

DOI: 10.3901/JME.2009.04.050

对称 4 自由度 3R1T 并联机构雅可比分析*

李秦川 胡旭东 陈巧红 武传宇

(浙江理工大学浙江省现代纺织装备技术重点实验室 杭州 310018)

摘要: 针对对称 4 自由度 3R1T 并联机构提出一种雅可比分析方法。首先运用位移群理论分析 3R1T 并联机构的自由度特性, 得到动平台在空间的运动为四维位移流形, 然后运用螺旋理论建立单个分支运动链的雅可比矩阵, 该矩阵为 6×5 长方形; 再利用该类并联机构的自由度特性证明 6×5 的分支雅可比矩阵的第四行和第五行为冗余元素, 删除其中之一则可把分支雅可比矩阵简化为 5×5 方阵, 该方阵在机构非奇异位形下满秩。在选定并联机构的驱动副后, 对每个分支简化后的 5×5 雅可比方阵求逆, 再分别取出逆阵中对应于驱动副的行矢量构成一个 4×5 长方形, 由于该长方形的第四列元素始终与 0 相乘为冗余信息, 删除该列元素后得到一个 4×4 可逆方阵, 对之求逆即得整个 4 自由度 3R1T 并联机构的雅可比矩阵。该方法简捷易行, 可进一步应用于 3R1T 并联机构的性能分析和运动学设计。

关键词: 并联机构 位移群理论 螺旋理论 雅可比矩阵

中图分类号: TH112

Jacobian Analysis of Symmetrical 4-DOF 3R1T Parallel Mechanisms

LI Qinchuan HU Xudong CHEN Qiaohong WU Chuanyu

(Provincial Key Laboratory of Modern Textile Machinery, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018)

Abstract: A method for Jacobian analysis of 4-DOF 3R1T parallel mechanism is proposed. The mobility analysis of 3R1T parallel mechanisms is performed by using displacement group theory. The motion of the moving platform of a 3R1T parallel mechanism is a four dimensional displacement manifold. Then, the Jacobian matrix of single limb kinematic chain is based on the basis of screw theory, which is a 6×5 non-square matrix. On the basis of the mobility property, it can be proven that the fourth and the fifth rows of the limb Jacobian matrix are redundant. Deleting the fourth row or the fifth row of the limb Jacobian matrix leads to a 5×5 matrix, which is of full rank in non-singular configurations. After the actuation of the 3R1T parallel mechanism is determined, the inverse of the 5×5 matrix of each limb can be obtained. A 4×5 non-square matrix can be obtained by combining the four row vectors corresponding to the actuated pairs taken from the four inverses. The elements of the fourth column of the 4×5 non-square matrix are always multiplied by 0 and thus are redundant. Deleting the fourth column of the 4×5 non-square matrix yields a 4×4 invertible matrix, the inverse of which is the Jacobian matrix of the 4-DOF 3R1T parallel mechanism. This method is straightforward and can be further applied in performance analysis and kinematic design of the 3R1T parallel mechanism.

Key words: Parallel mechanism Displacement group theory Screw theory Jacobian matrix

0 前言

近年来, 自由度数少于 6 的少自由度并联机器人受到国际并联机器人学界和工业界的广泛关注。对于实际应用中大量要求自由度数少于 6 的操作任务, 和传统的 6 自由度并联机器人相比, 使用少自由度并联机构在系统设计、制造和控制等方面可望

有效降低成本。例如, 用作并联机床时, 6 自由度并联机构中存在一个多余的自由度, 增加了系统各方面的复杂性和成本, 采用经过优化的 5 自由度并联机构可以替代 6 自由度并联机床。一般来说, 在合适的应用场合使用经过合理优化的少自由度并联机构, 可以减少制造装配、驱动控制、检测和维护等方面的成本。

根据少自由度并联机构自由度的数目和性质可以将其分类以简化表达, 其中对称 4 自由度并联机构分为 3 大类: 3R1T、1R3T 和 2R2T (R 表示转动自由度, T 表示移动自由度)。

* 国家自然科学基金资助项目(50605055)。20080516 收到初稿, 20081104 收到修改稿

目前对于对称4自由度3R1T并联机构的运动学、动力学等相关研究较少。主要是因为自1983年HUNT^[1]提出并联机构的构型综合后, 国外学者如HUNT^[1]、MERLET^[2]一直认为对称的4、5自由度并联机构不存在, 直至2001年ZLATANOV等^[3]才综合出对称4自由度3R1T并联机构。

速度雅可比矩阵(以下简称雅可比矩阵)是机构一阶运动学分析的核心。对并联机构, 雅可比矩阵将驱动器的关节速度映射为动平台的角速度和线速度, 多数机构分析与设计性能评价指标都源于雅可比矩阵, 如奇异位形、条件数、解耦性、各向同性等, 因此速度雅可比矩阵是并联机构运动学分析及尺度综合的重要工具。

建立雅可比矩阵的重要方法之一是对位置逆解方程求导获得输入速度与输出速度的关系。如KONG等^[4]在2002年运用此法建立了一类3自由度移动并联机构的雅可比矩阵。但MERLET^[5]在2006年指出, 用这种方法建立的雅可比矩阵在分析位置误差时不能提供足够的信息。

另一种方法基于螺旋理论。MOHAMED等^[6]用正交螺旋分析了一般并联机构的雅可比矩阵; KIM等^[7]在1999年提出了基于对偶螺旋的并联机构解析雅可比矩阵建立方法; JOSHI等^[8]在2002年以螺旋理论建立少自由度并联机构约束雅可比和驱动雅可比矩阵, 进而可分析并联机构的奇异位形。

运用以上两种方法建立对称少自由度并联机构的雅可比矩阵时, 都需要消除输出速度与输入速度之间映射中的冗余信息。前者通常采用线性消元法, 但物理意义不清楚; 后者则运用螺旋理论的互易积定理, 运算复杂繁琐。

本文针对对称4自由度3R1T并联机构, 运用群论分析自由度, 利用自由度的特性分别删除分支雅可比矩阵中的冗余信息, 将其从6×5的长方阵转为4×4满秩方阵, 大大简化了后续分析, 从而可以方便地建立这类机构的雅可比矩阵, 为进一步的奇异分析和性能评价奠定基础。

1 对称4自由度3R1T并联机构

不失一般性, 本文以4自由度3R1T^c并联机构为例, 此处上标z表示在z坐标轴方向的移动自由度。

4自由度3R1T^c并联机构的结构特点为: 分支运动链具有5自由度, 其中必含有2R或3R球面子链(即连续的两个或三个转动副轴线共点, 该点称为分支中心点), 移动副P不能平行于定平台, 在2R

或3R球面子链之外的转动副轴线必平行于定平台, 所有分支中心点重合, 机构中不含球铰, 所有2R或3R球面子链都必须同时连接于定平台或动平台。从该类机构的结构特点和约束特点可知, 动平台绕机构转动中心N转动, 而机构转动中心N只能沿z轴移动。

如图1所示4-^xR^xR^xR(^vR^wR)_N机构是4自由度3R1T^c并联机构的一个典型例子, 这里上标x表示转动副轴线平行于Oxy平面, 上标v和w表示两个相邻转动副轴线, 这里2R球面子链记为(^vR^wR)_N, 下标N表示三个转动副的轴线交于同一点分支中心点N, 该点同时也是机构的转动中心, 即三个分支中的2R球面子链的中心点重合。为便于分析, 选择点N为固定坐标系Oxyz和固结于动平台上的运动坐标系O_mx_my_mz_m的原点, 初始位形下两个坐标系重合。

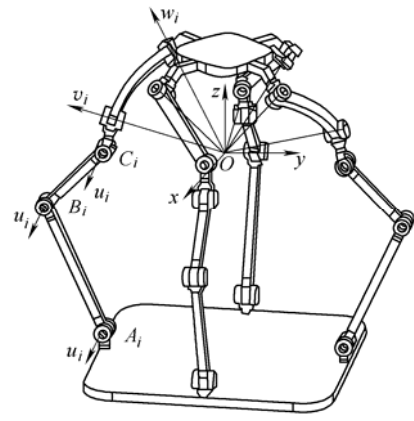


图1 4-^xR^xR^xR(^vR^wR)_N并联机构简图

2 3R1T 并联机构自由度分析

刚体在空间所有运动的集合D具有群的代数结构, 构成一个李群, 又称为位移群。刚体在空间的大多数运动可以用D的子群表示, 又称为位移子群。1978年, HERVÉ^[9]给出了全部12种位移子群, 如下表所示, 以及位移子群求交集, 求乘法运算的运算结果, 并指出位移子群求交集的运算满足一般集合论中求交的运算法则。由下表显见, 这12种位移子群并不能完全解释刚体在空间的全部运动, 在很多情况下, 刚体的运动仅是D中的位移流形。

对于并联机构而言, 动平台的刚体运动集合是所有分支运动链末端能实现的刚体运动集合交集, 即

$$M = \bigcap_{i=1}^n L_i \tag{1}$$

式中, M表示动平台的刚体运动集合, L_i表示分支运动链末端的刚体运动集合, M和L_i可以是位移子

群,也可以是位移流形。对于一般位移流形的求交,总可以归结为相邻位移子群的求交集运算^[10]。

表 12 种位移子群列举

位移子群	维数 n	对应运动副	说明
E	0		刚性连接,无相对运动
$R(N, \mathbf{u})$	1	转动副 R	表示转动轴线沿单位矢量 \mathbf{u} 且过点 N 的转动
$T(\mathbf{v})$	1	移动副 P	表示沿单位矢量 \mathbf{v} 的移动
$H(N, \mathbf{u}, p)$	1	螺旋副 H	表示沿轴线(N, \mathbf{u}), 螺旋距为 p 的螺旋运动
$T(\mathbf{P}_{vw})$	2		表示在单位矢量 \mathbf{v} 和 \mathbf{w} 决定的平面 \mathbf{P}_{vw} 中的移动
$C(N, \mathbf{v})$	2	圆柱副 C	表示沿轴线(N, \mathbf{v})的圆柱运动
T	3		表示空间三维移动
$G(\mathbf{u})$	3	平面副 G	表示法线为 \mathbf{u} 的平面运动
$S(N)$	3	球面副 S	表示转动中心为点 N 的球面运动
$Y(\mathbf{w}, p)$	3		表示法线为 \mathbf{w} 的平面二维移动和沿任何平行于 \mathbf{w} 的轴线, 螺旋距为 p 的螺旋运动
$X(\mathbf{w})$	4		表示空间的三维移动和绕任意平行于 \mathbf{w} 的轴线的转动
D	6		表示空间的一般刚体运动, 包括 3 个移动和 3 个转动

3R1T 并联机构动平台的运动集合可以用表 1 中的位移子群表示为 $M=T(\mathbf{u})S(N)$, 是一个四维的位移流形, 并不具有群的代数结构。

对图 1 所示 3R1T 并联机构, 其分支运动链末端能实现的刚体运动是一个五维位移流形, 即

$$L_i = R(A_i, \mathbf{u}_i)R(B_i, \mathbf{u}_i)R(C_i, \mathbf{u}_i)R(N, \mathbf{v}_i)R(N, \mathbf{w}_i) = G(\mathbf{u}_i)R(N, \mathbf{v}_i)R(N, \mathbf{w}_i) \quad i=1,2,3,4 \quad (2)$$

因为 $R(N, \mathbf{u}_i) \subset G(\mathbf{u}_i)$, 利用位移子群乘法运算的封闭性可得

$$G(\mathbf{u}_i) = G(\mathbf{u}_i)R(N, \mathbf{u}_i) \quad (3)$$

式(3)代入式(2)可得

$$L_i = G(\mathbf{u}_i)R(N, \mathbf{u}_i)R(N, \mathbf{v}_i)R(N, \mathbf{w}_i) = G(\mathbf{u}_i)S(N) \quad (4)$$

注意到 3R1T 并联机构的结构条件保证了各分支中 2R 或 3R 球面子链之外的转动副轴线均平行于定平台, 即 $\mathbf{u}_i // \mathbf{P}_{xy}$, \mathbf{P}_{xy} 表示 Oxy 平面, 因此有

$$T(\mathbf{z}) = G(\mathbf{u}_i) \cap G(\mathbf{u}_j) \quad \mathbf{u}_i \neq \mathbf{u}_j \quad \mathbf{u}_i // \mathbf{P}_{xy} \quad \mathbf{u}_j // \mathbf{P}_{xy} \quad (5)$$

则机构动平台的位移流形为

$$M = \bigcap_{i=1}^n G(\mathbf{u}_i)S(N) = (G(\mathbf{u}_1) \cap G(\mathbf{u}_2) \cap G(\mathbf{u}_3) \cap G(\mathbf{u}_4))S(N) = T(\mathbf{z})S(N) \quad (6)$$

式(6)说明该机构动平台具有一个沿 z 轴的移动自由度和 3 个绕 N 点的转动自由度。

3 3R1T 并联机构雅可比分析

3.1 分支雅可比分析

由于动平台失去 Oxy 平面内的移动自由度, 动平台沿 x 和 y 轴的位移为 0, 且动平台上和机构转动中心 N 重合的一点, 即动坐标系原点, 沿 x 和 y 轴的移动速度为 0。因此, 动坐标系原点的速度为

$$\mathbf{v} = (\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z \quad 0 \quad 0 \quad v_z)^T \quad (7)$$

记第 i 个分支运动链的雅可比矩阵为 \mathbf{J}_i , \mathbf{J}_i 为 6×5 长方阵。记 \mathbf{J}_i 的第 n 列为 $\mathbf{J}_{:,n}^i$ ($n=1, \dots, 5$), 记 \mathbf{J}_i 的第 m 行为 $\mathbf{J}_{m,:}^i$ ($m=1, \dots, 6$)。则有

$$\mathbf{J}_i = (\mathbf{J}_{:,1}^i \quad \mathbf{J}_{:,2}^i \quad \mathbf{J}_{:,3}^i \quad \mathbf{J}_{:,4}^i \quad \mathbf{J}_{:,5}^i) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{1,:}^{i,T} & \mathbf{J}_{2,:}^{i,T} & \mathbf{J}_{3,:}^{i,T} & \mathbf{J}_{4,:}^{i,T} & \mathbf{J}_{5,:}^{i,T} & \mathbf{J}_{6,:}^{i,T} \end{pmatrix}^T \quad (8)$$

式中 $\mathbf{J}_{:,1}^i = (J_{11}^i \quad J_{21}^i \quad J_{31}^i \quad J_{41}^i \quad J_{51}^i \quad J_{61}^i)^T$

$$\mathbf{J}_{:,2}^i = (J_{12}^i \quad J_{22}^i \quad J_{32}^i \quad J_{42}^i \quad J_{52}^i \quad J_{62}^i)^T$$

$$\mathbf{J}_{:,3}^i = (J_{13}^i \quad J_{23}^i \quad J_{33}^i \quad J_{43}^i \quad J_{53}^i \quad J_{63}^i)^T$$

$$\mathbf{J}_{:,4}^i = (J_{14}^i \quad J_{24}^i \quad J_{34}^i \quad J_{44}^i \quad J_{54}^i \quad J_{64}^i)^T$$

$$\mathbf{J}_{:,5}^i = (J_{15}^i \quad J_{25}^i \quad J_{35}^i \quad J_{45}^i \quad J_{55}^i \quad J_{65}^i)^T$$

雅可比矩阵 \mathbf{J}_i 将第 i 个分支的关节速度映射为动平台的速度, 即

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}_i \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (9)$$

式中, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_i = (\dot{\theta}_{i1} \quad \dot{\theta}_{i2} \quad \dot{\theta}_{i3} \quad \dot{\theta}_{i4} \quad \dot{\theta}_{i5})^T$ 是第 i 个分支的关节速度矢量。

将式(8)代入式(9)可得

$$\mathbf{v} = \dot{\theta}_{i1} \mathbf{J}_{:,1}^i + \dot{\theta}_{i2} \mathbf{J}_{:,2}^i + \dot{\theta}_{i3} \mathbf{J}_{:,3}^i + \dot{\theta}_{i4} \mathbf{J}_{:,4}^i + \dot{\theta}_{i5} \mathbf{J}_{:,5}^i = (\mathbf{J}_{1,:}^i \dot{\theta}_i \quad \mathbf{J}_{2,:}^i \dot{\theta}_i \quad \mathbf{J}_{3,:}^i \dot{\theta}_i \quad \mathbf{J}_{4,:}^i \dot{\theta}_i \quad \mathbf{J}_{5,:}^i \dot{\theta}_i \quad \mathbf{J}_{6,:}^i \dot{\theta}_i)^T \quad (10)$$

对串联机械手而言, 其雅可比的几何意义为: 雅可比矩阵的列矢量是串联机械手各对应关节在当前位形下的运动螺旋。因此, $\mathbf{J}_{:,1}^i$ 、 $\mathbf{J}_{:,2}^i$ 、 $\mathbf{J}_{:,3}^i$ 、 $\mathbf{J}_{:,4}^i$ 和 $\mathbf{J}_{:,5}^i$ 是第 i 个分支运动链中各关节在当前位形下的运动螺旋。在非奇异位形下, 这 5 个运动螺旋应该线性无关, 即有式(11)成立

$$\begin{aligned} & \dot{\theta}_{i1} \mathbf{J}_{:,1}^i + \dot{\theta}_{i2} \mathbf{J}_{:,2}^i + \dot{\theta}_{i3} \mathbf{J}_{:,3}^i + \dot{\theta}_{i4} \mathbf{J}_{:,4}^i + \dot{\theta}_{i5} \mathbf{J}_{:,5}^i = \\ & \left(\sum_{j=1}^5 \dot{\theta}_{ij} \mathbf{J}_{1j}^i \quad \sum_{j=1}^5 \dot{\theta}_{ij} \mathbf{J}_{2j}^i \quad \sum_{j=1}^5 \dot{\theta}_{ij} \mathbf{J}_{3j}^i \quad \sum_{j=1}^5 \dot{\theta}_{ij} \mathbf{J}_{4j}^i \quad \sum_{j=1}^5 \dot{\theta}_{ij} \mathbf{J}_{5j}^i \quad \sum_{j=1}^5 \dot{\theta}_{ij} \mathbf{J}_{6j}^i \right)^T = \\ & (\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z \quad 0 \quad 0 \quad v_z)^T = \\ & (p_{i1} \quad p_{i2} \quad p_{i3} \quad p_{i4} \quad p_{i5} \quad p_{i6})^T \neq (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)中至少有 1 个 $\dot{\theta}_{ij}$ ($j=1, \dots, 5$) 不为零。

显然, 第 i 个分支运动链中 5 个关节运动螺旋 $J_{:,n}^i$ ($n=1, \dots, 5$) 线性无关充要条件为至少有 1 个 p_{ik} ($k=1, \dots, 6$) 不为零。

由式(7)、(10)、(11)易知

$$\begin{aligned} v_x &= p_{i4} = J_{4,:}^i \dot{\theta}_i = 0 \\ v_y &= p_{i5} = J_{5,:}^i \dot{\theta}_i = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

由于 5 个关节运动螺旋 $J_{:,n}^i$ ($n=1, \dots, 5$) 线性无关, 动坐标系原点的速度 \mathbf{v} 中除 0 之外的 4 个分量中至少有 1 个不为 0, 即 p_{ij} ($j=1, 2, 3, 6$) 中至少有 1 个不为 0。因此, 分别删除 5 个关节运动螺旋 $J_{:,n}^i$ ($n=1, \dots, 5$) 中的第 4 个元素 J_{4j}^i ($j=1, \dots, 5$) 后得到 5 个新的列矢量 $J_{:,n-4}^i = (J_{1n}^i \ J_{2n}^i \ J_{3n}^i \ J_{5n}^i \ J_{6n}^i)^T$ ($n=1, \dots, 5$)。由于 p_{ij} ($j=1, 2, 3, 6$) 中至少有 1 个不为 0, 由式(5)可知, 这 5 个新的列矢量线性无关, 所构成的 5×5 矩阵记为 $\bar{J}_{i-4} = (J_{:,1-4}^i \ J_{:,2-4}^i \ J_{:,3-4}^i \ J_{:,4-4}^i \ J_{:,5-4}^i)$ 同样, 也可分别删除 5 个关节运动螺旋 $J_{:,n}^i$ ($n=1, \dots, 5$) 中的第 5 个元素 J_{5j}^i ($j=1, \dots, 5$) 后得到 5 个新的列矢量 $J_{:,n-5}^i = (J_{1n}^i \ J_{2n}^i \ J_{3n}^i \ J_{4n}^i \ J_{6n}^i)^T$ ($n=1, \dots, 5$)。由于 p_{ij} ($j=1, 2, 3, 6$) 中至少有 1 个不为 0, 由式(5)可知, 这 5 个新列矢量线性无关, 所构成的 5×5 矩阵记为

$$\bar{J}_{i-5} = (J_{:,1-5}^i \ J_{:,2-5}^i \ J_{:,3-5}^i \ J_{:,4-5}^i \ J_{:,5-5}^i)$$

在机构的非奇异位形, \bar{J}_{i-4} 或 \bar{J}_{i-5} 的秩总为 5。

则去掉 \mathbf{v} 中对应的零元素后, 可得第 i 个分支的新的速度映射关系为

$$\bar{\mathbf{v}} = (\omega_x \ \omega_y \ \omega_z \ 0 \ v_z)^T = \bar{J}_{i-4} \dot{\theta}_i = \bar{J}_{i-5} \dot{\theta}_i \quad (13)$$

在式(13)等号两端乘以 \bar{J}_{i-4} 的逆矩阵(记为 \mathbf{G}_{i-4})或 \bar{J}_{i-5} 的逆阵(记为 \mathbf{G}_{i-5})得

$$\dot{\theta}_i = \bar{J}_{i-4}^{-1} \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{G}_{i-4} \bar{\mathbf{v}} = \bar{J}_{i-5}^{-1} \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{G}_{i-5} \bar{\mathbf{v}} \quad (14)$$

展开式(14)可得

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{i1} \\ \dot{\theta}_{i2} \\ \dot{\theta}_{i3} \\ \dot{\theta}_{i4} \\ \dot{\theta}_{i5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{1-4,:}^i \\ \mathbf{G}_{2-4,:}^i \\ \mathbf{G}_{3-4,:}^i \\ \mathbf{G}_{4-4,:}^i \\ \mathbf{G}_{5-4,:}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{1-4,:}^i \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{G}_{2-4,:}^i \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{G}_{3-4,:}^i \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{G}_{4-4,:}^i \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{G}_{5-4,:}^i \bar{\mathbf{v}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{1-5,:}^i \\ \mathbf{G}_{2-5,:}^i \\ \mathbf{G}_{3-5,:}^i \\ \mathbf{G}_{4-5,:}^i \\ \mathbf{G}_{5-5,:}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{1-5,:}^i \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{G}_{2-5,:}^i \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{G}_{3-5,:}^i \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{G}_{4-5,:}^i \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{G}_{5-5,:}^i \bar{\mathbf{v}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

为叙述方便, 下文中将 \mathbf{G}_{i-4} 及 \mathbf{G}_{i-5} 统一记为 \mathbf{G}_i 。

3.2 机构雅可比分析

在选取并联机器人驱动副的时候, 通常希望每个分支含一个驱动副, 且该驱动副尽量位于定平台上以减少运动部分的重量。4 自由度 3R1T^z 并联机构包含 4 个分支运动链, 即 $i=4$, 本例中取各分支中移动副为主动副, 即驱动关节速度列矢量 $\dot{\theta}^a$ 为 $\dot{\theta}^a = (\dot{\theta}_{12}^a \ \dot{\theta}_{22}^a \ \dot{\theta}_{32}^a \ \dot{\theta}_{42}^a)^T$, 这样从每个 \mathbf{G}_i ($i=1, 2, 3, 4$) 中取出 $\dot{\theta}_{i2}^a$ 对应的第二行 $\mathbf{G}_{2,:}^i$ 依次排列, 构成一个新的 4×5 矩阵 $\bar{\mathbf{G}}$, 即

$$\bar{\mathbf{G}} = (\mathbf{G}_{2,:}^{1T} \ \mathbf{G}_{2,:}^{2T} \ \mathbf{G}_{2,:}^{3T} \ \mathbf{G}_{2,:}^{4T})^T = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{21}^1 & \mathbf{G}_{22}^1 & \mathbf{G}_{23}^1 & \mathbf{G}_{24}^1 & \mathbf{G}_{25}^1 \\ \mathbf{G}_{21}^2 & \mathbf{G}_{22}^2 & \mathbf{G}_{23}^2 & \mathbf{G}_{24}^2 & \mathbf{G}_{25}^2 \\ \mathbf{G}_{21}^3 & \mathbf{G}_{22}^3 & \mathbf{G}_{23}^3 & \mathbf{G}_{24}^3 & \mathbf{G}_{25}^3 \\ \mathbf{G}_{21}^4 & \mathbf{G}_{22}^4 & \mathbf{G}_{23}^4 & \mathbf{G}_{24}^4 & \mathbf{G}_{25}^4 \end{pmatrix} \quad (16)$$

由式(14)、(15)可知有式(17)成立

$$\dot{\theta}^a = (\dot{\theta}_{12}^a \ \dot{\theta}_{22}^a \ \dot{\theta}_{32}^a \ \dot{\theta}_{42}^a)^T = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{21}^1 & \mathbf{G}_{22}^1 & \mathbf{G}_{23}^1 & \mathbf{G}_{24}^1 & \mathbf{G}_{25}^1 \\ \mathbf{G}_{21}^2 & \mathbf{G}_{22}^2 & \mathbf{G}_{23}^2 & \mathbf{G}_{24}^2 & \mathbf{G}_{25}^2 \\ \mathbf{G}_{21}^3 & \mathbf{G}_{22}^3 & \mathbf{G}_{23}^3 & \mathbf{G}_{24}^3 & \mathbf{G}_{25}^3 \\ \mathbf{G}_{21}^4 & \mathbf{G}_{22}^4 & \mathbf{G}_{23}^4 & \mathbf{G}_{24}^4 & \mathbf{G}_{25}^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix} \quad (17)$$

注意到

$$\dot{\theta}_{i2}^a = \mathbf{G}_{21}^i \omega_x + \mathbf{G}_{22}^i \omega_y + \mathbf{G}_{23}^i \omega_z + \mathbf{G}_{24}^i \cdot 0 + \mathbf{G}_{25}^i v_z \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (18)$$

由于式(18)中 \mathbf{G}_{24}^i ($i=1, 2, 3, 4$) 始终和 0 相乘, 因此 $\bar{\mathbf{G}}$ 中第 4 列为冗余信息, 可以删除。删除 $\bar{\mathbf{G}}$ 中第 4 列元素后得到的 4×4 矩阵记为 $\bar{\mathbf{G}}_n$, 同时删除 $\bar{\mathbf{v}}$ 中对应的第 4 个零元素后得到的矢量记为 $\bar{\mathbf{v}}_n$, 则由式(17)可得

$$\dot{\theta}^a = \bar{\mathbf{G}}_n \bar{\mathbf{v}}_n \quad (19)$$

注意到矩阵 $\bar{\mathbf{G}}_n$ 由机构的位形参数决定, 当主动副选取正确且机构处于非奇异位形时, $\bar{\mathbf{G}}_n$ 始终是非奇异的。当 4 个主动副锁住, 即 $\dot{\theta}_i^a = \mathbf{0}$ 时, 此时动平台不能运动, 即 $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$, 由线性方程 $\bar{\mathbf{G}}_n \bar{\mathbf{v}}_n = \mathbf{0}$ 有唯一零解可知 $\bar{\mathbf{G}}_n$ 是非奇异的。

在式(20)等号两端乘以 $\bar{\mathbf{G}}_n$ 的逆阵可得

$$\bar{\mathbf{v}}_n = \bar{\mathbf{G}}_n^{-1} \dot{\theta}^a \quad (20)$$

显然 $\bar{\mathbf{G}}_n^{-1}$ 是 4 自由度 3R1T^z 并联机构的雅可比矩阵, 把驱动关节角速度映射到动平台的速度。

4 $4\text{-}^x\text{R}^x\text{R}^x\text{R}(\text{R}^w\text{R})_N$ 机构雅可比分析

图 2 所示为处于初始装配位形的 $4\text{-}^x\text{R}^x\text{R}^x\text{R}(\text{R}^w\text{R})_N$ 并联机构, 选取分支中的移动副作为驱动副, 即

$$\dot{\theta}^a = (\dot{\theta}_{12}^a \quad \dot{\theta}_{22}^a \quad \dot{\theta}_{32}^a \quad \dot{\theta}_{42}^a)^T$$

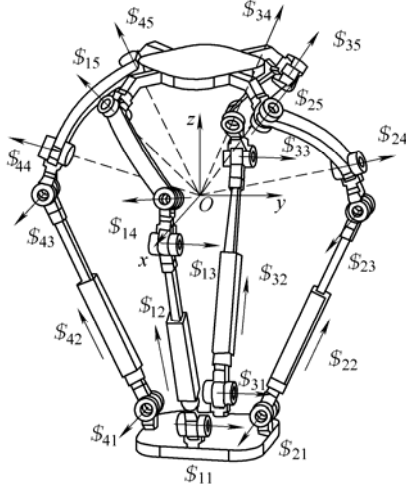


图 2 处于初始装配位形的 $4\text{-}^x\text{R}^x\text{P}^x\text{R}(\text{R}^w\text{R})_N$ 并联机构简图

在一般非奇异位形下, 可写出各分支运动螺旋 \mathcal{S}_{ij} 的符号表达式, 并构造出相应雅可比矩阵如下

$$J_1 = (\mathcal{S}_{11} \quad \mathcal{S}_{12} \quad \mathcal{S}_{13} \quad \mathcal{S}_{14} \quad \mathcal{S}_{15}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & l_{14} & l_{15} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & m_{15} \\ 0 & 0 & 0 & n_{14} & n_{15} \\ a_{11} & l_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & n_{12} & c_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = (\mathcal{S}_{21} \quad \mathcal{S}_{22} \quad \mathcal{S}_{23} \quad \mathcal{S}_{24} \quad \mathcal{S}_{25}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & l_{25} \\ 0 & 0 & 0 & m_{24} & m_{25} \\ 0 & 0 & 0 & n_{24} & n_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & m_{22} & b_{23} & 0 & 0 \\ c_{21} & n_{22} & c_{23} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = (\mathcal{S}_{31} \quad \mathcal{S}_{32} \quad \mathcal{S}_{33} \quad \mathcal{S}_{34} \quad \mathcal{S}_{35}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & l_{34} & l_{35} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & m_{35} \\ 0 & 0 & 0 & n_{34} & n_{35} \\ a_{31} & l_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & n_{32} & c_{33} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_4 = (\mathcal{S}_{41} \quad \mathcal{S}_{42} \quad \mathcal{S}_{43} \quad \mathcal{S}_{44} \quad \mathcal{S}_{45}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & l_{45} \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} & m_{45} \\ 0 & 0 & 0 & n_{44} & n_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{41} & m_{42} & b_{43} & 0 & 0 \\ c_{41} & n_{42} & c_{43} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

删除 J_1 和 J_3 中第 5 行、 J_2 和 J_4 中的第 4 行可得 \bar{J}_1 、 \bar{J}_2 、 \bar{J}_3 、 \bar{J}_4 , 对其分别求逆可得 G_1 、 G_2 、 G_3 和 G_4 。

从 G_1 、 G_2 、 G_3 和 G_4 中分别取出第 2 行构造出维数为 4×5 的矩阵 \bar{G} , 即

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} G_{2,:}^1 \\ G_{2,:}^2 \\ G_{2,:}^3 \\ G_{2,:}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} & \bar{G}_{13} & \bar{G}_{14} & \bar{G}_{15} \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} & \bar{G}_{23} & \bar{G}_{24} & \bar{G}_{25} \\ \bar{G}_{31} & \bar{G}_{32} & \bar{G}_{33} & \bar{G}_{34} & \bar{G}_{35} \\ \bar{G}_{41} & \bar{G}_{42} & \bar{G}_{43} & \bar{G}_{44} & \bar{G}_{45} \end{pmatrix}$$

由前面分析可知, \bar{G} 中第 4 列各元素始终与 0 相乘, 为冗余信息, 删除该列后

$$\bar{G}_n = \begin{pmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} & \bar{G}_{13} & \bar{G}_{15} \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} & \bar{G}_{23} & \bar{G}_{25} \\ \bar{G}_{31} & \bar{G}_{32} & \bar{G}_{33} & \bar{G}_{35} \\ \bar{G}_{41} & \bar{G}_{42} & \bar{G}_{43} & \bar{G}_{45} \end{pmatrix}$$

$$\bar{G}_{11} = m_{15}n_{14}(a_{13}c_{11} - a_{11}c_{13}) / (c_{11}l_{12}l_{15}n_{14} - c_{11}l_{12}n_{15}l_{14} - l_{12}l_{15}c_{13}n_{14} + l_{12}n_{15}c_{13}l_{14} - l_{15}n_{14}n_{12}a_{11} + n_{15}l_{14}n_{12}a_{11} - n_{15}l_{14}n_{12}a_{13} + l_{15}n_{14}n_{12}a_{13})$$

$$\bar{G}_{21} = (b_{21}c_{23} - b_{23}c_{21}) / (m_{22}c_{21} - m_{22}c_{23} + n_{22}b_{23} - n_{22}b_{21})$$

$$\bar{G}_{31} = m_{35}n_{34}(-a_{31}c_{33} + a_{33}c_{31}) / (-c_{31}l_{32}l_{34}n_{35} + c_{31}l_{32}n_{34}l_{35} - l_{32}n_{34}c_{33}l_{35} + l_{32}l_{34}c_{33}n_{35} - n_{34}l_{35}n_{32}a_{31} + l_{34}n_{35}n_{32}a_{31} - l_{34}n_{35}n_{32}a_{33} + n_{34}l_{35}n_{32}a_{33})$$

$$G_{41} = -(-b_{41}c_{43} + b_{43}c_{41}) / (m_{42}c_{41} - m_{42}c_{43} + n_{42}b_{43} - n_{42}b_{41})$$

$$G_{12} = -(a_{11}c_{13} - a_{13}c_{11}) / (l_{12}c_{11} - l_{12}c_{13} + n_{12}a_{13} - n_{12}a_{11})$$

$$G_{22} = l_{25}n_{24}(b_{23}c_{21} - b_{21}c_{23}) / (-c_{21}m_{22}m_{24}n_{25} + c_{21}m_{22}n_{24}m_{25} - m_{22}n_{24}c_{23}m_{25} + m_{22}m_{24}c_{23}n_{25} - n_{24}m_{25}n_{22}b_{21} + m_{24}n_{25}n_{22}b_{21} - m_{24}n_{25}n_{22}b_{23} + n_{24}m_{25}n_{22}b_{23})$$

$$G_{32} = -(a_{31}c_{33} - a_{33}c_{31}) / (l_{32}c_{31} - l_{32}c_{33} + n_{32}a_{33} - n_{32}a_{31})$$

$$G_{42} = l_{45}n_{44}(-b_{41}c_{43} + b_{43}c_{41}) / (-c_{41}m_{42}m_{44}n_{45} + c_{41}m_{42}n_{44}m_{45} - m_{42}n_{44}c_{43}m_{45} + m_{42}m_{44}c_{43}n_{45} - n_{44}m_{45}n_{42}b_{41} + m_{44}n_{45}n_{42}b_{41} - m_{44}n_{45}n_{42}b_{43} + n_{44}m_{45}n_{42}b_{43})$$

$$G_{13} = -l_{14}m_{15}(-a_{11}c_{13} + a_{13}c_{11})/(c_{11}l_{12}l_{15}n_{14} - c_{11}l_{12}n_{15}l_{14} - l_{12}l_{15}c_{13}n_{14} + l_{12}n_{15}c_{13}l_{14} - l_{15}n_{14}n_{12}a_{11} + n_{15}l_{14}n_{12}a_{11} - n_{15}l_{14}n_{12}a_{13} + l_{15}n_{14}n_{12}a_{13})$$

$$G_{23} = -m_{24}l_{25}(-b_{21}c_{23} + b_{23}c_{21})/(-c_{21}m_{22}m_{24}n_{25} + c_{21}m_{22}n_{24}m_{25} - m_{22}n_{24}c_{23}m_{25} + m_{22}m_{24}c_{23}n_{25} - n_{24}m_{25}n_{22}b_{21} + m_{24}n_{25}n_{22}b_{21} - m_{24}n_{25}n_{22}b_{23} + n_{24}m_{25}n_{22}b_{23})$$

$$G_{33} = -l_{34}m_{35}(-a_{31}c_{33} + a_{33}c_{31})/(-c_{31}l_{32}l_{34}n_{35} + c_{31}l_{32}n_{34}l_{35} - l_{32}n_{34}c_{33}l_{35} + l_{32}l_{34}c_{33}n_{35} - n_{34}l_{35}n_{32}a_{31} + l_{34}n_{35}n_{32}a_{31} - l_{34}n_{35}n_{32}a_{33} + n_{34}l_{35}n_{32}a_{33})$$

$$G_{43} = -m_{44}l_{45}(-b_{41}c_{43} + b_{43}c_{41})/(-c_{41}m_{42}m_{44}n_{45} + c_{41}m_{42}n_{44}m_{45} - m_{42}n_{44}c_{43}m_{45} + m_{42}m_{44}c_{43}n_{45} - n_{44}m_{45}n_{42}b_{41} + m_{44}n_{45}n_{42}b_{41} - m_{44}n_{45}n_{42}b_{43} + n_{44}m_{45}n_{42}b_{43})$$

$$G_{14} = -(a_{13} + a_{11})/(l_{12}c_{11} - l_{12}c_{13} + n_{12}a_{13} - n_{12}a_{11})$$

$$G_{24} = -(b_{23} + b_{21})/(m_{22}c_{21} - m_{22}c_{23} + n_{22}b_{23} - n_{22}b_{21})$$

$$G_{34} = -(a_{33} + a_{31})/(l_{32}c_{31} - l_{32}c_{33} + n_{32}a_{33} - n_{32}a_{31})$$

$$G_{44} = -(b_{43} + b_{41})/(m_{42}c_{41} - m_{42}c_{43} + n_{42}b_{43} - n_{42}b_{41})$$

则 \bar{G}_n^{-1} 即为该并联机构在该位形下的雅可比矩阵。

5 结论

(1) 利用 3R1T^c 并联机构的自由度特性, 可以去除分支雅可比矩阵中的冗余信息, 构造满秩的 5×5 分支雅可比矩阵, 进而建立整个机构的 4×4 雅可比矩阵。

(2) 该方法简单易行, 为该类并联机构进一步性能分析和运动学设计提供有力工具, 其思路也可适用于其他类型的少自由度并联机构。

参 考 文 献

- [1] HUNT K H. Structural kinematic of in-parallel-actuated robot arms[J]. Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, 1983, 105: 705-712.
- [2] MERLET J P. Parallel robots[M]. Netherland: Kluwer Academic Publishers, 2000.

- [3] ZLATANOV D, GOSSELIN C M. A new parallel architecture with four degrees of freedom[C]// The 2nd Workshop on Computational Kinematics, May 20-22, 2001, Seoul. 2001: 57-66.
- [4] KONG X W, GOSSELIN C M. A class of 3-dof translational parallel manipulators with linear input-output equations[C]// Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators, October 2-3, Québec, Canada. 2002: 25-32.
- [5] MERLET J P. Jacobian, manipulability, condition number and accuracy of parallel robots[J]. Journal of Mechanical Design, 2006, 128(1): 199-206.
- [6] MOHAMED M G, DUFFY J. A direct determination of the instantaneous kinematics of fully parallel robot manipulators[J]. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1986, 107: 226-229.
- [7] KIM D, CHUNG W K, YOUM Y. Analytic jacobian of in-parallel manipulators[C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation, April 24-28, 2000, San Francisco, USA. New York: IEEE, 2000: 2 376-2 381.
- [8] JOSHI S A, TSAI L W. Jacobian analysis of limited-dof parallel manipulators[J]. Journal of Mechanical Design, 2002, 124(2): 254-258.
- [9] HERVÉ J M. Analyse structurelle des mécanismes par groupe des déplacements[J]. Mechanism and Machine Theory, 1978, 13: 437-450.
HERVÉ J M. Structural analysis of mechanisms by displacement group[J]. Mechanism and Machine Theory, 1978, 13: 437-450.
- [10] LI Qinchuan, HUANG Zhen, HERVÉ J M. Type synthesis of 3r2t 5-dof parallel mechanisms using the lie group of displacements[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2004, 20(2): 173-180.

作者简介: 李秦川(通信作者), 男, 1975年出生, 博士, 副教授。主要从事并联机器人机构学理论和应用技术研究。发表论文 30 篇。

E-mail: lqchuan@zstu.edu.cn