

具有空间复合变形构件的机械系统分析方法*

丁希仑

(北京航空航天大学机器人研究所 北京 100083)

Selig John Mark

(伦敦南岸大学计算机与信息管理学院 英国伦敦 SE10AA)

戴建生

(伦敦大学国王学院机械工程系 英国伦敦 WC2R2LS)

摘要: 用李群李代数的理论方法探讨了具有空间变形构件的机械系统的分析问题。根据弹性力学的基本原理,建立了考虑弯曲、拉伸和扭转的空间变形杆件的弹性方程。将杆件作为基本元素,将其理论扩展应用于具有空间柔性变形杆件的串联机器人系统,分析了系统空间弹性性能与运动学问题。进而,研究了其在柔性并联机构振动平台分析中的应用。最后,应用该理论很好地解决了螺旋弹簧的空间弹性性能分析问题。将李群李代数理论成功地拓展应用于空间柔性机构系统的分析,验证了该方法的有效性。

关键词: 空间变形 李群李代数 柔性机构 机器人

中图分类号: TH112

0 前言

从晶体排列到刚体运动,李群李代数获得了成功的应用。在机器人中,刚体变换的群被定义为特殊的欧几里德群,表示为 $SE(3)$ 。它是绕着原点的旋转 $S^2(3)$ 和平移变换 R^3 的半直积, $SE(3) = S^2(3) \times R^3$ 。而李代数被看作是群在单位元素上的切矢量空间,在刚体运动分析中其元素对应于广义速度。它们最早的应用是在 19 世纪末, R. S. Ball^[1] 称其为 Twists(旋量,它是李代数的一个元素),而与其对偶空间的力旋量称为 Wrench。这在时间上是早先于大多数李群、李代数理论的研究。

1983 年 Brockett 最先将李群与李代数中的指数映射引入到机器人中来,建立了机器人的指数建模方法,通常称作指数积公式。后来,许多学者对李群与李代数理论在机器人和机构学领域的应用进行了广泛而深入的研究^[2,3],现在李群与李代数在刚体运动和机器人的研究方面取得相当大的成就,并已经相当完善。

但目前对于李群与李代数的绝大部分研究,局限于刚体系统的分析。众所周知,李群与李代数对刚体的空间运动分析非常有效,能否用其来解决一些工程中常见的具有弯曲、拉伸和扭转的复合变形构件的连续机构系统的分析问题,尚有待于研究和

探讨。

基于 R. Von Mises^[4] 的有关空间弹性杆件的描述,作者加以拓展和完善,建立了空间弹性构件的李群李代数分析方法,并进一步应用于分析复杂空间复合变形的连续柔性机构或机器人系统。

1 具有弯曲、拉伸和扭转的空间变形杆件的理论描述

1.1 变形旋量的定义

建立两个坐标系,梁的左端点为参考坐标系 $Oxyz$,沿中心轴线方向为 z 轴,梁上一点 z 的局部坐标系为 $Oxyz$,见图 1 所示。对于整个梁,如果受一个空间力(弯曲力 F_y, F_z 、拉伸力 F_x 、扭矩 M_x, M_y, M_z)的作用,它将产生位置和角度变形。假设沿着梁中心轴线的微小旋转变形,定义为矢量 J ,而其平移变形定义为矢量 d ,那么梁上的任意一点相对于其静止(未变形)时的位置和姿态的变化定义为变形旋量 $z = \begin{pmatrix} J \\ d \end{pmatrix}$ 。这可以看作是梁上一点

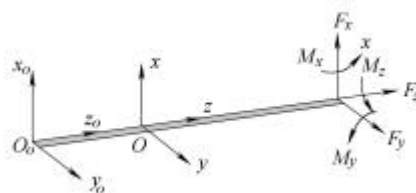


图 1 梁杆件在静止状态下的坐标描述

* 国家自然科学基金(50275002)和中英联合资助项目。20041228 收到初稿,20050425 收到修改稿

z 处的局部坐标系到其变形后位置的一个小的刚体运动, $z(z, t) \in se(3)$, 即李代数 $se(3)$ 中一元素。

所以在梁上一点 z 处其变形旋量的具体表达为

$$z(z) = \begin{bmatrix} J \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x(z) \\ J_y(z) \\ J_z(z) \\ d_x(z) \\ d_y(z) \\ d_z(z) \end{bmatrix} \quad (1)$$

1.2 空间复合变形梁杆件的柔度

根据材料力学的基本原理和贝努利梁的假设^{[5][10]}, 对于任意一微小的梁单元 dz , 有如下的关系式成立

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} d_z &= \frac{F_z}{EA} & \frac{d}{dz} J_z &= \frac{M_z}{GJ} \\ \frac{d}{dz} J_x &= \frac{M_x}{EI_x} & \frac{d}{dz} J_y &= \frac{M_y}{EI_y} \end{aligned} \quad (2)$$

式中 E —— 弹性模量

G —— 切变模量

A —— 横断面面积

I_x, I_y, J —— 断面惯性参数

将式(1)、(2)合在一起, 可以写成矢量的形式

$$z' = cW \quad (3)$$

式中 W —— 施加在杆件末端的空间力旋量

$$W = [M_x \ M_y \ M_z \ F_x \ F_y \ F_z]^T$$

c —— 柔性密度矩阵

$$c = \begin{bmatrix} \frac{1}{EI_x} & & & & & \\ & \frac{1}{EI_y} & & & & \\ & & \frac{1}{GJ} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \frac{1}{EA} \end{bmatrix}$$

将梁上一点 z 处微小单元的局部坐标转换到左端的参考坐标系, 并通过积分可以得到长度为 l 的整个梁的柔度矩阵

$$C(l) = \int_0^l H c H^T dz \quad (4)$$

式中 H —— 刚体变换矩阵, $H \in SE(3)$

$$H = \begin{bmatrix} I & 0 \\ T & I \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 \\ z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

如果将参考坐标系选在梁的中间位置, 可以得到如下的对角形式的系统柔度矩阵

$$\bar{C} = \bar{H} C \bar{H}^T = \text{diag} \left[\frac{l}{EI_x} \quad \frac{l}{EI_y} \quad \frac{l}{GJ} \quad \frac{l^3}{12EI_y} \quad \frac{l^3}{12EI_x} \quad \frac{l}{EA} \right] \quad (5)$$

式中 $\bar{H} \in SE(3)$ —— 从左端点到梁中间的刚体平移变换矩阵

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{T} & I \end{bmatrix}$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 0 & l/2 & 0 \\ -l/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

式(5)和参考文献[4]中给出的结果是一致的, 验证了该理论方法的正确性。下面将讨论此理论方法的拓展应用。

2 具有空间复合变形构件的串联机器人分析

2.1 系统弹性分析

考虑如下的一般情况, 一个由弹性变形杆件构成的 6 自由度串联机器人系统。对于其中的任意一个杆件, 建立图 2 所示的坐标系。每个杆件的变形旋量为 $z_i = \begin{bmatrix} J_i \\ d_i \end{bmatrix}$, 其受力为 $W_i = \begin{bmatrix} M_i \\ F_i \end{bmatrix}$, 有如下的关系式

$$z_i = C_i W_i \quad (6)$$

式中 C_i —— 杆件 i 的柔度矩阵

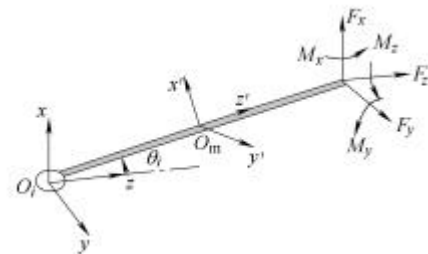


图 2 任一杆件 i 的坐标系统描述

众所周知, 对于刚性串联机器人系统^[3], 其末端到基座的关系为

$$A(q) = \exp(q_1 s_1) \exp(q_2 s_2) L \exp(q_6 s_6) \quad (7)$$

式中 s_i —— 第 i 关节的关节旋量

q_i ——为第 i 关节的角度变量

$i=1,2,L,6$

那么，当杆件有弹性变形时，利用李群李代数的指数映射关系，可以给出其相应的变换关系为^[8]

$$A(\mathbf{q}, \mathbf{l}) = \exp(\mathbf{q}_1 s_1) \exp(\mathbf{l}_1 z_1) \exp(\mathbf{q}_2 s_2) \exp(\mathbf{l}_2 z_2) \dots \exp(\mathbf{q}_6 s_6) \exp(\mathbf{l}_6 z_6) \quad (8)$$

式中 \mathbf{l}_i ——对应于变形旋量的表示其幅度大小的变量矩阵， $i=1,2,L,6$

假定机器人末端的柔性变形旋量为 $s_e = \begin{bmatrix} ?_e \\ ?_e \end{bmatrix}$ 作

用在末端的外力或负载为一力旋量 $w_e = \begin{bmatrix} t_e \\ f_e \end{bmatrix}$ 。那么

根据整个机器人系统变形与其各个杆件变形的关系，可以得到

$$\sum_{i=1}^6 \left[\prod_{j=1}^i \exp(\mathbf{q}_j s_j) \exp(\mathbf{l}_j z_j) \right] \exp(-\mathbf{l}_i z_i) C_i W_i = \sum_{i=1}^6 B_i C_i W_i = C_e w_e \quad (9)$$

式中 B_i —— 刚体坐标变换

$$B_i = A_i \exp(-\mathbf{l}_i z_i)$$

$$A_i = \prod_{j=1}^i \exp(\mathbf{q}_j s_j) \exp(\mathbf{l}_j z_j)$$

C_e ——系统总的柔度矩阵

在某一瞬间，根据坐标变换，系统末端的外力与各个杆件受力的关系表达式为

$$B_i W_i = w_e \quad (10)$$

将(10)式代入(9)式，得到机器人系统总的柔度矩阵与其每个杆件的柔度之间的关系为

$$\sum_{i=1}^6 B_i C_i (B_i)^{-1} = C_e \quad (11)$$

2.2 运动分析

考虑机器人末端夹持器上的一个点， $P' = (x', y', z')^T$ ，在基座的参考系中可以表示为 $P = (x, y, z)^T$ 。由式(8)知，它们之间有如下的关系

$$\begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} P' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

这样，该点的速度可以表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^6 \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial l_i} \dot{l}_i \right] \begin{bmatrix} P' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

假设已知机器人末端的运动速度旋量为 $s = \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$ ， s_i 和 z_i 分别为当前位置的第 i 个关节的旋

量和第 i 个杆件变形旋量，那么有如下的运动学关系

$$\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = s_1 \dot{q}_1 \& + z_1 \dot{l}_1 \& + s_2 \dot{q}_2 \& + z_2 \dot{l}_2 \& + \dots + s_6 \dot{q}_6 \& + z_6 \dot{l}_6 \& \quad (14)$$

可以简洁地写成

$$\begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} = J_r \dot{q} + J_f \dot{l} \quad (15)$$

式中， $\dot{q} = [\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dots \dot{q}_6]^T$ 为刚性广义变量矩阵； $\dot{l} = [\dot{l}_1 \dot{l}_2 \dots \dot{l}_6]^T$ 为柔性广义变量矩阵， $J_r = [s_1 s_2 \dots s_6]$ 为关节刚性雅可比矩阵， $J_f = [z_1 z_2 \dots z_6]$ 为杆件柔性雅可比矩阵。

3 具有空间复合变形构件的并联振动平台分析

弹性振动送料平台在工业生产中对工件的自动进给和装配有重要作用^[11]，实物如图 3 所示。其产生振动的腿是由弹簧片构成的。

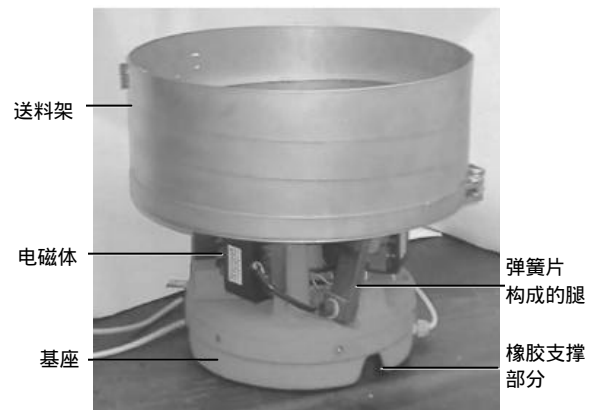


图 3 弹性振动送料平台^[11]

平台共有三条腿，对称布置。其简化的机构描述模型见图 4 所示。图 4 中 S 为旋量。

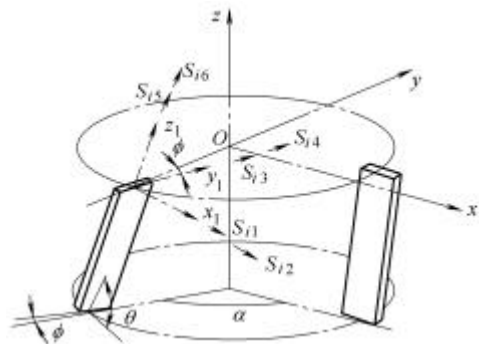


图 4 弹性振动送料平台的简化机构描述

3.1 基本关系的建立

假定每条腿弹簧片的长度为 l ，断面宽为 b ，厚度为 d ，与水平面的倾角为 q ，与上下平台圆周半

径方向的安装角为 f ，从焊接点到平台中心的半径为 r ，腿之间的圆周角度间隔为 $a = 120^\circ$ 。考虑每条腿(弹簧片)具有空间柔度，如果坐标系建立在腿的中间位置，那么由(5)式可以得到对角形式的柔度矩阵 \bar{C} 。把柔度矩阵从中间点移动到上端点与平台的焊接点，那么该条腿(看作第一条腿)的柔度可以表示为

$$C_1 = \bar{H}\bar{C}\bar{H}^T \quad (16)$$

根据弹簧片的安装参数，将焊接点处腿的局部坐标系变换到上平台中央的全局参考坐标系的刚体变换矩阵为

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{R} & 0 \\ \hat{T}\hat{R} & \hat{R} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$J_1 = \hat{A}I_{6 \times 6} = \hat{A} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos f \sin q & \sin f & -\cos f \cos q & 0 & 0 & 0 \\ -\sin f \sin q & \cos f & \sin f \cos q & 0 & 0 & 0 \\ \cos q & 0 & \sin q & 0 & 0 & 0 \\ -r \cos q & 0 & -r \sin q & \cos f \sin q & \sin f & -\cos f \cos q \\ 0 & 0 & 0 & -\sin f \sin q & \cos f & \sin f \cos q \\ r \cos f \sin q & r \sin f & -r \cos f \cos q & \cos q & 0 & \sin q \end{bmatrix} \quad (18)$$

考虑到第二条腿与第一条腿的安装参数相同，只是与其相比绕 z 轴旋转了 $a = 120^\circ$ ，所以根据 J_1 很容易可以得到第二条腿的雅可比矩阵

$$J_2 = \bar{B}g_1 \quad (19)$$

式中 \bar{B} —— 旋转的刚体变换

$$\bar{B}^6 = \begin{bmatrix} \bar{R}^6 & 0 \\ \bar{R}^6 & \bar{R}^6 \end{bmatrix}$$

\bar{R} —— 旋转矩阵

$$\bar{R}^6 = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因为三条腿是对称布置，有 $\bar{B}^6 = I$ ，即 $\bar{B}^6 = \bar{B}^6 = \bar{B}^6$ 。同理，可以得到第三条腿的雅可比矩阵为

$$J_3 = \bar{B}g_2 = \bar{B}^2 g_1 = \bar{B}^2 J_1 \quad (20)$$

3.2 系统弹性分析

每条腿(弹簧片)的变形旋量 z_i 和力旋量 w_i 之间的关系为

$$z_i = C_i w_i \quad (21)$$

平台的变形旋量 z 和每条腿的变形旋量 z_i 有如下的关系

$$z = J_i^T z_i \quad (22)$$

式中 \hat{A} —— 一般的刚体变换群， $\hat{A} \in SE(3)$

\hat{R} —— 旋转变换

$$\hat{R} = R(q, z)R(f, y)$$

\hat{T} —— 平移变换

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -r \\ 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

如果把每条腿的弹性变形旋量当 6 个独立的旋量，把它表示在平台中心的全局坐标系中，由刚体变换可以得到第一条腿的雅可比矩阵

其平台所受外力 w 和腿受力 w_i 之间的关系

$$w = J \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = J_1 w_1 + J_2 w_2 + J_3 w_3 \quad (23)$$

式中 J —— 系统的雅可比矩阵

$$J = [J_1 \quad J_2 \quad J_3]$$

将式(21)和(22)加以变换代入式(23)，并整理得

$$C^{-1} = J_1 C_1^{-1} J_1^T + J_2 C_2^{-1} J_2^T + J_3 C_3^{-1} J_3^T \quad (24)$$

式中 C —— 系统总的柔度矩阵

注意到刚度与柔度的可逆关系，借助于式(19)和(20)可以得到整个系统平台刚度与各条腿刚度之间的关系式

$$K = J_1 K_1 J_1^T + \bar{B}g_1 K_2 J_1^T \bar{B}^6 + \bar{B}^2 g_1 K_3 J_1^T \bar{B}^2 \quad (25)$$

4 在螺旋弹簧空间弹性性能分析中的应用

螺旋弹簧可以看作是一个微小的梁单元沿着弹簧螺旋线的运动而形成的。鉴于此，利用其特殊的几何特性，研究其空间弹性问题^[6]。其运动几何关系描述见图 5 所示。

对于弹簧上任意一点处的微小梁单元，有式(3)的关系成立。根据弹簧的起始点处微小梁单元与参

坐标系的关系，有如下柔性密度表达

$$c_d = H_o c H_o^T \quad (26)$$

式中 H_o ——刚体变换群， $H_o \in SE(3)$

$$H_o = \begin{bmatrix} R_o & 0 \\ T_o R_o & R_o \end{bmatrix}$$

$$R_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{p}{2} - b\right) & -\sin\left(\frac{p}{2} - b\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{p}{2} - b\right) & \cos\left(\frac{p}{2} - b\right) \end{bmatrix}$$

$$T_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r \\ 0 & r & 0 \end{bmatrix}$$

b ——弹簧的螺旋升角

r ——螺旋弹簧的半径

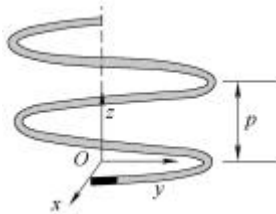


图5 微小梁单元与螺旋弹簧之间的关系描述

将弹簧螺旋线上任意一点处的微小单元变换到初始点的刚体变换为

$$H_c = \begin{bmatrix} R_c & 0 \\ T_c R_c & R_c \end{bmatrix} \quad (27)$$

式中 $R_c = \begin{bmatrix} \cos j & -\sin j & 0 \\ \sin j & \cos j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$T_c = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{pj}{2\pi} & 0 \\ \frac{pj}{2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

j ——从初始点到当前位置处的沿弹簧螺旋线的圆周转动角度

p ——弹簧的螺距

沿螺旋线的微小位移与其圆周旋转角度的变化关系为

$$dm = \sqrt{r^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2} dj = h dj \quad (28)$$

式中 $h = \sqrt{r^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2}$

所以，通过式(26)沿螺旋线的积分就可得到整个弹簧的空间柔度矩阵^[6]

$$C = \int_0^y H_c c_d H_c^T h dj \quad (29)$$

式中 y ——螺旋线总长度(即总的圆周旋转角度)

5 结论

将李群李代数(旋量)理论应用于分析连续柔性杆件空间弹性性能，并运用该理论由简单的杆件单元或梁进一步分析了柔性机器人、工业弹性振动平台以及曲线状构件(弹簧)等的空间弹性，拓展了李群李代数的应用范围和领域。研究表明：李群李代数(旋量)理论不但便于对刚体系统的空间运动分析，而且对具有连续柔性杆件的机械系统分析也非常有效。

李群李代数(旋量)理论是机械系统分析的一种非常强大的数学工具，可以使许多复杂的机械问题分析简单化，而且与常用的离散数学(有限元等)分析方法不同的是它便于得到精确的解析解，易于发现系统的运动和变化规律。未来的工作拟用该理论方法尝试分析和设计工业中的柔性装配中心、阻抗控制以及解决复杂机械系统的减振抑振等问题。

参 考 文 献

- 1 Ball R S. The Theory of Screws. Cambridge. UK : Cambridge University Press, 1900
- 2 Selig J M. Geometrical Method in Robotics. New York : Springer Verlag, 1996
- 3 Selig J M. Geometrical Foundations of Robotics. Singapore : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000
- 4 Von M R. Motor Calculus. Graz : University of Technology, 1996
- 5 Michel G Daniel R Mechanical Vibrations—Theory and Application to Structural Dynamics. Paris : Wiley Editorial Offices, 1994
- 6 Ding X L, Selig J M. On the compliance of coiled springs. International Journal of Mechanical Science, 2004, 46(5) : 703 ~ 727
- 7 Ding X L, Selig J M. Dynamic modeling of a compliant arm with 6-dimensional tip forces using screw theory. Robotica, 2003, 21 : 193 ~ 197
- 8 Ding X L, Selig J M. Screw theory on spatial stiffness analysis of robots with elastic joints and links. In : Proc. of Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism

and Machine Science, Tianjin, China, China Machine Press, 2004 : 1 873 ~ 1 877

- 9 Ferdinand P B, Russel J E Mechanics for Engineers—Statics and Dynamics. Fourth Edition. USA : McGraw-Hill Book Company, 1987
- 10 John C, Lord C, Carl T F, et al. Strength of Materials and Structures. Fourth Edition. London : Arnold, 1999
- 11 Okabe S, Yokoyama Y. Study on vibratory feeders : calculation of natural frequency of bowl-Type vibratory feeders. ASME J Mech. Des., 1981, 103 : 249 ~ 256

SCREW THEORY ON THE ANALYSIS OF MECHANICAL SYSTEMS WITH SPATIAL COMPLIANT LINKS

Ding Xilun

*(Robotics Research Institute, Beihang
University Beijing 100083)*

Selig John Mark

*(Faculty of BCIM, London South Bank University,
London SE10AA UK)*

Dai Jiansheng

*(Department of Mechanical Engineering, King's
College London, London WC2R2LS UK)*

Abstract : The mechanical system with spatial compliant links, that is the link under the deflections of bending in the plane, twisting and extending, is studied using screw theory. The elastic equations of a spatial compliant beam are built based on the material theory, and then, this beam theory is applied to the compliance and kinematics analysis of the serial robot with spatial compliant links. The vibrating bowl feeder for industry assembling work is further studied by considering its' legs as leaf springs. Finally, the spatial compliance of the coiled springs is discussed. The Lie groups and Lie algebras is successfully extended to study the mechanical system with spatial compliant links.

Key words : Spatial compliance Lie groups and Lie algebras
Compliant mechanisms Robot

作者简介 : 丁希仑, 男, 1967 年出生, 博士, 教授。主要研究方向 : 机器人机构学、仿生机器人和机器人检测技术。

E-mail : xlding@public3.bta.net.cn