

DOI: 10.3901/JME.2010.18.157

热力耦合反问题研究*

薛齐文^{1,2} 张雪珊¹

(1. 大连交通大学土木与安全工程学院 大连 116028;

2. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室 大连 116023)

摘要: 引入 Bregman 距离函数及其加权函数, 应用正则化技术, 建立一种非定常热力耦合反问题的数值求解模式。利用测量信息和计算信息的残差构造最小二乘函数, 将反演识别问题转化为一个优化问题进行求解。时域上采用时域精细算法进行离散, 空间上采用八节点等参元技术进行离散, 分别建立便于灵敏度分析的热力耦合正演和反演数值模型。该模型不仅考虑了非均质和参数分布的影响, 而且也便于正演和反演问题的灵敏度分析, 可对热导率和热边界条件等宗量进行有效的单一和组合识别。给出相关的数值算例, 对信息测量误差以及不同函数形式的计算结果作了探讨。数值结果表明, 所建模型能够对非定常热力耦合反问题进行有效的求解, 对各宗量进行有效的识别, 并具有较高的计算精度、较好的稳定性和一定的抗噪性。

关键词: 反问题 多宗量 热力耦合 时域分析 有限元

中图分类号: O482.2

Research of Inverse Problem of Thermo-mechanical Coupling

XUE Qiwen^{1,2} ZHANG Xueshan¹

(1. Civil and Safety Engineering Institute, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028;

2. State Key Lab of Structural Analysis for Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116023)

Abstract: Tikhonov's regularization approach is used to solve inverse problem of thermo-mechanical coupling in transient state with multi-variables, using Bregman distances and weighted Bregman distances in the construction of regularization terms for the Tikhonov's function. The inverse problem is formulated implicitly as an optimization problem by using the residual error between calculated and measured quantities to construct the least square function. A time stepping scheme is used for transient analysis and the eight-node isoparametric element model is given, facilitating sensitivity analysis of direct and inverse problems, and taking account of inhomogeneity and parameters distribution. Single and combined identifications can be carried out for thermal parameters and boundary conditions etc. Satisfactory numerical validation is given, including a preliminary investigation of effect of noise data on the results and the computational efficiency for different regularization terms. Results show that the proposed method can identify single and combined thermal parameters and boundary conditions for thermo-mechanical coupling problems with high computational precision, good stability and certain anti-noise capability.

Key words: Inverse problem Multivariable Thermomechanical coupling Time domain analysis Finite element method

0 前言

在石油、动力、机械等许多重要部门, 在变温条件下工作的结构和部件, 通常都存在温度应力问题, 并且占相当的比重, 甚至成为设计和运行的控制应力。确定实际中温度应力场的前提是先计算分

析温度场, 而材料热物性参数以及热边界条件的确定则是分析温度场的前提, 在实际中这些材料热物性参数以及热边界条件往往是未知的。通过部分已知的温度信息, 采用反演的方法是确定这些参数的有效手段之一。与热相关的反问题是一个有广泛实际应用前景的交叉研究领域, 具有重要的理论和实际工程意义。非定常传热反问题一直是广大学者的研究重点, 并且取得了不少进展, 对热导率、边界条件等宗量进行了有效的识别^[1-3], 如 CHEN 等^[1,3]对不同边界的热流密度和随时间变化的热流密度进

* 国家自然科学基金(10802015)、辽宁省重点实验室基金(2008S036)和工业装备结构分析重点实验室开放基金(GZ0811)资助项目。20090921 收到初稿, 20100313 收到修改稿

行了识别, LOULOU 等^[2]对热导率进行了识别。但是以往的研究多侧重于单一温度场分析, 而未考虑温度场和应力场相互影响、相互耦合的现象, 而且也侧重于特定宗量的反演, 考虑热导率和边界条件的多宗量组合反演模式, 还相对较少。由于热力耦合问题正演分析本身已非常困难, 对于多宗量热力耦合反演问题就变得更为复杂, 许多工作在理论、计算和应用上都需要做进一步的深入探讨。

反问题一般可作为优化问题求解, 是一个典型的不适定性问题。正则化方法则是处理不适定性问题的有效方法, Tikhonov 正则化方法是其中最为常用的方法之一^[4]。该方法在很多领域都有应用, 并且取得了很好的效果。对于该方法正则项的研究, 很多学者进行了探讨^[5], 文献[6-7]也尝试将 Bregman 距离函数及其加权函数作为正则项应用于单一的传热反问题求解, 分别对傅氏传热和非傅氏传热反问题进行了探讨, 均取得了满意的数值结果。本文是文献[6-7]的延续和发展, 尝试将其作为正则项引入到热力耦合反问题求解, 为耦合反问题求解探索有效途径。由于反演计算中需要多次进行正演分析计算, 正演计算的精度直接决定着反演分析的结果, 当采用 Tikhonov 正则化方法进行反演分析时, 所建立的正演模型必须便于敏度分析, 本文也将高精度且便于敏度分析的时域精细算法引入到正演模型分析计算中, 希望能够为反演分析提供高精度的正演数值解。

鉴于以上考虑, 本文基于一种时域精细算法, 引入 Bregman 距离函数以及加权函数, 并借助恰当的空间离散技术, 应用 Tikhonov 正则化方法, 建立了非定常热力耦合正/反问题的数学模型, 借助部分温度信息对热导率和边界条件构成的组合反问题进行了求解。计算结果表明, 所建耦合反演模型在求解二维非定常热力耦合反问题时具有较高的精度和较好的抗不适定性。此外, 对信息误差的影响进行初步探讨, 并对不同函数形式的计算结果进行了探讨。

1 热力耦合正演分析模型

对于各向同性热弹性体, 不计体力和动态耦合效应, 一阶非定常热力耦合问题的控制方程可以表示为^[8]

$$\alpha_1 \theta_0 (3\lambda + 2G) \frac{de_i}{dt} + \rho c \theta_{,t} = [\kappa_{ij} \theta_{,j}]_{,i} \quad x_i \in \Omega \quad (1)$$

$$GV^2 U + (G + \lambda) \nabla \operatorname{div} U_{,j,i} + (3\lambda + 2G) \alpha_1 (\theta - \theta_0)_{,i} = 0$$

$$x_i \in \Omega \quad (2)$$

式中, α_1 为材料线膨胀系数, ρ 为物体密度, c 为热容系数, κ_{ij} 为热导率, e_i 即 ε_i 为材料的总应变, $\lambda = \nu E / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$ 为拉梅常数, $G = E / [2(1 + \nu)]$ 为切变模量, ν 为泊松比, θ_0 为物体初始温度, θ 为温度项, $\theta_{,t}$ 表示温度对时间的导数, U 为结构位移, Ω 和 x_i 分别代表所讨论问题的域和坐标矢量。下标 i, j ($i, j = 1, 2, 3$) 为求和指标, i, j 大小表示问题维数。

热初始条件和热边界条件分别为^[8]

$$\theta = \theta_0 \quad t = 0 \quad (3)$$

$$\theta = \bar{\theta} \quad x, y \in \Gamma_1 \quad (4)$$

$$n_i (\kappa_{ij} \theta_{,j}) = q + h(\theta - \theta_a) = q + h\theta - h_1 \quad x, y \in \Gamma_2 \quad (5)$$

式中, Γ_1 、 Γ_2 代表 Ω 的边界; $\bar{\theta}$ 、 q 、 h 及 θ_a 分别表示为给定的边界温度、边界热流和对流系数及环境温度函数, 其中可能都含有未知部分。

位移初始条件和边界条件分别为

$$U = U_0 \quad t = 0 \quad (6)$$

$$U = \bar{U} \quad x, y \in \Gamma_3 \quad (7)$$

由于热传导控制方程中存在温度对时间的导数, 本文引入时域精细算法进行时域离散, 空间上采用有限元法进行离散^[9]。

时域精细算法是将时间分成若干时间段, 在每一个时间段内进行离散, 温度 θ 可表示为

$$\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \theta^m s^m \quad s = (t - t_0) / t_s \quad (8)$$

式中 t_0 代表时间段的起始时间, t_s 表示时间段长, θ^m 表示温度 θ 展开的第 m 阶系数项。

变换公式以及温度 θ 对时间的一阶导数可表示为

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t_s} \frac{d}{ds} \quad \theta_{,t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)}{t_s} \theta^{m+1} s^m \quad (9)$$

当热导率、热容系数和边界条件等参数不随时间变化时, 利用加权余量技术^[10], 在每个时间段内, 热传导控制方程的有限元形式可写为

$$(m+1)/t_s \mathbf{C} \boldsymbol{\theta}^{m+1} + \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\theta}^m = \boldsymbol{\kappa}^p \bar{\boldsymbol{\theta}}^m + \mathbf{B} \mathbf{q}^m + \mathbf{B}_1 \mathbf{h}_1^m + \mathbf{P}^m \quad (10)$$

式中, $\boldsymbol{\theta}^{m+1}$ 、 $\boldsymbol{\theta}^m$ 为不包括给定值在内的节点温度矢量; $\boldsymbol{\kappa}$ 和 $\boldsymbol{\kappa}^p$ 是与热导率相应的矩阵; \mathbf{C} 是与热容系数相应的矩阵; $\bar{\boldsymbol{\theta}}^m$ 、 \mathbf{q}^m 、 \mathbf{h}_1^m 分别是与给定的边界温度、边界热流和对流系数以及环境温度对应的矢量; \mathbf{B} 、 \mathbf{B}_1 是与边界热流和对流系数以及环境温度相应的已知矩阵; \mathbf{P}^m 为耦合项载荷当量。

当 $m \neq 0$ 时, $\bar{\boldsymbol{\theta}}^m$ 、 \mathbf{q}^m 、 \mathbf{h}^m 、 \mathbf{h}_1^m 、 \mathbf{P}^m 均为零,

当 $m=0$ 时, $\bar{\theta}^m$ 、 q^m 、 h^m 、 h_1^m 、 P^m 为已知或未知的常数。时段初始条件 θ^0 在第一个时段内, 由给定的初始条件求得, 在其他的时段, 可由上个时段的信息按式(8)求得, $\theta^0, \theta^1, \theta^2, \dots, \theta^m$ 由递推公式(10)依次求得。时段初始应变为零, 其他各时段的应变率采用预报校正法计算, 每个时段逐次近似迭代求得。

对于热弹性体, 其有限元方程可写为

$$k^*U = F \tag{11}$$

式中, k^* 为结构刚度阵, U 为待求的结构位移, F 为热负荷矢量, 若弹性体的边界上存在表面力或集中力, 右端 F 则还包括这些载荷矢量。

由于热传导控制方程中含有结构应变率耦合项, 热弹性体有限元列式中含有热负荷矢量, 因此热力是耦合在一起的, 正演分析过程是方程式(10)、(11)的反复迭代求解。

2 热力耦合反演分析模型

由某些已知的温度信息, 并借助反演技术, 估算和确定式(1)~(5)中关于与热相关的物性参数 $\bar{\theta}, q, h, h_1, k$ 中未知部分, 将所有未知量统一记作 ϕ , 并表达为

$$\phi^T = \{k_j^{uT}, q^{uT}, h^{uT}, \bar{\theta}^{uT}, h_1^{uT}\} \tag{12}$$

式中 ϕ 可通过极小化如下定义的 Tikhonov 正则泛函来确定

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \sum_i \left\{ \sum_s [\theta(\phi) - \theta_m] \cdot [\theta(\phi) - \theta_m] \right\} + \lambda D(\phi) = \frac{1}{2} R^T R + \lambda D(\phi) \tag{13}$$

式中 θ_m 代表测点的温度信息, $D(\phi)$ 代表引入的 Bregman 距离相关函数, ϕ 代表待识别的参量, λ 代表正则参数, $\sum_i (\sum_s)$ 代表在时间和空间上的累积。

式(13)两边同时对未知量 ϕ 微分, 可得到目标函数对未知量的一阶导数

$$\nabla F(\phi) = J^T R + \lambda D_\phi = 0 \tag{14}$$

采用迭代法求解方程式(14), 将下一步的计算结果在当前步的计算结果附近级数展开, 并略去高阶小量, 可得

$$R(\phi^{n+1}) = R(\phi^n) + J^n \Delta \phi \quad D_\phi(\phi^{n+1}) = D_\phi(\phi^n) + J_{D_\phi}^n \Delta \phi \tag{15}$$

$$J = \partial \theta / \partial \phi \quad D_\phi = \partial D / \partial \phi \quad J_{D_\phi} = \partial D_\phi / \partial \phi \tag{16}$$

将式(16)代入式(15), 整理后可得

$$(J^{nT} J^n + \lambda J_{D_\phi}^n) \Delta \phi^n = -(J^{nT} R^n + \lambda D_\phi) \tag{17}$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta \phi \tag{18}$$

迭代过程中, 须知温度场对各未知参量的灵敏度。

由式(8)可得温度场对各未知参量的一阶灵敏度

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \sum_{m=0} \frac{\partial \theta^m}{\partial \phi} s^m \tag{19}$$

式中 $\partial \theta^m / \partial \phi$ 可以由递推公式(10)微分求得, $\partial \theta^0 / \partial \phi$ 和 $\partial \theta^1 / \partial \phi$ 在第一个时间段内由初始条件求得, 在其他第 NT 个时间段内, 由上一个时段的相关信息求得

$$\frac{\partial \theta_{NT}^0}{\partial \phi} = \sum_{m=0} \frac{\partial \theta_{NT-1}^m}{\partial \phi} s^m \quad \frac{\partial \theta_{NT}^1}{\partial \phi} = \sum_{m=0} (m+1) \frac{\partial \theta_{NT-1}^{m+1}}{\partial \phi} s^m \tag{20}$$

式(10)中耦合项对未知变量的灵敏度可由热弹性体有限元列式计算位移关系, 再计算得到各时段末所对应的应变关系, 进而得到各时间步的应变率对各未知变量的灵敏度。

3 Bregman 距离函数

Bregman 距离是一种距离的概念^[11], 本文中 η_q 表达式选取为

$$\eta_q(\phi) = \frac{1}{1+q} \sum_{i=1}^{N_i} \phi_i \frac{\phi_i^q - m^q}{q} \tag{21}$$

对于每个未知量 ϕ_i , 可能它们的量级不同, 添加一个加权系数 $1/f_{\phi_i}$, Bregman 距离的具体表达形式以及一阶和二阶梯度矩阵可见文献[6]。

对于正则参数的调整, 本文采用拟信赖域方法进行, 具体的过程可见文献[12]。

4 数值算例

考虑圆管横截面的热力耦合反演问题, 如图 1 所示, 内径为 0.8 m, 外径为 1.0 m。由于对称关系可以从中选取 1/4 做有限元分析, 共分为 20 个八节点等参单元。总计算时域为 1.0×10^{-3} s, 时间段长取为 1.0×10^{-4} s。已知温度信息是 10 个测点(35 41 43 45 51 67 73 75 77 83)在每隔 1 个时间段的温度值。在考虑数据噪声的影响时, 测点的温度信息由 $\theta_p = (1 + \sigma)\theta_e$ 给出, θ_p 为含有测量误差的测点温度信息, θ_e 为测点温度信息的准确值, 由正演解析解给出。反演变量初值热导率取为 30, 边界热流取为 5.0×10^3 , 第一类边界温度取为 5.0。

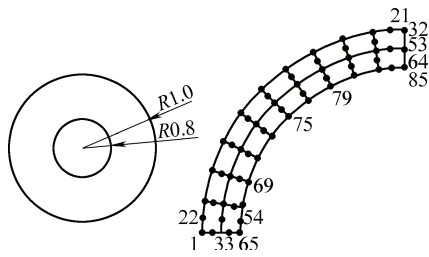


图 1 圆管横截面积有限元网格

4.1 热导率和第二类边界的单一反演

外圆弧边界(节点号为 1~21 的边界)是第一类边界条件, 边界温度精确解为 1.0 °C; 内圆弧边界(节点为 65~85 的边界)是第二类边界条件, 边界热流精确解为 $q=(2\ 000/4.2, 3\ 000/4.2)$ W/m²(分为两个区, 65~75 为第一区, 75~85 为第二区), 方向指向圆心(即为正); 从外到内由两种材料构成, 分

为两层, 每层 10 个单元, 热导率精确解 $\kappa=(15/4.2, 20/4.2)$ W/(m·K), 热膨胀系数 $\alpha_1=(1.0\times 10^{-5}, 2.0\times 10^{-5})$ K⁻¹, 弹性模量 $E=(2.0\times 10^5, 3.0\times 10^5)$ kPa, 泊松比 $\nu=(0.3, 0.4)$, 不受其他外载的作用, 初始条件和其他计算参数分别为

$$\theta(x, y, 0) = \cos(\pi i \sqrt{(x-1.0)^2 + y^2} / 2) + 273.16$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(x, y, 0) = 0 \quad \rho c = 1.0$$

例 1: 热导率未知, 其他参量已知, 反演结果如表 1 所示。

例 2: 第二类边界热流密度未知, 其他各参量已知, 反演结果如表 2 和图 2 所示。

表 1 热导率未知时测量误差对解的影响

反演变量	真实值		反演值($\sigma=0.01$)				反演值($\sigma=0.05$)			
	正则项	D_0	D_1	\bar{D}_0	\bar{D}_1	D_0	D_1	\bar{D}_0	\bar{D}_1	
κ_1	15.0	14.439	14.439	14.439	14.439	12.307	12.307	12.307	12.307	
κ_2	20.0	19.668	19.668	19.668	19.668	18.415	18.415	18.415	18.415	
迭代步数 n	—	22	23	21	22	23	25	22	24	

表 2 第二类边界热流密度未知时测量误差对解的影响

反演变量	真实值		反演值($\sigma=0.01$)				反演值($\sigma=0.05$)			
	正则项	D_0	D_1	\bar{D}_0	\bar{D}_1	D_0	D_1	\bar{D}_0	\bar{D}_1	
q_1	2 000	2 020.5	2 020.5	2 020.5	2 020.5	2 102.4	2 102.4	2 102.4	2 102.4	
q_2	3 000	3 030.5	3 030.5	3 030.5	3 030.5	3 152.4	3 152.4	3 152.4	3 152.4	
迭代步数 n	—	17	19	17	17	17	19	17	18	

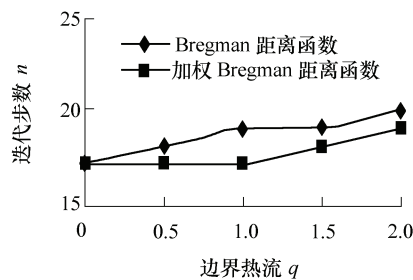


图 2 迭代步数变化曲线

4.2 热导率、第一类边界和第二类边界组合反演

此算例中的计算参数、热导率和外圆弧边界条件与第 4.1 节相同, 现进行组合反演识别。

例 1: 热导率和第一类边界温度未知, 其他各参量已知, 反演结果如表 3 所示。

例 2: 热导率和第二类边界热流密度未知, 其他各参量已知, 反演结果如表 4 所示。

表 3 热导率和第一类边界温度未知时测量误差对解的影响

反演变量	真实值		反演值($\sigma=0.01$)				反演值($\sigma=0.05$)			
	正则项	D_0	D_1	\bar{D}_0	\bar{D}_1	D_0	D_1	\bar{D}_0	\bar{D}_1	
κ_1	15.0	14.806	14.806	14.806	14.806	14.083	14.083	14.083	14.083	
κ_2	20.0	19.682	19.682	19.682	19.682	18.476	18.476	18.476	18.476	
$\bar{\theta}$	1.0	1.100 2	1.100 2	1.100 2	1.100 2	1.525 8	1.525 8	1.525 8	1.525 8	
迭代步数 n	—	27	28	27	28	27	28	27	28	

表4 热导率和第二类边界热流密度未知时测量误差对解的影响

反演变量	真实值	反演值($\sigma=0.01$)				反演值($\sigma=0.05$)			
	正则项	D_0	D_1	\bar{D}_0	\bar{D}_1	D_0	D_1	\bar{D}_0	\bar{D}_1
κ_1	15.0	14.965	14.965	14.965	14.965	14.833	14.833	14.833	14.833
κ_2	20.0	20.002	20.002	20.002	20.002	20.010	20.010	20.010	20.010
q_1	2 000	2 020.1	2 020.1	2 020.1	2 020.1	2 100.2	2 100.2	2 100.2	2 100.2
q_2	3 000	3 029.8	3 029.8	3 029.8	3 029.8	3 148.8	3 148.8	3 148.8	3 148.8
迭代步数 n	—	42	44	40	42	42	44	41	42

计算结果表明以下几点。

(1) 本文所引方法可对一阶非定常热力耦合反问题中的热导率和热边界条件等宗量进行有效的单一和组合识别, 并且具有较高精度和较强的抗误差干扰能力, 数值算例验证了其可行性。

(2) 从计算结果来看, 对于一阶非定常热力耦合问题, 在同等限度的误差水平下, 采用不同函数形式做正则项, 计算结果相差不明显, 计算效率稍有不同, 但是不明显。采用加权函数时, 计算效率的提高不如单一温度场识别时提高明显, 见表1~4。

(3) 信息误差对反演结果有一定影响, 反演结果误差随信息误差的增加而变大, 并对不同的反演变量有所不同, 尤其是多宗量反演。从计算结果看, 热导率和第一类边界组合识别时对信息误差较为敏感, 见表3。

(4) 从计算结果来看, 对于热力耦合问题, 相同的函数形式, 随着参数 q 的增加, 迭代步数变化也不如单一温度场识别变化明显, 见图2。

5 结论

(1) 针对一阶非定常热力耦合问题, 首次采用时域正演精细算法和 Tikhonov 正则化方法, 并引入 Bregman 距离函数及其加权函数作为正则项, 实现了对热导率和热边界条件有效的单一和组合识别。

(2) 通过数值算例验证, 所提求解途径在求解一阶非定常多宗量热力耦合反问题时具有一定的精度、较好的稳定性和抗不适定性, 以及良好的计算效率, 可进一步地将其应用于热冲击热力耦合反问题研究。

(3) 在同等限度的误差水平下, 采用不同形式的 Bregman 距离函数及其加权函数做正则项, 计算精度相差明显, 但其计算效率稍有不同, 采用加权函数时, 计算效率相对有所提高。

对于热力耦合问题, 其他各宗量的组合识别有待更进一步的研究探讨。对于非傅氏热力耦合问题

也将进一步深入研究。

参 考 文 献

- [1] CHEN H T, LIN S Y. Estimation of two-sided boundary conditions for two-dimensional inverse conduction problems[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2002, 45(1): 15-23.
- [2] LOULOU T, ARTIOUKHINE E. Optimal choice of descent parameter in gradient-type methods when applied to combined parameter and function or multi-function estimation[J]. Inverse Problem in Science and Engineering, 2003, 11(4): 273-288.
- [3] HAQHIQHI M R G, EGHTEHAD M, MALEKZADEH P. Two-dimensional inverse heat transfer analysis of functionally graded materials in estimating time-dependent surface heat flux[J]. Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, 2008, 54(7): 744-762.
- [4] WANG G, HAN X. A kind of modified tikhonov regularization method based on genetic algorithms[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2006, 27: 33-37.
- [5] HINESTROZA D, MURIO D A. Regularization techniques for nonlinear problems[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1999, 37(10): 145-159.
- [6] XUE Q W, WEI W, YANG H T. Parameters identification of inverse heat conduction problems in transient state with multi-variables[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2009, 30(1): 65-69.
- [7] XUE Q W, YANG H T. A regularized solution of inverse second-order transient heat conduction problems with multi-variables[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2007, 30(1): 774-780.
- [8] MA Y. Precise time-integration method for dynamic response of thermo-mechanical coupled problem[J]. Journal of Mechanical Strength, 2007, 29(3): 483-486.
- [9] YANG H T. A precise algorithm in the time domain to solve the problem of heat transfer[J]. Numerical Heat
(下转第 168 页)