

瞬心无穷远时近似直线轨迹的四杆机构综合*

王 忠 朱洪俊 廖 磊 杨玉民

(西南科技大学制造科学与工程学院 绵阳 621010)

摘要: 连杆拐点圆上点附近曲线段与直线之间的近似度很高, 工程上常利用其机构作为直线导引机构。针对铰链四杆机构连杆瞬心无穷远时拐点圆不存在, 现有的方法不能综合出近似直线轨迹四杆机构的问题, 提出瞬心无穷远时连杆曲率叠加原理, 根据运动学原理进行分析, 推导连杆上任意点曲率计算公式, 证明曲率叠加原理的正确性, 并得到求解铰链四杆机构连杆两铰链线上零曲率点的图解法。利用图解法能够解决瞬心无穷远时近似直线导引机构的综合问题, 从理论上解决了瞬心无穷远时这一特定位置近似直线轨迹导引机构的综合问题。得到的方法简单、直观、适用, 是拐点圆理论有力的补充和完善。

关键词: 近似直线 四杆机构 综合

中图分类号: TH13

0 前言

直线轨迹导引机构在机械工程中有着广泛的应用, 特别是铰链四杆近似直线导引机构由于具有运动副和构件数少、结构简单的优点, 深受工程技术人员青睐。某些连杆曲线中曲率为零的点附近曲线段与直线之间的近似度很高, 这一事实早已众所周知。近似直线轨迹四杆机构的综合问题是一个古老的问题, 近一个世纪以来引起了机构学家、数学家的广泛关注和兴趣并取得了一系列的成果, 其理论基础是欧拉—萨伐里方程。欧拉—萨伐里方程仅能成功地解决连杆瞬心处于有限范围内的铰链四杆机构近似直线轨迹综合问题^[1]。DIJKSMAN^[2]分析了许多机构位型下 Ball 点的位置, 给出了大量的四杆直线机构。HAN^[3]给出了曲率驻点曲线未蜕化时综合具有 4、5 点接触直线的四杆机构方法, 给出综合公式、综合实例。沈惠平等^[4]介绍了拐点圆的波比里尔图解法及其特性, 并用拐点圆综合了实现近似直线轨迹的四杆起重机构。对于瞬心无穷远时的近似直线机构综合, 彭伟斌^[5]作了有益的探索。

上述研究均没有解决四杆机构瞬心无穷远时, 拐点曲线的求解这一理论问题。本文以运动学原理为工具, 推导了连杆瞬心无穷远时连杆任意点曲率公式, 得到拐点曲线的解析式, 获得文献[6]所述连杆上特殊点的直线机构综合图解法。

1 曲柄滑块机构曲率叠加原理

在图 1 所示的曲柄滑块机构, 曲柄 AB 以角速

度 ω 作匀速转动, 连杆为 BC, 其上另外有通过铰链连线的三点 D、E、F, 下面来分析连杆上这些点的轨迹特点及其最高点、最低点处曲率半径。

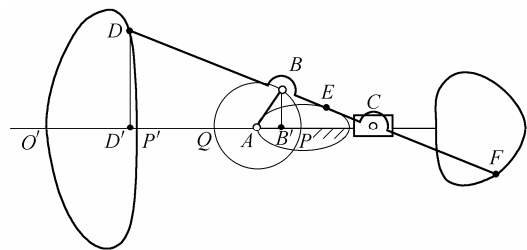


图 1 曲柄滑块机构

假设主动件 AB 逆时针转动, 在图 1 所示位置铰链 B 点将获得一个水平向左移动的速度分量, D、E、F 连杆上所有点均向左移动。铰链 C 左边的各连杆点将作逆时针方向转动, 而铰链 C 右边的各连杆点则作顺时针方向的转动。

当曲柄与水平线间的夹角分别为 0°、180°时, B 点分别处在水平线的 P 和 Q 点, 两点的距离为曲柄 AB 长的 2 倍。同时连杆各点也分别两次处在水平线上。由于连杆点之间的距离固定, 故其上各点运动轨迹与水平直线 AC 的两个交点之间距离为曲柄 AB 长 2 倍。

D 点到水平线之间的距离为 DD'

$$l_{DD'} = l_{BB'} \frac{l_{CD}}{l_{BC}} \quad (1)$$

相同的比例因子均满足 D 点整个运动历程。A 点的圆轨迹高度值为 $2l_{AB}$, 故 D 点封闭轨迹的高度值为 $2l_{AB}(l_{CD}/l_{BC})$ 。总之, D 点的轨迹除了水平宽度与 B 点相同, 铅垂高度为 B 点高度的 l_{CD}/l_{BC} 倍以外, 其形状与 B 点轨迹相似。

对其他的点也存在相同的关系, 只是比例因子

* 国家高技术研究发展计划(863 计划, 2002AA421220)和四川省教育厅计划(2004C016)资助项目。20061227 收到初稿, 20070806 收到修改稿

不同而已，特别是对于 B 、 C 之间的 E 点，比例因子 $l_{CE}/l_{BC} < 1$ 。

度量一条曲线的弯曲程度用曲率 κ ，在 D 点运动轨迹的最高(低)点处，曲柄与水平线垂直，其轨迹切线方向与 B 点切向方向相同， D 、 B 两点速度相等，故其水平距离与 B 点具有相同的变化量，但其铅垂距离仍然发生了比例因子 l_{CD}/l_{BC} 倍的变化，故 D 点在轨迹最高(低)处曲率将发生变化，由曲率公式

$$\kappa = \frac{y'''}{(1+y')^2} \quad (2)$$

知道当在曲线的最高处，曲线的曲率仅仅受 y 坐标的二阶导数的影响。当连杆曲线的凹向上时曲率定义为正，反之为负，故在 D 点轨迹的最高(低)曲率为^[6]

$$\kappa_D = -\frac{1}{l_{AB}} \frac{l_{CD}}{l_{BC}} \quad (3)$$

对于图 2a 所示铰链四杆机构，其连杆瞬心处于无穷远时的位置，借用前面的结论，因为图 2b 连杆上各点的曲率不受 C 点曲率的影响，图 2c 中连杆上各点的曲率不受 B 点曲率的影响，所以可以化作是图 2b、2c 两个图所示曲柄滑块机构同一点曲率的叠加。因此，图 2a 所示的铰链四杆机构连杆 E 、 G 、 F 点的曲率为

$$\kappa_E = -\frac{1}{l_{AB}} \frac{l_{CE}}{l_{BC}} + \frac{1}{l_{DC}} \frac{l_{BE}}{l_{BC}} \quad (4)$$

$$\kappa_G = -\frac{1}{l_{AB}} \frac{l_{CG}}{l_{BC}} - \frac{1}{l_{DC}} \frac{l_{BG}}{l_{BC}} \quad (5)$$

$$\kappa_F = \frac{1}{l_{AB}} \frac{l_{CF}}{l_{BC}} - \frac{1}{l_{DC}} \frac{l_{BF}}{l_{BC}} \quad (6)$$

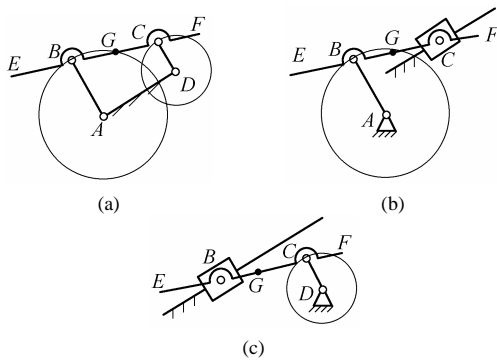


图 2 铰链四杆机构连杆曲率叠加关系图

同样，图 3 所示的铰链四杆机构连杆 E 、 G 、 F 点的曲率为

$$\kappa_E = -\frac{1}{l_{AB}} \frac{l_{CE}}{l_{BC}} - \frac{1}{l_{DC}} \frac{l_{BE}}{l_{BC}} \quad (7)$$

$$\kappa_G = -\frac{1}{l_{AB}} \frac{l_{CG}}{l_{BC}} + \frac{1}{l_{DC}} \frac{l_{BG}}{l_{BC}} \quad (8)$$

$$\kappa_F = \frac{1}{l_{AB}} \frac{l_{CF}}{l_{BC}} + \frac{1}{l_{DC}} \frac{l_{BF}}{l_{BC}} \quad (9)$$

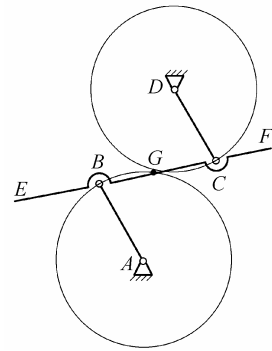


图 3 反向铰链四杆机构

2 从运动学角度分析连杆点的曲率

前面简要地分析了瞬心处于无穷远时，连杆铰链连线上的点的曲率计算方法，下面将以运动学原理为基础来研究这一问题，并将其推广，得到更为一般的结论。

由运动学原理来分析连杆上任意点 D 在连杆瞬心无穷远时的曲率半径，基本思想如下：当 D 点的速度方向及大小均为已知时，如果能求出其向心加速度大小和方向，则根据向心加速度、速度及曲率半径之间的关系可求出 D 点曲率半径和凹向。

连杆瞬心无穷远时，连杆作平动，连杆角速度为 0，对图 4 所示的曲柄滑块机构，假设主动件 AB 以角速度 ω 逆时针方向转动，则

$$v_D = v_C = v_B = \omega l_{AB} \quad (10)$$

式中，速度 v 方向向左，连杆 BC 的角速度为 0。

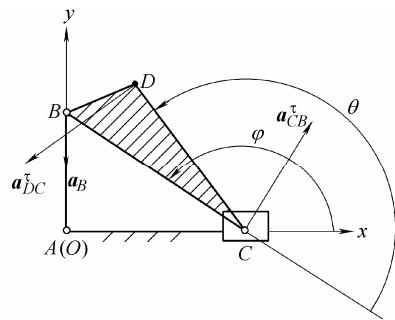


图 4 曲柄滑块机构加速度分析图

下面来分析 D 点加速度，建立直角坐标系 Oxy ，如图 4 所示。由相对运动原理

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t \quad (11)$$

式中， $\mathbf{a}_{CB}^n = 0$ 。

设 CB 与 x 轴正向夹角为 φ ，将其在 Oxy 坐标系中写成投影式

$$\begin{cases} a_{Cx} = 0 + |a_{CB}^t| \sin \varphi \\ -\omega^2 l_{AB} - |a_{CB}^t| \cos \varphi = 0 \end{cases} \quad (12)$$

解得

$$\begin{cases} |\mathbf{a}_{CB}^{\tau}| = -\frac{\omega^2 l_{AB}}{\cos \varphi} \\ a_{Cx} = -\omega^2 l_{AB} \tan \varphi \end{cases} \quad (13)$$

再有

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{DC}^n + \mathbf{a}_{DC}^{\tau} \quad (14)$$

式中, $\mathbf{a}_{DC}^n = 0$ 。

y 轴的投影式为

$$\begin{aligned} a_{Dy} = 0 + \frac{\omega^2 l_{AB} l_{DC}}{l_{BC} \cos \varphi} \cos(\varphi + \theta) = \\ \omega^2 l_{DC} \tan \varphi \cos(\varphi + \theta) \end{aligned} \quad (15)$$

根据曲率、速度、法向加速度的关系, 并考虑式(10)、(15)得 D 点曲率

$$\kappa_D = \frac{l_{DC} \tan \varphi \cos(\varphi + \theta)}{l_{AB}^2} \quad (16)$$

当 $\theta = 180^\circ$ 时, 式(16)与式(3)相符。

下面来分析如图 5 所示的铰链四杆机构, 当连杆瞬心处于无穷远时, 连杆 B 、 C 、 E 点速度相同, 连杆 BC 角速度为 0, 加速度存在如下的关系

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^{\tau} \quad (17)$$

式中, $\mathbf{a}_{CB}^n = 0$ 。

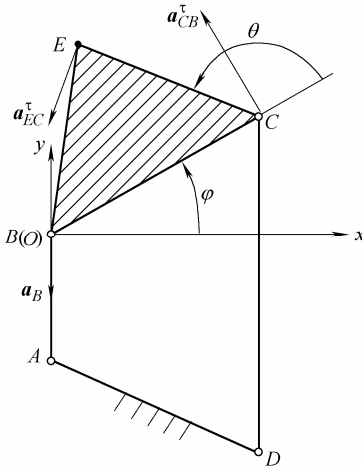


图 5 铰链四杆机构加速度分析图

图 5 中设 BC 与 x 轴正向所夹角为 φ , 将其在 Oxy 坐标系中写成投影式

$$a_{Cx} = 0 - |\mathbf{a}_{CB}^{\tau}| \sin \varphi - \frac{(\omega l_{AB})^2}{l_{CD}} = -\frac{(\omega l_{AB})^2}{l_{AB}} + |\mathbf{a}_{CB}^{\tau}| \cos \varphi \quad (18)$$

解得

$$\begin{cases} |\mathbf{a}_{CB}^{\tau}| = \left(\frac{1}{l_{AB}} - \frac{1}{l_{CD}} \right) (\omega l_{AB})^2 \\ a_{Cx} = \left(-\frac{1}{l_{AB}} + \frac{1}{l_{CD}} \right) (\omega l_{AB})^2 \tan \varphi \end{cases} \quad (19)$$

对于 E 点作加速度分析, 选择 C 点作为基点, 则

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{EC}^n + \mathbf{a}_{EC}^{\tau} \quad (20)$$

式中, $\mathbf{a}_{EC}^n = 0$ 。

在 Oxy 坐标系 y 轴投影, 得到

$$\begin{aligned} a_{Ey} = a_{Cy} + a_{ECy}^{\tau} = -\frac{(\omega l_{AB})^2}{l_{CD}} + (\omega l_{AB})^2 \times \\ \frac{l_{EC}}{l_{BC}} \left(\frac{1}{l_{AB}} - \frac{1}{l_{CD}} \right) \frac{\cos(\varphi + \theta)}{\cos \varphi} \end{aligned} \quad (21)$$

由此

$$\kappa_E = -\frac{1}{l_{CD}} + \left(\frac{1}{l_{AB}} - \frac{1}{l_{CD}} \right) \frac{l_{EC}}{l_{BC}} \frac{\cos(\varphi + \theta)}{\cos \varphi} \quad (22)$$

当 $\theta = 180^\circ$ 、 0° 时, 其结果与式(4)、(6)相符。

对于图 3 所示的四杆机构, 同理可得

$$\kappa_E = \frac{1}{l_{CD}} + \left(\frac{1}{l_{AB}} + \frac{1}{l_{CD}} \right) \frac{l_{EC}}{l_{BC}} \frac{\cos(\varphi + \theta)}{\cos \varphi} \quad (23)$$

当 $\theta = 180^\circ$ 、 0° 时, 其结果与式(7)、(9)相符。

上面从理论上推导了连杆瞬心无穷远时连杆上各点曲率的数学关系, 同时也证明了前面直观分析的正确性。

3 利用曲率进行近似直线机构综合

当连杆瞬心无穷远时, 直接利用曲率公式, 便能方便地求出连杆上此瞬时曲率为零的点, 称曲率为零的点构成的曲线为拐点线, 拐点线上点的轨迹能够与直线达到二阶密切, 在一个较长的距离范围内逼近直线轨迹。

对于图 4 所示的曲柄滑块机构, 从式(16)可得: 在 BC 线上, 除 C 点轨迹为直线外, 在此瞬时不可能有曲率为 0 的点存在; 只有当 CD 连线与 x 轴的夹角为 90° 时, 曲率等于 0, 其轨迹可逼近为直线。此时, 拐点圆退化为过 C 点与 x 轴垂直的直线。

对于图 5 所示铰链四杆机构, 分析式(22)可得: 此时, 拐点圆退化为一封闭的复杂曲线。特别值得注意, 当 $\theta = 180^\circ$ 时

$$\kappa_E = -\frac{1}{l_{CD}} - \left(\frac{1}{l_{AB}} - \frac{1}{l_{CD}} \right) \frac{l_{EC}}{l_{BC}} \quad (24)$$

要使 E 点的曲率为零, 此时

$$l_{EC} = \frac{l_{AB}}{l_{AB} - l_{CD}} l_{BC} \quad (25)$$

当 $l_{AB} > l_{CD}$ 时, E 点在 C 指向 B 的延长线上, 当 $l_{AB} < l_{CD}$ 时, E 点在 B 指向 C 点方向的延长线上, E 点可以通过图 6a 所示的方法图解作出, 首先过 A 点作 BC 的平行线交 CD 于 F 点, 过 D 点作 BC 的平行线交 AB 延长线于 G 点, 连接 G 、 F 两点交 BC

延长线的交点便是曲率为0的E点。

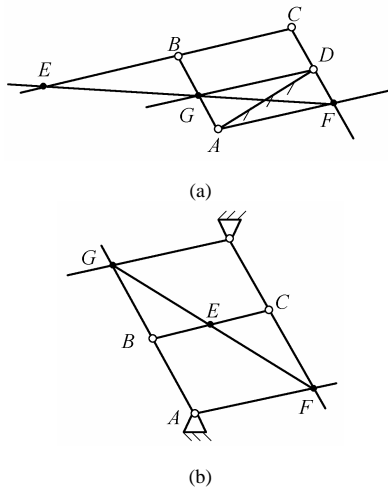


图6 瞬心无穷远时曲率为0的E点图解

对于图3所示的铰链四杆机构,分析式(23)可得,此时拐点圆退化为一封闭的复杂曲线。特别值得注意当 $\theta=180^\circ$ 时

$$\kappa_E = \frac{1}{l_{CD}} - \left(\frac{1}{l_{AB}} + \frac{1}{l_{CD}} \right) \frac{l_{EC}}{l_{BC}} \quad (26)$$

E点的曲率为0,此时

$$l_{EC} = \frac{l_{AB}}{l_{AB} + l_{CD}} l_{BC} \quad (27)$$

从式(27)可以看出:E点只能在B、C两点之间,其图解方法如图6b所示。

图6所示的机构的E点瞬时的轨迹近似地接近直线,并且与直线至少达到二阶密切,它可以作为近似直线四杆机构。

4 结论

(1) 本文通过直观分析提出铰链四杆机构连杆曲率叠加的解析数学式,借助运动学分析和推导了四杆机构连杆瞬心无穷远时连杆上任意点的曲率数学公式;得到拐点曲线的解析关系;证明了曲率叠加公式的正确性;将结果应用在机构综合中,获得近似直线导引铰链四杆机构的图解法。

(2) 在理论上,图解法是对欧拉-沙伐里理论的有益补充和完善;在实践上,它为特殊情况下的二阶近似直线机构综合作了一些探索,至于期望获得更高阶的近似直线机构此方法还需要加以完善。

参 考 文 献

- [1] 楼鸿棣, 邹慧君. 高等进行原理[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990.
- [2] DIJKSMAN E A. Approximate straight-line mechanisms

through four-bar linkages[J]. Romanian J. of Technical Science, Applied Mechanics, 1972, 7(2): 319-372.

- [3] HAN J Y. Ein beitrage zur rechnerunterstuetzten massynthese ebener gelenkgetriebe fuer angenacherts geradfuehrungen durch vierbzw. fuefnf unendlich benachbarte punkts[D]. Hamburg: Dissertatin University fer Bundeswehr, 1993.
- [4] 沈惠平, 邹旻, 胡爱萍. 拐点圆在近似直线机构综合上的应用研究[J]. 机械科学与技术, 2000, 19(4): 554-555.
- [5] 彭伟斌. 瞬心无穷远时综合四杆直线机构的研究[J]. 机械科学与技术, 2000, 19(3): 409-410.
- [6] HOMER D, ECKHARDT. Kinematics design of machines and mechanisms[M]. Beijing: China Machine Press, 2002.

SYNTHESIS OF FOUR-BAR APPROXIMATE STRAIGHT-LINE LINKAGE WITH INFINITELY FAR INSTANT CENTER

WANG Zhong ZHU Hongjun

LIAO Lei YANG Yumin

(School of Manufacturing Science and Engineering, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621010)

Abstract: The coupler curve which is near the zero-curvature point on the inflection circle is close to the straight line, the mechanism is often as the approximate straight-line guidance mechanism. When the instant center of linkage is infinitely far, there is no inflection circle in the linkage of four-bar linkage mechanism. It is difficult to synthesize approximate straight-line mechanism by the old methods. According to the intuitionistic analysis, a logical superposed formula for curvature of every spot locus on the linkage of four-bar linkages is presented, when the instant center of linkage is infinitely far. Afterward the formula is deduced by relativistic kinematics. The superposed formula is correct, and a diagrammatizing method getting zero-curvature spot on the linkage is gained by this formula, then the formula is successfully applied to synthesize the four-bar approximate straight-line linkages with infinitely far instant center. The method has such advantages: simplicity, visualization and practicality, which strongly supplements the theory of the inflexion circle.

Key words: Approximate straight-line

Four-bar linkage mechanism Synthesis

作者简介: 王忠, 男, 1963年出生, 博士, 教授。主要研究方向为机构综合及机械设计。

E-mail: zhongw63@mail.china.com