

# 设计平面凸轮轮廓的新方法\*

张玉华

(安徽工业大学机械工程学院 马鞍山 243002)

辛重镐

(韩国昌原大学)

**摘要:** 提出了设计平面凸轮轮廓的相对运动法,这是一种适用于各种平面凸轮轮廓设计的通用方法。利用从动件相对凸轮运动的相对速度、相对加速度和从动件的表面法线确定平面凸轮的轮廓方程、压力角和曲率半径是该方法的基本原理。通过建立基于反转原理的通用模型、坐标系和齐次坐标变换技术,导出了平面凸轮的轮廓方程、压力角和曲率半径的一般表达式。该推导过程不仅适用于手工完成,而且为平面凸轮轮廓设计的智能化、自动化打下了基础。根据设计的自动推导和求解策略,用 C++ 和 OpenGL 语言开发了计算机辅助设计程序实现了平面凸轮轮廓设计和机构运动仿真的自动化。最后,给出了设计和仿真实例。

**关键词:** 平面凸轮 凸轮机构 建模与仿真 CAD

**中图分类号:** TH132.47

## 0 前言

凸轮机构是一种最容易实现预定运动的机构,广泛应用于各种自动机械和仪器设备中,如纺织机、计算机、打印机和食品加工机械等。平面凸轮机构是常用的凸轮机构,凸轮的转动使从动件按预定的运动规律移动或者摆动。由于凸轮机构的运动特征依赖于凸轮的轮廓和从动件的类型,为了获得从动件的预定输出运动(位移、速度和加速度),必须合理选择从动件的类型和结构参数后精确地设计凸轮的轮廓并检验凸轮的压力角和曲率半径。

目前,瞬心法(Polar method)可同时确定压力角、平面凸轮轮廓<sup>[1,2]</sup>和凸轮曲率半径<sup>[3]</sup>。复变量法(Complex variable method)<sup>[3]</sup>可同时求得压力角和曲率半径。包络法<sup>[3]</sup>、共轭曲面法<sup>[4,5]</sup>和等距曲面法<sup>[6]</sup>等用于设计平面凸轮轮廓。精确确定凸轮曲率半径的方法还有直接应用矢量函数曲线上任意点曲率半径的定义求解法(简称定义直接求解法)<sup>[1]</sup>。虽然这些方法针对某一机构能获得一组解析方程,但难以摆脱繁琐的手工推导,且推导结果缺乏通用性,不利于凸轮机构设计的智能化、自动化。为此,在参考文献[7]的基础上提出了一种适用于各种平面凸轮轮廓设计的通用方法,其推导过程不仅适用于手工完成,而且适用于计算机程序的自动推导和求解。

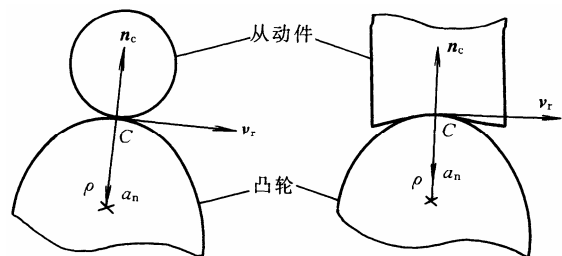
## 1 相对运动法

### 1.1 基本原理

如图1所示,在平面凸轮机构中,不论是曲面还是弧面从动件,当它靠着凸轮表面运动时,在接触点存在滑动,显然,这种滑动就是从动件相对于凸轮的相对运动,接触点的滑动速度是从动件的相对速度  $v_r$ ,接触点的轨迹形成凸轮的工作轮廓。由于相对速度  $v_r$  垂直于接触点的公法线  $n_c$ ,这种性质可表达为

$$v_r \cdot n_c = 0 \quad (1)$$

式(1)在共轭曲面理论中称为啮合方程。解此方程可求得接触点。



(a) 弧面从动件与凸轮 (b) 曲面从动件与凸轮

图1 从动件与凸轮的相对运动

如果凸轮固定,从动件和机架或支承绕凸轮轴线反转,同时,从动件相对于支承按预定的规律运动,这通常称为凸轮设计的反转模型。

在这种情况下,凸轮的工作轮廓在静止坐标系

\* 教育部留学回国人员科研启动基金和安徽省自然科学基金(03044102)资助项目。20020130 收到初稿,20030830 收到修改稿

中是平面曲线, 它是由质点, 即接触点, 运动形成的曲线。那么, 该曲线的曲率半径可表达为

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} \quad (2)$$

式中  $v$  ——质点的运动速度

$a_n$  ——法向(向心)加速度

因此, 利用从动件相对凸轮运动的相对速度、相对加速度和从动件的表面法线可以确定平面凸轮的轮廓方程、压力角和曲率半径, 故称之为相对运动法。

### 1.2 一般模型与坐标系

图 2 是平面凸轮轮廓设计的一般模型。通过改变参数和从动件与凸轮接触部分的形状可以表达各种平面凸轮机构。例如, 参数  $\phi, d$  固定,  $l$  随凸轮转角  $\theta$  变化, 它代表直动从动件凸轮机构; 参数  $d, l$  固定,  $\phi$  随转角  $\theta$  变化, 它代表摆动或转动从动件凸轮机构。

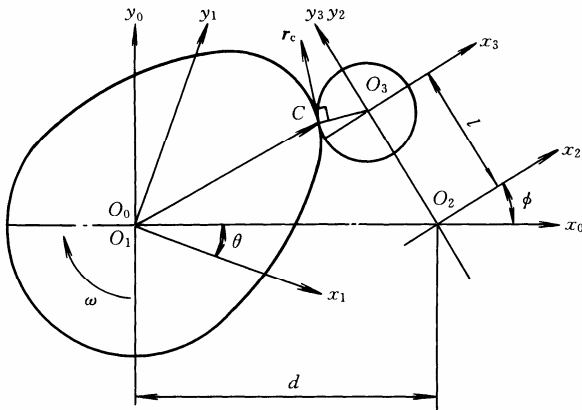


图 2 平面凸轮轮廓生成的一般模型

在凸轮上固定一直角坐标系  $O_1x_1y_1$ , 坐标原点与凸轮轴心重合, 称作凸轮坐标系, 用于描述凸轮的形状。直角坐标系  $O_0x_0y_0$  固定在机架上, 它的原点也位于凸轮轴上, 称作机架坐标系。在初始位置时, 即凸轮转角  $\theta=0$ , 坐标轴  $O_0x_0$  与  $O_1x_1$  重合。直角坐标系  $O_2x_2y_2$  的原点位于  $x_0$  轴上并反映了从动件相对于凸轮的位置, 称作从动件位置坐标系。坐标系  $O_3x_3y_3$  称为从动件形状坐标系, 用于描述各种从动件的轮廓。实际中, 凸轮坐标系是运动的, 而机架坐标系是固定的。在反转模型中, 凸轮坐标系固定, 机架坐标系转动, 从动件位置或形状坐标系随机架坐标系运动同时按预定的规律相对于机架坐标系运动。

### 1.3 坐标变换矩阵

设坐标系  $O_mx_my_m$  对应的列矢量  $e_m$  为

$$e_m = \begin{bmatrix} i_m \\ j_m \\ 1 \end{bmatrix} \quad m=0,1,2,3 \quad (3)$$

那么, 各坐标间的变换可表达为

$$\begin{cases} e_0 = T_{z,\theta} e_1 \\ e_2 = T_{z,\phi} T_{x,d} e_0 \\ e_3 = T_{y,l} e_2 \\ e_3 = T e_1 \\ e_1 = T^{-1} e_3 \end{cases} \quad (4)$$

式中  $T = T_{y,l} \cdot T_{z,\phi} \cdot T_{x,d} \cdot T_{z,\theta}$  (5)

$T$  称为总变换矩阵; 而  $T_{y,l}, T_{z,\phi}, T_{x,d}$  和  $T_{z,\theta}$  称为基本矩阵, 分别为

$$T_{y,l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{bmatrix} \quad T_{z,\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{x,d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵  $T$  的逆矩阵为

$$T^{-1} = T_{z,\theta}^{-1} \cdot T_{x,d}^{-1} \cdot T_{y,l}^{-1} \cdot T_{z,\phi}^{-1} \quad (6)$$

### 1.4 接触点位置、速度和加速度的一般表达

接触点  $C$  在坐标系  $O_3x_3y_3$  下的位置矢量为

$$r_c = [x_c \quad y_c \quad 1] \cdot e_3 = P \cdot e_3 \quad (7)$$

它在坐标系  $O_1x_1y_1$  下表达式为

$$r_c = [x_1 \quad y_1 \quad 1] \cdot e_1 = P \cdot T \cdot e_1 \quad (8)$$

在反转模型中, 接触点的速度矢量为

$$\dot{r}_c = P \cdot \dot{T} \cdot e_1 \quad (9)$$

为了根据接触点的速度计算压力角, 将它用从动件形状坐标系下的分量表达, 即

$$\dot{r}_c = [v_{x_3} \quad v_{y_3} \quad 1] \cdot e_3 \quad (10)$$

将式(4)代入, 得

$$\dot{r}_c = P \cdot \dot{T} \cdot T^{-1} \cdot e_3 = P \cdot T_V \cdot e_3 \quad (11)$$

式中  $T_V = \dot{T} \cdot T^{-1}$  称为速度变换矩阵。

那么

$$v^2 = P \cdot T_V \cdot T_V^T \cdot P^T \quad (12)$$

设接触点的单位公法线矢量为

$$n_c = N \cdot e_3 \quad (13)$$

式中  $N = [N_x \quad N_y \quad 1]$

接触点在坐标系  $O_3x_3y_3$  下的加速度矢量为

$$\ddot{r}_c = P \cdot \ddot{T} \cdot T^{-1} \cdot e_3 = P \cdot T_A \cdot e_3 \quad (14)$$

式中  $T_A$  ——加速度变换矩阵,  $T_A = \ddot{T} \cdot T^{-1}$

接触点的法向加速度为

$$a_n = -\ddot{r}_c \cdot n_c = -P \cdot T_A \cdot N^T \quad (15)$$

### 1.5 平面凸轮轮廓、压力角和曲率半径的确定

将式(11)和(13)代入式(1), 啮合方程变为

$$P \cdot T_V \cdot N^T = 0 \quad (16)$$

解式(16)可求得接触点齐次坐标  $\mathbf{P}$ ，然后，代入式(8)，得凸轮轮廓在凸轮坐标系下的参数方程

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{T} \quad (17)$$

凸轮的压力角是接触点处的公法线与从动件运动方向之间的夹角。由于在给定的模型中直动从动件和摆动从动件的运动方向是不同的，因此需要分别处理。对于直动从动件凸轮机构，压力角是  $y_3$  轴与公法线的夹角，即

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v_{y_3}}{v_{x_3}}\right) \quad (18)$$

而对于摆动从动件凸轮机构，其凸轮的压力角是  $x_3$  轴与公法线的夹角

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v_{x_3}}{v_{y_3}}\right) \quad (19)$$

将式(12)和(15) 代入式(2)，得凸轮的曲率半径为

$$\rho = -\frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{T}_V \cdot \mathbf{T}_V^T \cdot \mathbf{P}^T}{\mathbf{P} \cdot \mathbf{T}_A \cdot \mathbf{N}^T} \quad (20)$$

以上是相对运动法确定凸轮轮廓，压力角和曲率半径的一般表达式。它的推导过程充分利用了从动件相对于凸轮的运动信息，系统全面地给出了设计凸轮轮廓所需要的参数。这个过程步骤简单，不容易出错，不仅适合于人工推导，而且更易于计算机程序自动完成。

## 2 基于相对运动法的自动推导与求解

### 2.1 矩阵 $\dot{\mathbf{T}}$ 和 $\ddot{\mathbf{T}}$

在使用图 2 所示的一般模型确定凸轮轮廓、压力角和曲率半径时，平面凸轮机构不论具有什么形状的从动件，它们需要分为两大类：直动和摆动从动件凸轮机构。因为它们计算矩阵  $\dot{\mathbf{T}}$  和  $\ddot{\mathbf{T}}$  的表达式是不同的。

对于直动从动件凸轮机构，由于参数  $\phi$  和  $d$  是常数，那么，矩阵  $\mathbf{T}$  对时间求导，得

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}_{y,l} \cdot \mathbf{T}_{z,\phi} \cdot \mathbf{T}_{x,d} \cdot \mathbf{T}_{z,\theta} + \mathbf{T}_{y,l} \cdot \mathbf{T}_{z,\phi} \cdot \mathbf{T}_{x,d} \cdot \dot{\mathbf{T}}_{z,\theta} \quad (21)$$

$$\text{式中 } \dot{\mathbf{T}}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{y,l} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

$\dot{\mathbf{T}}_{z,\theta}$  和  $\dot{\mathbf{T}}_{y,l}$  称为基本速度矩阵。

矩阵  $\dot{\mathbf{T}}$  再对时间求导，得

$$\ddot{\mathbf{T}} = \ddot{\mathbf{T}}_{y,l} \cdot \mathbf{T}_{z,\phi} \cdot \mathbf{T}_{x,d} \cdot \mathbf{T}_{z,\theta} + 2\dot{\mathbf{T}}_{y,l} \cdot \mathbf{T}_{z,\phi} \cdot \mathbf{T}_{x,d} \cdot \dot{\mathbf{T}}_{z,\theta} + \mathbf{T}_{x,d} \cdot \dot{\mathbf{T}}_{z,\theta} + \mathbf{T}_{y,l} \cdot \mathbf{T}_{z,\phi} \cdot \mathbf{T}_{x,d} \cdot \ddot{\mathbf{T}}_{z,\theta} \quad (22)$$

$$\text{式中 } \ddot{\mathbf{T}}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}^2$$

$$\ddot{\mathbf{T}}_{y,l} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddot{i} & 0 \end{bmatrix}$$

$\ddot{\mathbf{T}}_{z,\theta}$  和  $\ddot{\mathbf{T}}_{y,l}$  称为基本加速度矩阵。

对于摆动从动件凸轮机构，由于参数  $l$  和  $d$  是常数，矩阵  $\mathbf{T}$  对时间一阶导数为

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{T}_{y,l} \cdot \dot{\mathbf{T}}_{z,\phi} \cdot \mathbf{T}_{x,d} \cdot \mathbf{T}_{z,\theta} + \mathbf{T}_{y,l} \cdot \mathbf{T}_{z,\phi} \cdot \mathbf{T}_{x,d} \cdot \dot{\mathbf{T}}_{z,\theta} \quad (23)$$

$$\text{式中 } \dot{\mathbf{T}}_{z,\phi} = \begin{bmatrix} -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ -\cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}$$

矩阵  $\mathbf{T}$  对时间二阶导数为

$$\ddot{\mathbf{T}} = \mathbf{T}_{y,l} \cdot \ddot{\mathbf{T}}_{z,\phi} \cdot \mathbf{T}_{x,d} \cdot \mathbf{T}_{z,\theta} + 2\mathbf{T}_{y,l} \cdot \dot{\mathbf{T}}_{z,\phi} \cdot \mathbf{T}_{x,d} \cdot \dot{\mathbf{T}}_{z,\theta} + \mathbf{T}_{y,l} \cdot \mathbf{T}_{z,\phi} \cdot \mathbf{T}_{x,d} \cdot \ddot{\mathbf{T}}_{z,\theta} \quad (24)$$

式中

$$\ddot{\mathbf{T}}_{z,\phi} = \begin{bmatrix} -\cos\phi \cdot \dot{\phi}^2 - \sin\phi \cdot \ddot{\phi} & -\sin\phi \cdot \dot{\phi}^2 + \cos\phi \cdot \ddot{\phi} & 0 \\ \sin\phi \cdot \dot{\phi}^2 - \cos\phi \cdot \ddot{\phi} & -\cos\phi \cdot \dot{\phi}^2 - \sin\phi \cdot \ddot{\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.2 推导与求解策略

相对运动法为凸轮轮廓的自动推导和求解奠定了基础。图 3 是实现自动推导和求解的程序框图。输入模块输入从动件的运动谱，机构类型和参数以及从动件的形状和参数。从动件的运动谱是指凸轮转动一周从动件的位移、类速度和类加速度变化规律，它们通常是由分段的连续函数曲线组成。在程序化的推导过程中，它们需要根据凸轮转角的离散点进行离散化。

凸轮轮廓的产生是自动完成的。主循环以  $\theta = 0$  开始，每次增加一个步长  $\Delta\theta$ ，直到  $\theta = 360^\circ$  结束。对于每一次循环，首先获取对应  $\theta$  的从动件运动谱离散值，然后，形成基本矩阵、基本速度矩阵和基本加速度矩阵；接着计算  $\mathbf{T}$ 、 $\dot{\mathbf{T}}$ 、 $\ddot{\mathbf{T}}$  和  $\mathbf{T}^{-1}$ 、 $\mathbf{T}_V$ 、 $\mathbf{T}_A$ ；采用一维搜索求解啮合方程，计算并保存对应于  $\theta$  的接触点坐标  $(x_1, y_1)$ ，压力角  $\alpha$  和曲率半径  $\rho$  的离散值，到此循环结束。由于凸轮轮廓是连续的曲线，让前一轮循环的接触点作为后一轮循环中一维搜索求解的起点以加快求解的速度。一维搜索中， $\Delta_p$  为搜索步长。由于每次搜索都是沿着已知的从动件轮廓进行，所以  $\Delta_p$  的范围可根据从动件的轮廓尺寸来设定。

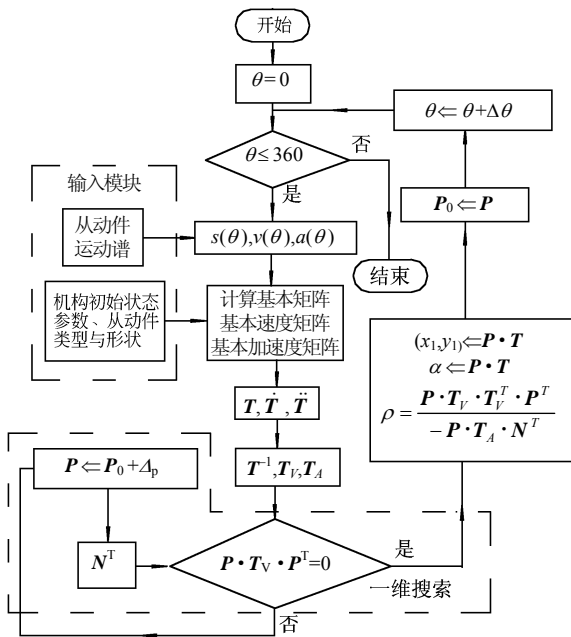


图3 平面凸轮轮廓自动推导和求解程序框图

表中  $\psi_{b1} = 2\arcsin\left(\frac{R_b + R_r}{2d}\right)$ ,  $\psi_{b2} = \psi_{b1} + \phi_m$ 。

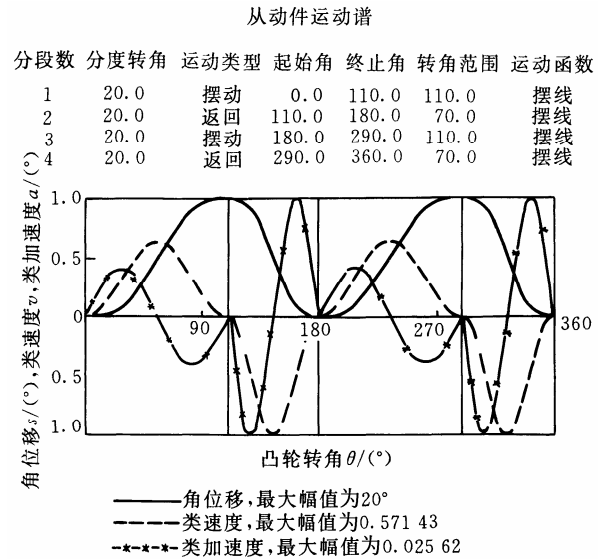


图4 单盘共轭凸轮机构从动件运动谱

### 3 实例与仿真

为了验证应用相对运动法进行平面凸轮轮廓的综合结果, 仿真凸轮机构的运动, 使用 C++ 和 OpenGL 开发了基于自动推导和求解策略的 CAD 程序 CFDS。由于相对运动法使用模型和推导步骤的通用性, 使得程序设计简单而具有很强的自适应能力。它不仅适用于尖底、平底或弧底等从动件的普通平面凸轮机构, 也适用于平面共轭凸轮, 平面分度凸轮等特殊的凸轮机构。这里仅给出一个滚子摆动从动件单盘平面共轭凸轮机构的综合示例。

首先, 选择机构的类型是摆动型, 主、副从动件分别位于机架坐标系的第一和第四象限, 输入机构的基本参数, 如下表所示; 然后给定从动件的运动谱, 如图 4 所示。接着, 进行自动推导与求解并显示综合结果。图 5 是共轭凸轮机构的运动仿真图, 它直观地显示凸轮轮廓与从动件的接触状态, 反映了凸轮轮廓综合的正确与否。图 6、7 给出了共轭凸轮表面压力角和曲率半径的分布曲线, 可进一步验证凸轮轮廓综合的优劣。

表 凸轮机构基本参数

从动件类型	基本参数 $R_b=30\text{ mm}$ $d=35\text{ mm}$	从动件位置	凸轮转向	从动件最大摆动幅值 $\phi_m$
主从动件	$l=35\text{ mm}$ $R_r=10\text{ mm}$	第 1 象限 $\phi_0 = 0.5\pi - \psi_{b1}$	顺时针	20°
副从动件	$l=35\text{ mm}$ $R_r=10\text{ mm}$	第 4 象限 $\phi_0 = 0.5\pi + \psi_{b2}$		

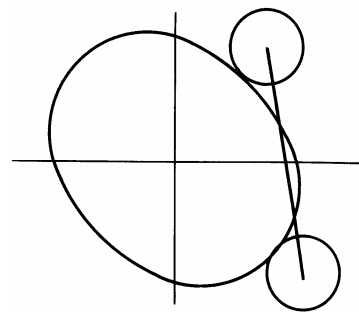


图5 滚子从动件单盘共轭凸轮机构的运动仿真图

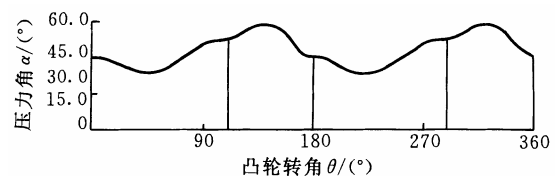


图6 凸轮表面的压力角分布

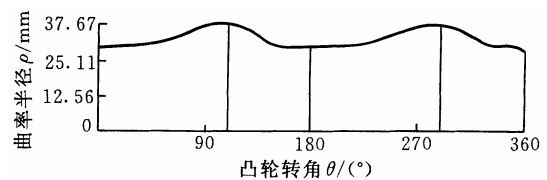


图7 凸轮表面曲率半径分布

### 4 结论

系统地介绍了相对运动法确定平面凸轮轮廓、压力角和曲率半径的基本原理和步骤。建立了适用于各种平面凸轮机构的一般模型并导出了确定平面凸轮轮廓、压力角和曲率半径的一般表达式。由于

相对运动法的推导过程易于用计算机程序表达,因而为计算机自动完成平面凸轮轮廓的综合奠定了理论基础。

应用相对运动法设计的自动推导和求解的策略使得设计人员只要给出机构的类型和基本参数,从动件的运动谱和形状后,不需要繁琐的推导,即可获得平面凸轮轮廓、压力角和曲率半径的离散解。作者据此开发的计算机程序实现了这一目标。设计实例与仿真结果表明:应用相对运动法进行自动推导的结果是正确的。

### 参 考 文 献

- 1 石永刚,徐振华. 凸轮机构设计. 上海:上海科学技术出版社, 1995
- 2 Shin J H, Lee C M, Kim J S. Shape design of disk cam mechanisms using instant velocity centers. In: Proceedings of 6th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, 1996, 1: 178~186
- 3 Fan Y Chen. Mechanics and Design of Cam Mechanisms. New York: Pergamon Press Inc, 1982
- 4 赵韩,丁爵曾,梁锦华. 凸轮机构设计. 北京:高等教育出版社, 1993
- 5 Tsay D M, Wei H M. A general approach to the determination of planar and spatial cam profiles. ASME Journal of Mechanical Design, 1996, 118(1): 259~265.
- 6 何有钧,邹慧君,郭为忠,等. 圆柱滚子从动件凸轮廓面的等距曲面自动综合. 机械设计, 2000, 17(6): 32~34
- 7 张玉华,辛重镐,具炳局. 设计直动从动件盘形凸轮的新方法. 天津大学学报, 2001, 34(6): 767~770
- 8 张玉华. 设计平面凸轮轮廓的相对运动法和平面共轭凸

轮分度机构的计算机辅助建模与仿真: [博士学位论文]. 韩国: 昌原大学, 2001

## NEW APPROACH TO PROFILE GENERATION OF DISK CAM MECHANISMS

Zhang Yuhua

(Anhui University of Technology)

Shin Joong-ho

(Changwon National University, South Korea)

**Abstract:** A new approach, called a relative motion method (RMM), is proposed for designing the shape of the disk cam, which uses the relative velocity, relative acceleration and normal line at the contact between a follower and a cam to discover the profile coordinate, the pressure angle and the radius of curvature on the cam. Their general expressions are derived based on an inverse model with special coordinate systems and homogeneous transformation techniques. It is characterized by the procedures of derivation and solution not only manually but also with computers. According to the designed strategy, a program for design automation of shape of the disk cam and the kinematics simulation of this kind of mechanism is developed using the proposed approach with C++ and OpenGL language. Finally, an example is given.

**Key words:** Disk cam Cam mechanism

Modeling and simulation CAD

**作者简介:** 张玉华, 1961年出生, 教授, 工学博士。主要研究方向为复杂机构的计算机建模与仿真, 凸轮 CAD/CAM, 机械产品的智能化设计。发表论文 20 余篇。