以接触齿对间的法向相对速度与从动轮发生冲击作用。这种接触冲击模型区别于以往考虑的两种冲击类型——由于弹性变形和加工误差等因素引起的线外啮合冲击及在线内啮合时由于间隙引起的反复冲击。接触冲击模型考虑的是线内啮合时在啮合点由于主动轮突然变速而引起的冲击, 在建模时主动轮以一恒定初速度与被动轮冲击, 因此间隙和弹性变形等因素的影响是可不考虑的。

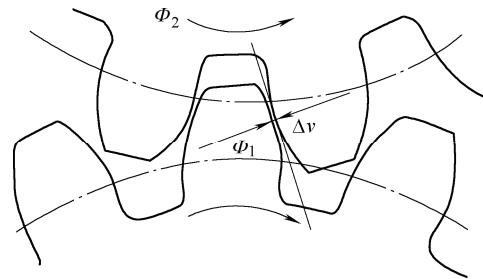


图 3 齿轮传动的物理模型

本文考虑齿轮的运动特性和几何特性对接触冲击的影响, 所研究的主从动轮有关几何材料信息相同, 并取为如下: 齿数 $Z=61$, 模数 $m=4$, 齿宽 $B=40$ mm, 密度 $\rho=7.8$ g/cm³, 弹性模量 $E=210$ GPa, 泊松比 $\mu=0.3$ 。这里利用有限元法将整个模型划分为 288 160 个单元, 328 615 个节点, 齿轮啮合接触冲击模型有限元离散见图 4, 其中主动轮采用完整齿轮模型, 并拥有 z 向转动自由度, 而从动轮取参与冲击的轮齿部分, 并与文献[15]取相同约束模型, 即限制其全部自由度。

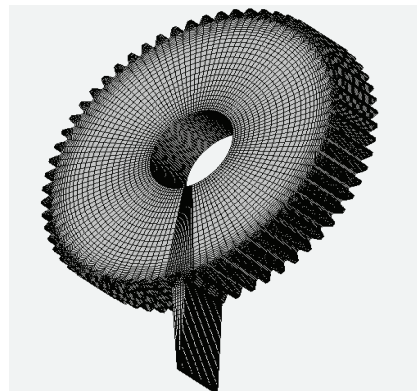


图 4 齿轮啮合接触冲击模型有限元离散

1.3 接触冲击动力方程的求解

在完全的拉格朗日坐标系下, 采用中心差分法

求解式(1)，计算步骤如下。

1.3.1 初始计算

(1) 形成刚度矩阵 k ，质量阵 m 和阻尼阵 c ，其中， $m = \int_{V_e} N^T \rho N dv$ ， $k = \int_{\Omega} B^T DB dv$ ， ρ 为物体的密度， D 为物体的弹性矩阵， N 为所选的形函数矩阵。阻尼矩阵 c 采用工程上常用的比例阻尼，即

$$c = \alpha_0 m + \alpha_1 k$$

式中，比例系数 α_0 、 α_1 由试验方法或经验确定。

(2) 给定 U_0 、 \dot{U}_0 ，并由式(1)求解 \ddot{U}_0 。

(3) 选择时间步长 Δt ，并计算积分常数

$$c_0 = 1/\Delta t^2 \quad c_1 = 1/2\Delta t \quad c_2 = 2c_0 \quad c_3 = 1/c_2$$

由于中心差分法是条件稳定的，要求所取时间步长小于临界步长(其中 T 为周期， ζ 为阻尼比)，即

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T}{\pi} (\sqrt{1 + \zeta^2} - \zeta)$$

为控制计算量而不采用过小的时间步长，在有限元划分网格时要求限制个别单元尺寸很小的情况。

(4) 计算 $U_{-\Delta t} = U_0 - \Delta t \dot{U}_0 + c_3 \ddot{U}_0$ ，形成有效质量矩阵 $\hat{m} = c_0 m + c_1 c$ ，对 \hat{m} 进行三角分解 $\hat{m} = LDL^T$ 。

1.3.2 每一时间步计算

(1) 利用接触算法计算时刻 t 的接触载荷 F ，其具体实施过程限于篇幅在此略过。

(2) 计算时刻 t 的有效载荷

$$\hat{Q}_t = P_t - (k - c_2 m)U_t - (c_0 m - c_1 c)U_{t-\Delta t}$$

(3) 求解时刻 $t+\Delta t$ 的位移

$$LDL^T U_{t+\Delta t} = \hat{Q}_t + F_t$$

(4) 计算时刻 t 的加速度和速度

$$\ddot{U}_t = c_0 (U_{t-\Delta t} - 2U_t + U_{t+\Delta t})$$

$$\dot{U}_t = c_1 (-U_{t-\Delta t} + U_{t+\Delta t})$$

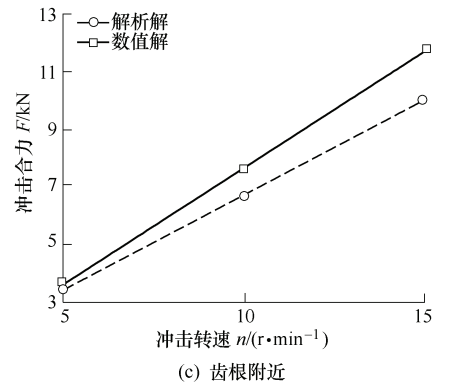
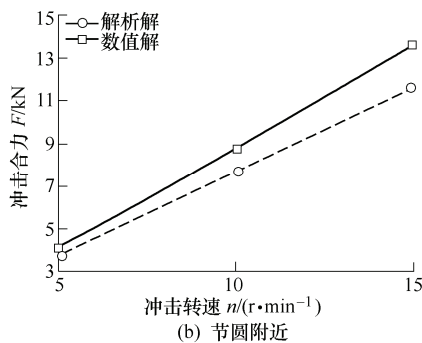
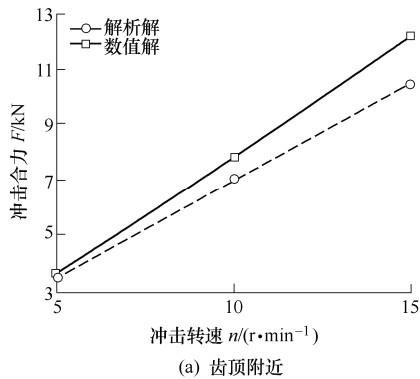


图6 最大冲击力对比

将 $t + \Delta t$ 时刻的位移代回几何方程与物理方程即可求得 $t + \Delta t$ 时刻的单元应力与单元应变。

基于上述算法可编制程序来求解，但其精度受限于有限元模型网格的精度。本文为获得足够的计算精度，借助商用软件对模型作前处理获得足够精细的网格，并采用商用软件 LS-DYNA 进行求解。

2 求解结果与分析

本文利用 LS-DYNA 求解器计算得到冲击前后转速与冲击合力的关系如图 5 所示，主动轮在冲击压缩过程中转速不断变小，而冲击力不断变大，在恢复过程中主动轮反向速度不断增大，直至冲击前的初始速度，而冲击力则不断减小，直至 0。由于接触冲击过程十分复杂，影响因素较多，本文主要对接触冲击转速与冲击位置分别对轮齿接触冲击时的冲击力、冲击时间和冲击应力的影响作初步探讨。

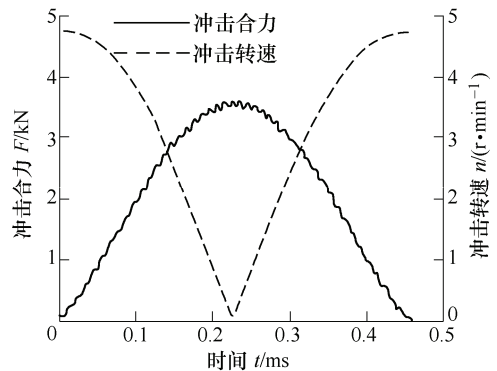


图5 冲击前后转速与冲击力时间历程曲线

2.1 求解结果验证

利用文献[18]所述最大冲击力的解析计算式验证本文数值计算结果的有效性，两者在各冲击条件下的最大冲击力对比见图 6，不难看出两者结果符合较好，表明本文所得结果是可信服的。

2.2 冲击合力与冲击转速和冲击位置的关系

2.2.1 冲击转速对冲击合力的影响

不同冲击转速对冲击合力的影响结果见图7。由图7可知,冲击转速越大,冲击合力越大,两者之间呈现近似的线性比例关系,这一点与以往文献研究的啮合冲击得出的结论是不谋而合的,但由于所研究的被动轮施加了固定约束,而导致冲击合力相对于未施加约束于被动轮时的情形大很多,这一点与文献[13,15]给出的结果是迎合的。因此,在齿轮起动时,由于从动轮可视为约束模型,齿面间的冲击效应将会带来很大的冲击合力,这种约束模型还出现在因过载而导致被动轮卡死时的情形。

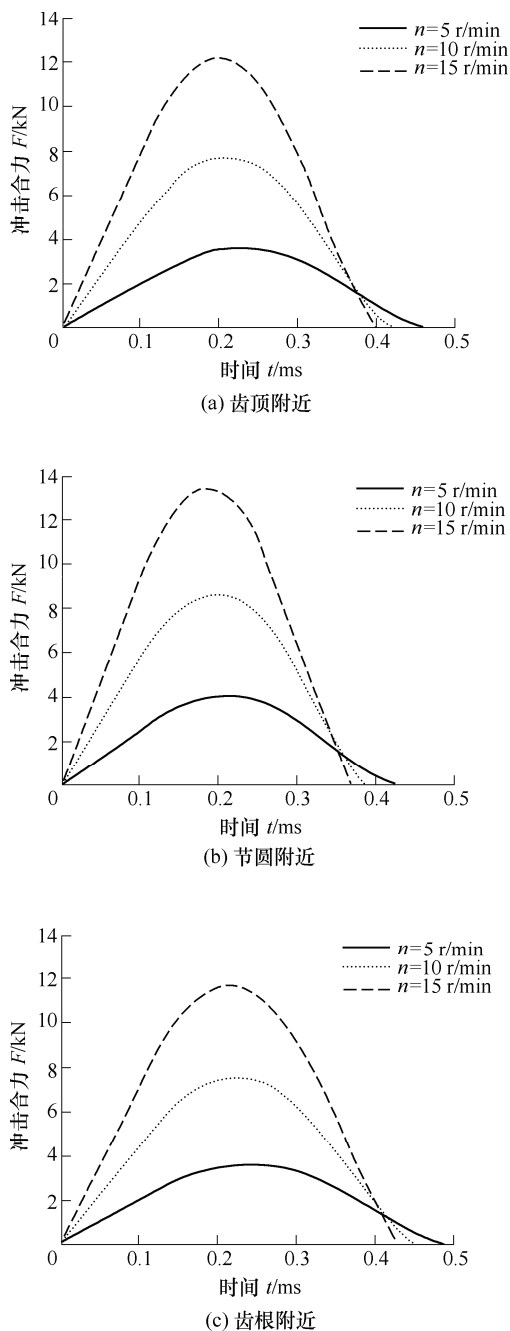


图7 冲击转速对冲击合力的影响

2.2.2 冲击位置对冲击合力的影响

不同冲击位置对冲击合力的影响如图8所示,由图8可知:冲击合力在节圆附近达到最大,而向两边呈减小趋势。

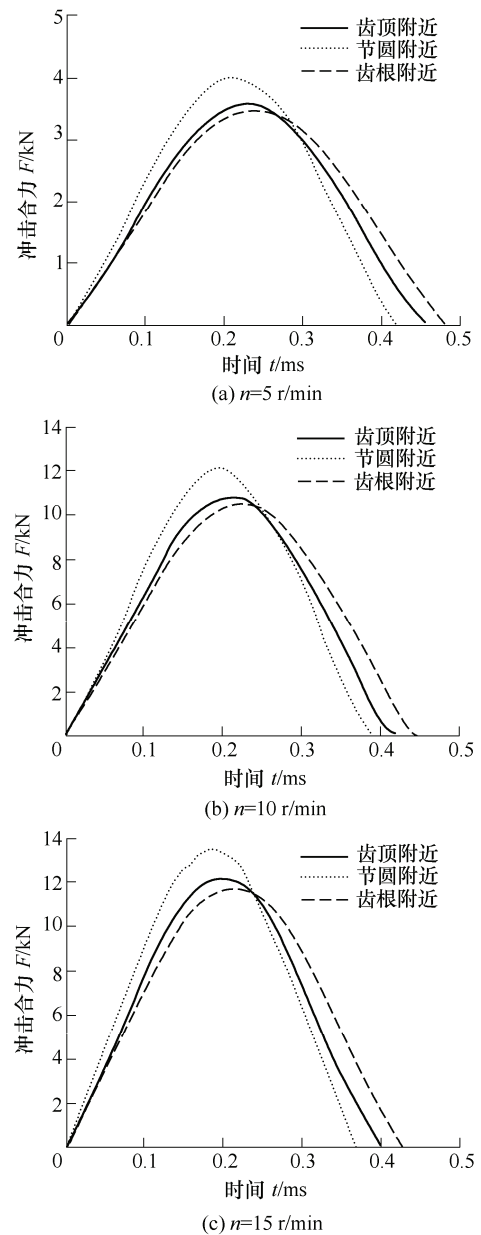


图8 冲击位置对冲击合力的影响

2.3 冲击时间与冲击速度和冲击位置的关系

冲击时间依据接触判断准则计算,亦接触压应力持续的时间即为冲击时间,实际处理时预先设置一大于零的压应力,大于此压应力阈值时视为冲击接触,本文阈值设为1 MPa。图9揭示了不同冲击转速对冲击时间的影响:即冲击转速越大,冲击时间越小,这是与文献[10]研究线外啮合冲击时得出的结论是一致的。不同冲击位置对冲击时间的影响如图10所示,结果表明:冲击时间在节圆附近达到最小,同时向两边增大。

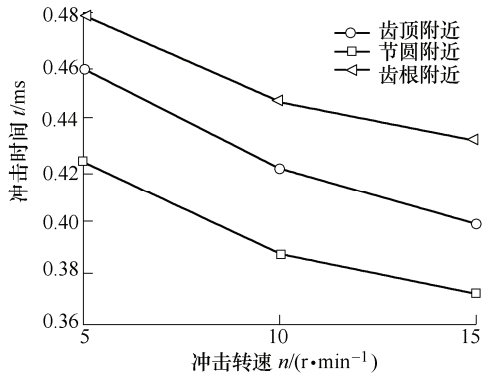


图 9 冲击转速对冲击时间的影响

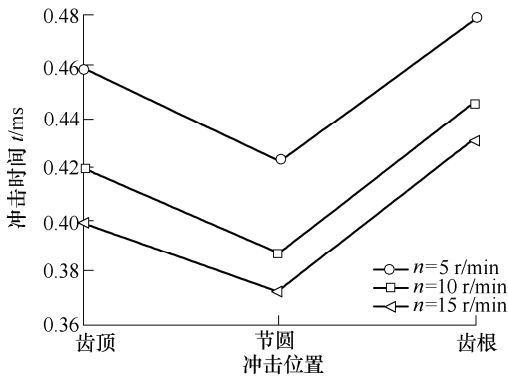
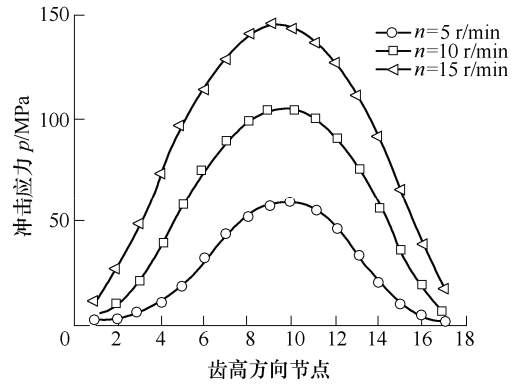
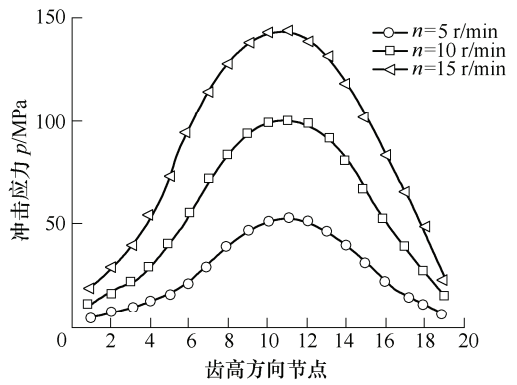


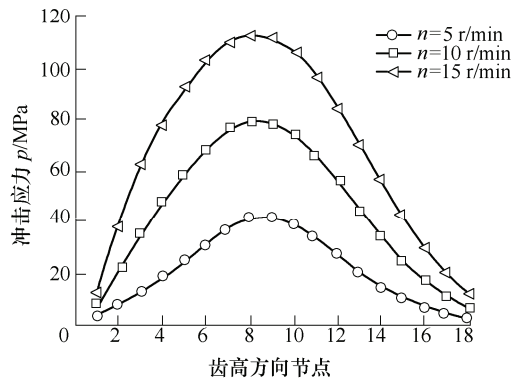
图 10 冲击位置对冲击时间的影响



(a) 齿顶附近



(b) 节圆附近



(c) 齿根附近

图 11 冲击转速对齿高方向冲击应力的影响

2.4 冲击应力与冲击转速和冲击位置的关系

在研究文献中，学者往往致力于冲击合力的研究，事实上由于弹性变形而导致区域接触的存在，接触面上作用的是分布的接触压力，探讨冲击应力(即接触面上的接触应力)的规律更有意义。

2.4.1 冲击转速对冲击应力的影响

图 11 为最大接触应力点处沿齿高方向上所有接触点的应力随冲击转速的变化。由图 11 可知，冲击应力随冲击转速增大而近似地比例增长，并且冲击应力的分布近似呈椭圆形(一半区域)，在接触中心达最大值。

2.4.2 冲击位置对冲击应力的影响

不同冲击位置对齿高方向各接触点冲击应力分布的影响示于图 12，所选择的节点是最大接触应力点处沿齿高方向各接触点。可以看到，冲击应力由齿顶向齿根呈递减趋势。

2.4.3 齿面最大接触应力点的分布规律

在整个冲击接触过程中，不同冲击速度和不同冲击位置条件下最大接触应力点的分布见图 13~15。

图 13~15 经以下处理得到：在某时刻如果一单元接触应力达最大值，便在该单元所处齿面的几

何范围内随机产生一点，整个冲击过程处理完毕便可得到齿面上最大接触应力点的近似分布规律。该方法随单元尺寸的减小而逼近真实情况，本文接触单元齿高方向尺寸在 0.8 mm 左右，齿宽方向尺寸为 1 mm，具有较好的表征精度，x 轴表示齿宽方向，y 轴表示齿高方向，且由齿顶指向齿根。分析图 13~15 可知：不同冲击转速对最大接触应力点分布的集中区域改变不大，并且最大接触应力点集中在齿宽中部区域。

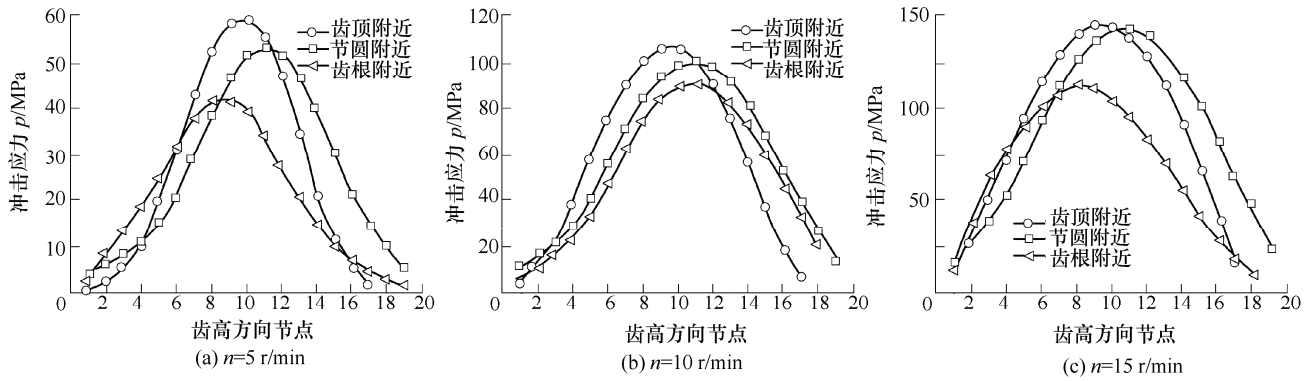


图 12 冲击位置对齿高方向冲击应力的影响

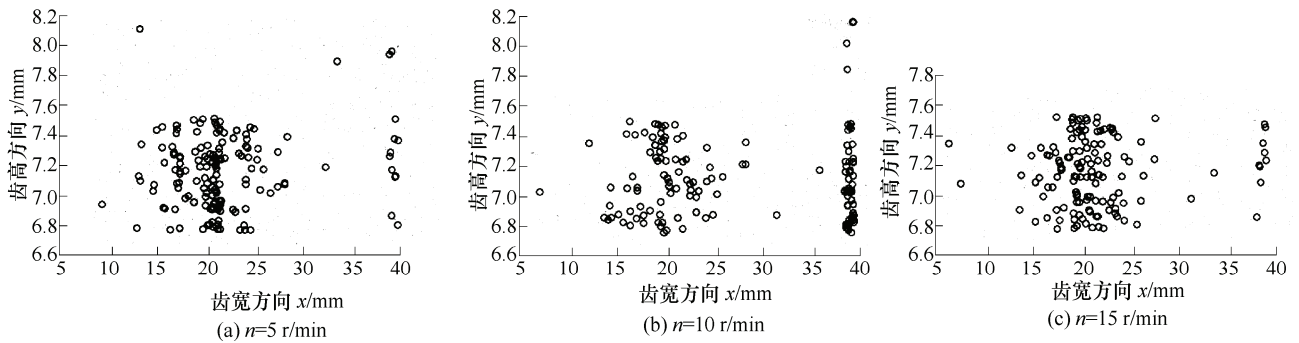


图 13 齿顶附近冲击时不同冲击转速条件下齿面最大接触应力点的分布

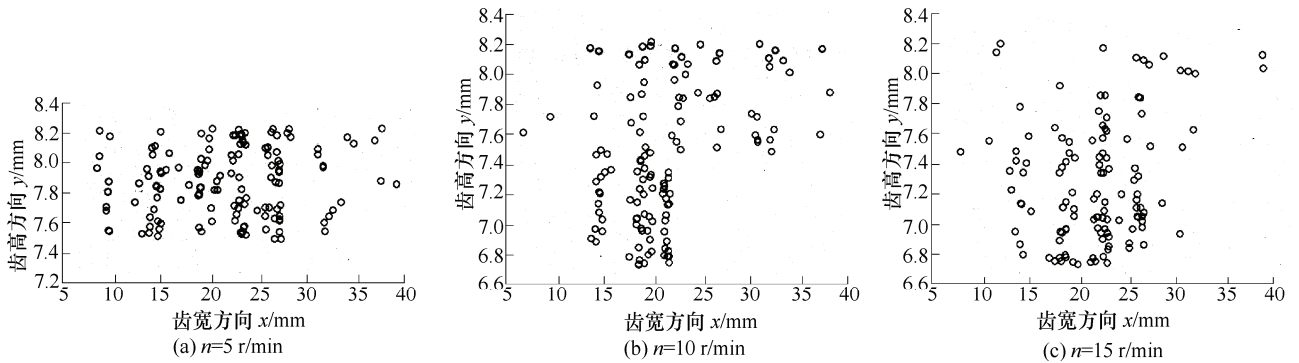


图 14 节圆附近冲击时不同冲击转速条件下齿面最大接触应力点的分布

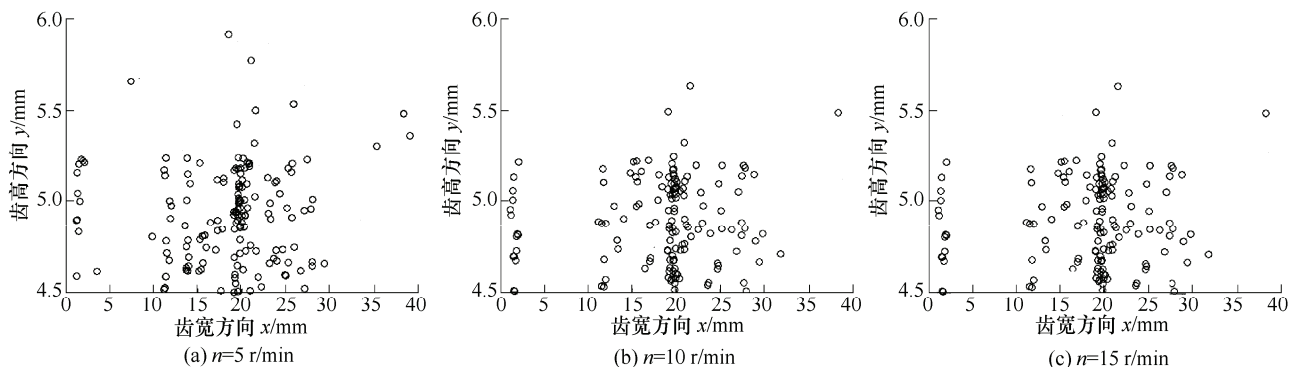


图 15 齿根附近冲击时不同冲击转速条件下齿面最大接触应力点的分布

从图 7~12 显示结果分析可知,圆柱直齿轮冲击三维模型与通常接触问题的二维模型求解所得结果规律相符。事实上圆柱直齿轮接触问题也常常简化为二维问题处理,但是这种简化忽略了齿宽的影响,

给问题的求解精度带来一定的折扣,因此在条件允许的情况下,三维问题的求解不应被二维问题取代。本文限于篇幅,关于齿宽对求解结果的影响不再进行论述。

3 结论

(1) 针对齿轮传动问题, 基于接触动力学相关理论建立齿轮啮合接触冲击模型, 给出啮合接触冲击求解算法, 重点研究了冲击速度和冲击位置对冲击力、冲击时间及冲击应力的影响, 为接触疲劳和疲劳累积的深入研究提供参考, 也有益于把齿面的形状与其传动性能、强度性能联系起来, 论文工作是齿轮传动基础性研究工作的一个方面。

(2) 冲击力合力与冲击力与冲击转速呈近似的线性增长关系, 冲击转速对冲击时间有影响, 且冲击时间随冲击转速的增大而减小。

(3) 冲击力合力在节圆附近冲击时最大, 向两端逐渐减小, 冲击时间在节圆附近时最小, 向两端逐渐增大, 而冲击力则从齿顶向齿根呈递减趋势。

(4) 冲击过程中齿面最大接触应力点集中在齿宽中部, 且冲击转速对最大接触应力点集中区域的影响很小。

参 考 文 献

- [1] 王建军, 李其汉, 李润方. 齿轮系统非线性振动研究进展[J]. 力学进展, 2005, 35(1): 37-51.
WANG Jianjun, LI Qihan, LI Runfang. Research advances for nonlinear vibration of gear transmission systems[J]. Advances in Mechanics, 2005, 35(1): 37-51.
- [2] SEIREG A, HOUSER D. Evaluation of dynamic factors for spur and helical gears[J]. ASME J. Eng. Ind., 1970, 1: 504-515.
- [3] 姚文席, 魏任之. 渐开线直齿轮的啮合冲击响应[J]. 振动、测试与诊断, 1992, 12(2): 27-30.
YAO Wenxi, WEI Renzhi. The response of meshing impact for involute spur gear[J]. Journal of Vibration Measurement & Diagnosis, 1992, 12(2): 27-30.
- [4] 田放. 双圆弧齿轮传动中轮齿的啮合冲击[J]. 北方工业大学学报, 1994, 6(3): 31-37.
TIAN Fang. Meshing impacts of gears with double circular—arc profile[J]. J. North China Univ. of Tech., 1994, 6(3): 31-37.
- [5] 唐进元, 肖利民. 齿轮齿顶修缘时啮合冲击速度的计算[J]. 长沙铁道学院学报, 1995, 13(1): 26-30.
TANG Jinyuan, XIAO Limin. The engagement shock velocity calculation of gear top modification[J]. Journal of Changsha Railway University, 1995, 13(1): 26-30.
- [6] 肖利民, 唐进元. 低噪声齿轮设计方法[J]. 制造技术与机床, 1995 (5-7): 30-33.
XIAO Limin, TANG Jinyuan. A new design method for low noise gear[J]. Manufacturing Technology & Machine Tool, 1995(5-7): 30-33.
- [7] 唐进元, 刘希玲. 齿轮根部沉切尖点啮合冲击速度分析[J]. 机械设计, 1998(4): 25-26.
TANG Jinyuan, LIU Xiling. The analysis of engaging shock velocity at the under cut tip point of gear root[J]. Machine Design, 1998(4): 25-26.
- [8] MUNRO R, MORRISH L, PALMER D. Gear transmission error outside the normal path of contact due to corner and top contact[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 1999, 213(4): 389-400.
- [9] 武宝林, 杨素君, 姚俊红. 齿轮传动中啮合冲击的理论分析[J]. 机械科学与技术, 2003, 22(1): 55-57.
WU Baolin, YANG Sujun, YAO Junhong. Theoretical analysis on meshing impact of involute gears[J]. Mechanical Science and Technology, 2003, 22(1): 55-57.
- [10] 唐进元, 刘欣, 戴进. 基于 ANSYS/LS-DYNA 的齿轮传动线外啮合冲击研究[J]. 振动与冲击, 2007, 26(9): 40-44.
TANG Jinyuan, LIU Xin, DAI Jin. Study on corner contact shock of gear transmission by ANSYS/LS-DYNA software[J]. Journal of Vibration and Shock, 2007, 26(9): 40-44.
- [11] 邵忍平, 孙进才. 齿轮啮合冲击噪声的定量预估[J]. 机械科学与技术, 2001, 20(3): 340-342.
SHAO Renping, SUN Jincai. The quantitative prediction of shock noise from gear transmission[J]. Mechanical Science and Technology, 2001, 20(3): 340-342.
- [12] JAO T C, DEVLIN M T, MILNER J, et al. Influence of surface roughness on gear pitting behavior[J]. Gear Technology, 2006, 9(3): 31-38.
- [13] LIN T, OU H, LI R. A finite element method for 3D static and dynamic contact/impact analysis of gear drives[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 196(9-12): 1716-1728.
- [14] 朱才朝, 唐倩, 王家序, 等. 新型环式减速机的动态特性[J]. 机械工程学报, 2008, 44(4): 58-62.
ZHU Caichao, TANG Qian, WANG Jiayu, et al. Dynamic characteristics of new ring-reducer[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(4): 58-62.

- [15] ZIEGLER P, EBERHARD P, SCHWEIZER B. Simulation of impacts in geartrains using different approaches[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2006, 76(9): 537-548.
- [16] HAUG E J, WU S C, YANG S M. Dynamics of mechanical systems with coulomb friction striction, impact and constraint addition-deletion[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1986, 21(5): 401-406.
- [17] HU B, EBERHARD P. Response bounds for linear damped systems[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1999, 66: 997-1003.
- [18] 周长江, 唐进元, 钟志华. 齿轮传动的线外啮合与冲击摩擦[J]. *机械工程学报*, 2008, 44(3): 75-81.
- ZHOU Changjiang, TANG Jinyuan, ZHONG Zhihua. Corner contact and impact friction of gear drive[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2008, 44(3): 75-81.
-
- 作者简介: 唐进元, 男, 1962 年出生, 教授。主要研究方向为齿轮动力学和数字化制造。
E-mail: jytangcsu@163.com
- 周炜, 男, 1985 年出生。主要研究方向为齿轮接触数值分析。
E-mail: cnihelat@yahoo.com.cn
- 陈思雨, 男, 1981 年出生, 博士研究生。主要研究方向为齿轮非线性动力学。
E-mail: csyd5053@yahoo.com.cn