

蜂窝夹芯胞元壳的屈曲特性研究*

梁 森 陈花玲

(西安交通大学机械工程学院 西安 710049)

梁天锡

(中国工程物理研究院第 4 研究所 绵阳 621900)

摘要: 以正六边形蜂窝夹芯的胞元壳为例, 将 Euler 细长杆的稳定理论与板壳力学中的稳定理论相结合, 提出了薄壁胞元壳轴向受压临界载荷的计算公式和屈曲模态的三重级数表达式。根据胞元壳不同的失效形式, 将其分成了短胞元壳、长胞元壳和特长胞元壳, 确定了不同类型胞元壳的临界载荷控制方程和其对应的一阶屈曲模态, 在此基础上提出了胞元壳临界载荷总图。用 3D 有限元数值模拟技术, 通过对铝质正六边形蜂窝胞元壳进行模拟, 将其结果与公式的计算结果相比, 两者非常接近, 证实了理论分析的有效性。其结论对蜂窝夹层结构和薄壁棱柱壳的理论研究有重要的指导意义。

关键词: 蜂窝夹层结构 屈曲失稳 临界载荷 数值模拟

中图分类号: TB30

0 前言

蜂窝夹层复合结构一般是由上、下蒙皮中间夹一比较厚但质软的夹芯所构成。由于它具有较高的比强度、比刚度和较好的隔热、隔振和耐冲击等优点因而在航空、航天、航海和高速列车等领域得到广泛应用。蜂窝夹芯的形式有正六边形、正方形和圆形等; 材质可以是铝合金、芳纶纸和玻璃布等; 蒙皮可采用胶合板、纤维板、铝合金板和玻璃钢板等。由于蜂窝夹层结构本身的复杂性, 在理论分析中很难得到精确解。对于各向同性的实心板, 垂直于面板方向的正应力 σ_z 与平行于面板方向的正应力 σ_x 、 σ_y 和切应力 τ_{xy} 相比较小, 一般的理论分析都忽略了对应的研究。对于基本上是空心的复合夹层板来说, 能否忽略至今没有文献报道。

参考文献[1]认为蜂窝夹层结构的芯板极软, 仅能抵抗横向切应力, 因而在复合夹层板的理论研究中, 只考虑其承受切应力, 一般也是根据该力的大小确定夹芯的厚度。实际上蜂窝夹芯是由薄壁板用胶接拉伸法加工而成, 或辊压成形粘结而成, 当夹层板受横向弯曲力作用时, 按照承剪

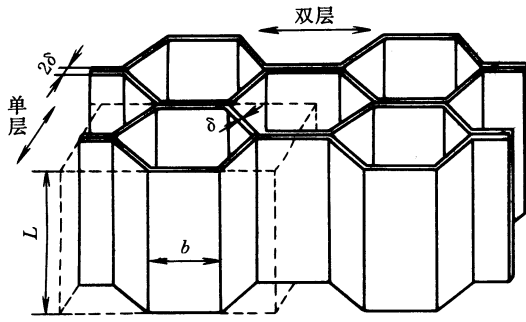
理论, 当然是夹芯越厚越好, 但这样由于 z 向压应力的作用会引起夹芯胞元(实际上是一个棱柱壳)的失稳塌陷, 从而导致整个蜂窝夹芯丧失承载能力, 实践证明蜂窝夹层板的塌陷是其破坏的主要形式之一。目前国内外对棱柱壳的研究大部分都集中在局部屈曲的理论探讨中, 整体屈曲研究的相对较少, 对临界载荷研究的较多, 对屈曲模态研究的相对较少^[2~7]。为此以正六边形蜂窝胞元壳为研究对象, 将细长杆的稳定理论与薄壁板的稳定理论相结合, 提出了屈曲变形的级数表达式和胞元壳临界应力总图, 给出了一套较完整的分析设计理论, 并与 3D 有限元数值分析结果进行比较, 两者非常接近, 其结论为蜂窝夹层板及棱柱壳屈曲失稳的理论研究提供依据。

1 蜂窝夹芯胞元壳的屈曲理论

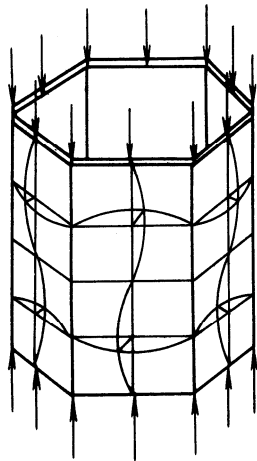
正六边形蜂窝夹芯的结构如图 1a 所示, 其在一个方向是双层的, 在另一个方向是单层的。为了分析方便, 当单独考虑一个蜂窝胞元时, 则等效压强为夹层板蒙皮的 1.5 倍, 其受力和屈曲模态如图 1b 所示。

对于一般的蜂窝胞元壳, 由于夹层板的蒙皮比较薄, 当其两端所受的均布压力达到临界值时, 每一壁板的屈曲可看成是四边简支的矩形薄板, 其受力和边界约束如图 2a(简称板模型)所示。

* 国家自然科学基金委员会和中国工程物理研究院联合基金(10076012)和教育部博士点基金(20010698011)资助项目。20040318 收到初稿, 20040924 收到修改稿

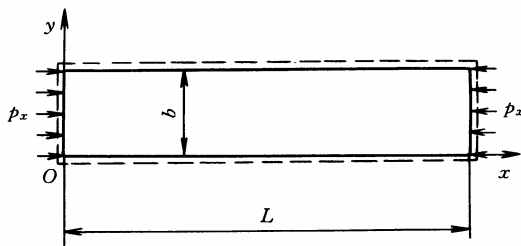


(a) 蜂窝夹芯的结构示意图

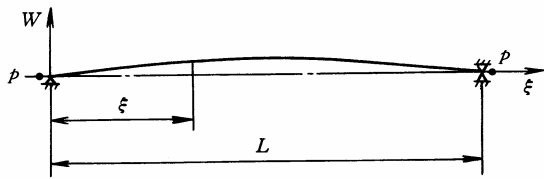


(b) 受力及屈曲模态图

图 1 正六边形蜂窝夹芯的结构及受力模型



(a) 四边简支的矩形板单向受压模型



(b) 两端铰支的细长杆受压模型

图 2 分析研究的力学模型

对于图 2a 的力学模型，其控制方程为^[8]

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + p_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

其边界约束为

$$\begin{cases} w=0 & \frac{\partial^2 w}{\partial w^2} = 0 & x=0, L \\ w=0 & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 & y=0, b \end{cases} \quad (2)$$

式中 w ——临界屈曲状态下，胞壁板内任一点挠度

D ——板的弯曲刚度

p_x ——平行于 y 轴单位长度的均布压力

对于正六边形蜂窝胞元壳，认为其横截面的最小惯性矩 J 沿轴向是一致的。在力作用下，板模型假设六个棱边是不变形的，实际上当外力足够大时，六个棱边也会随着轴线的弯曲而变形，因此要考虑壳体轴线变形对各壁板的影响，即将板模型和细长杆模型的挠度一起考虑来研究壳体的屈曲。图 2b 表示壳体轴线的受力和边界约束，其控制方程为

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{pw}{EJ} = 0 \quad (3)$$

式中 p ——胞元壳所受的压力

E ——胞元壁板材料的弹性模量

J ——胞元壳横截面的惯性矩

w ——胞元壳轴线的挠度

边界约束为

$$\xi = 0, L \text{ 时, } w=0 \quad (4)$$

式(3)中 w 与式(1)中 w 在物理意义上有所不同，为了求解方便，都用 w 表示，目的是把轴线整体弯曲也反映到胞元壁板的屈曲中。

胞元壳受压屈曲后，整体上要受式(3)、式(4)的控制，其每一块壁板要受式(1)、式(2)的控制，使上面四式成立的解便是胞元壁板的完整屈曲形式。

设方程解为

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{kmn} \sin \frac{k\pi\xi}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5)$$

式中 L ——胞元壳的高度

b ——胞壁板的宽度

A_{kmn} ——不为零的待定系数，它与蜂窝胞元初始几何条件和物理状态有关

$k, m, n = 1, 2, 3, \dots$

k ——为胞元壳整体屈曲的半波数

m, n ——分别为单个胞壁板在 x 向的半波数和 y 向的半波数

式(5)使边界约束式(2)、式(4)成立，将式(5)代入式(1)有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{kmn} \left(\frac{m^4 \pi^4}{L^4} + 2 \frac{m^2 n^2 \pi^4}{L^2 b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \frac{p_x m^2 \pi^2}{DL^2} \right) \sin \frac{k\pi\xi}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \quad (6)$$

要使式(6)每一项在 ξ 、 x 和 y 的定义域内为零，必须有

$$A_{kmn} \left(\frac{m^4 \pi^4}{L^4} + 2 \frac{m^2 n^2 \pi^4}{L^2 b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \frac{p_x m^2 \pi^2}{DL^2} \right) = 0 \quad (7)$$

由式(7)得

$$p_x = \frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{mb}{L} + \frac{n^2L}{mb} \right)^2 \quad (8)$$

要求最小的 p_x , 必须令 $n=1$, 于是有

$$p_x = \frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{mb}{L} + \frac{L}{mb} \right)^2 \quad (9)$$

对式(9)求极值, 有 $\frac{\partial p_x}{\partial (mb/L)} = 0$, 得 $m = \frac{L}{b}$, 再代回

式(9), 有最小临界载荷 $(p_x)_{cr}$ 为

$$(p_x)_{cr} = 4 \frac{D\pi^2}{b^2} \quad (10)$$

式(10)只有在 $m=L/b$ 为整数时成立, 当 $m=L/b$ 为非整数时, 仍让 $n=1$, 其半波数 m 应取与 L/b 最相近的前后整数中的一个, 它仍使 p_x 为最小, 令

$$\lambda = \left(\frac{mb}{L} + \frac{L}{mb} \right)^2$$

要求 m 和 $m+1$ 的 p_x 相等, 有

$$\frac{mb}{L} + \frac{L}{mb} = \frac{(m+1)b}{L} + \frac{L}{(m+1)b} \quad (11)$$

由式(11)得

$$L/b = \sqrt{m(m+1)} \quad (12)$$

同理也要求 m 和 $m-1$ 的 p_x 相等, 有

$$L/b = \sqrt{m(m-1)} \quad (13)$$

由式(12)和式(13)可得 inequality

$$\sqrt{m(m-1)} \leq L/b \leq \sqrt{m(m+1)} \quad (14)$$

式(14)对应 x 向的半波数为 m , 这样依次递推解决了 L/b 为非整数时 m 的取值问题。当 $L/b = \sqrt{m(m \pm 1)}$ 时, 半波数可以是 m 也可以是 $m \pm 1$, 不影响 p_x 的最小取值。当 $L \gg b$ 时, 由式(14)知, $L/b \approx m$, 这时 $\lambda=4$, 该结果可在图 4 中看到。

由上述结果知, 式(5)在式(8)的约束下, 才是式(1)的解。接着研究式(5)是否为式(3)的解, 同理将式(5)代入式(3)有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{kmn} \left(\frac{p}{EJ} - \frac{k^2\pi^2}{L^2} \right) \times \sin \frac{k\pi\xi}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \quad (15)$$

式(15)中符合题意的解为

$$\frac{p}{EJ} - \frac{k^2\pi^2}{L^2} = 0 \quad (16)$$

其临界压力为

$$p = \frac{k^2\pi^2 EJ}{L^2} \quad (17)$$

要求最小临界压力 p_{cr} , 使 $k=1$, 有

$$p_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} \quad (18)$$

式(8)和式(17)中的载荷值有一定区别, p_x 是胞元壁板单位长度的均布压力, 而 p 是整体屈曲时全部载荷。

上述结果表明, 式(5)在式(8)和式(17)的约束下, 才是方程组式(1)和式(3), 边界约束为式(2)和(4)的解。

2 胞元壳的分类

上面由控制方程组式(1)和式(3)的解, 求得临界载荷及屈曲形式的表达式, 下面根据不同的失效形式, 将壳体分成短胞元壳、长胞元壳和特长胞元壳, 求得不同 L 胞元失效载荷及其相关参数控制公式。

2.1 短胞元壳

当胞元 L 很小时, 式(8)中的 $m, n=1, L/b \approx 0$, 相反 b/L 很大, 使得临界载荷 p_x 增大, 胞壁板在屈曲前已经压溃或产生塑性变形, 由式(8)可得

$$\sigma_x \approx \frac{D\pi^2}{\delta L_1^2} = \sigma_s \quad (19)$$

由式(19)得

$$L_1 = \sqrt{\frac{D\pi^2}{\sigma_s \delta}} \quad (20)$$

式中 σ_s ——胞壁板的屈服点

σ_x ——胞壁板 x 向应力

L_1 ——胞壁板不发生失稳而压溃或产生塑性变形的最长 L

由式(20)知, L_1 的量值与胞壁板材料的性能及其厚度有关, 与胞壁板的宽度无关。当 $L \leq L_1$ 时, 对应的胞元壳定义为短胞元壳, 其胞壁板不会发生屈曲失稳, 也没有屈曲模态, 设计时应按屈服应力(塑性材料)或强度极限(脆性材料)来控制相关几何参数。

2.2 长胞元壳

当 $L > L_1$ 时(确切地说 $m > 1$ 时), 随着 L/b 的增大, p_x 将在一个较小范围内变化。当 $L \gg b$ 时, p_x 随着 L/b 的变化曲线基本上成了直线(如图 3 中的 CB)。在式(17)中, 空心胞元壳随 L 增大, 其临界载荷曲线反而下降, 两条曲线交点对应的 L 定义为 L_2 。当壳体长度为 L_2 时, 由式(5)知, 其屈曲模态是以局部屈曲形式为调制波, 以整体屈曲为载波的调制波形, 这里称为调制屈曲模态(与无线电信号中调制波相似, 见图 5c 和图 5d), 这时临界载荷之间有

$$\frac{4D\pi^2 A_1}{\delta b^2} = \frac{\pi^2 EJ}{L_2^2} \quad (21)$$

求得

$$L_2 = \sqrt{\frac{b^2 EJ \delta}{4DA_1}} \tag{22}$$

将 $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ 和 $J = i^2 A_1$ 代入式(22)有

$$L_2 = \frac{bi}{\delta} \sqrt{3(1-\mu^2)} \tag{23}$$

式中 μ ——蜂窝胞元材料的 Poisson 比

δ ——壳体壁板的厚度

A_1 ——胞元壳横截面实心部分的面积

i ——胞元壳横截面实心部分的惯性半径

L_2 ——胞壁板发生局部屈曲失稳的最长 L

从式(23)知，出现调制屈曲模式对应的 L_2 ，其量值与胞壁板材料性能关系不大(一般材料的 Poisson 比较小)，基本上由胞元的几何特性所决定。当 $L_1 < L \leq L_2$ 时，将其对应的胞元壳定义为长胞元壳，有关参数应按式(9)确定，其一阶屈曲模式基本上是局部屈曲，但当 L 接近 L_2 时，其屈曲模式为调制屈曲。

2.3 特长胞元壳

当 $L > L_2$ 时，将其对应的胞元壳定义为特长胞元壳，有关参数应按式(18)确定，其一阶屈曲模式是整体屈曲。

3 胞元壳受压屈曲的临界应力曲线

上面根据胞元壳的失效形式对其进行了分类，解得不同类型胞元壳失效参数控制方程。为了给蜂窝夹芯板结构设计提供方便，将参数控制方程概括成一张胞元壳屈曲临界应力总图，具体见图 3，其中 σ_{cr} 表示临界压应力。

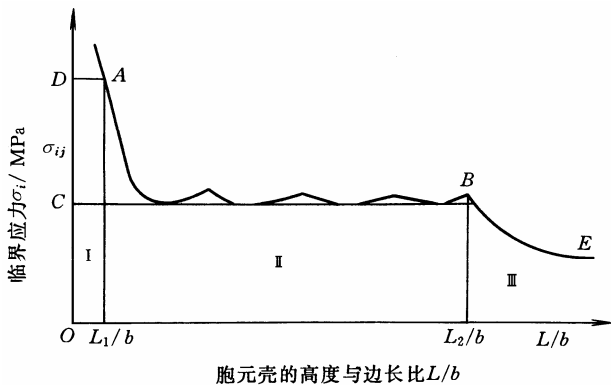


图 3 受压胞元壳临界应力的总图

棱柱(胞元)壳稳定理论是受压棱柱壳设计的基础，在工程中应用非常广泛，长期以来，设计缺乏统一的标准，为此现将胞元壳分成三种：短胞元壳、

长胞元壳和特长胞元壳，对应图 3 中的区间分别为 I 区、II 区和 III 区。其中 I 区的失效形式为屈服或压溃， $0 < L \leq L_1$ ，控制方程为式(20)，用直线 DA 表示；II 区的失效形式为局部屈曲， $L_1 < L \leq L_2$ ，控制方程为式(9)，用曲线 AB 表示；III 区的失效形式为整体屈曲， $L > L_2$ ，控制方程为式(18)，用曲线 BE 表示。

4 算例验证

为了验证蜂窝胞元壳临界载荷设计公式的正确性，课题使用大型商业有限元软件 ANSYS7.0 模拟蜂窝胞元壳的屈曲失稳，以 $b=3 \text{ mm}$ ， $\delta=0.05 \text{ mm}$ 的铝质蜂窝胞元壳为例，使用 shell63 单元建立 3D 有限元模型，取 $E=68.97 \text{ GPa}$ ， $\mu=0.3$ ，通过静力、屈曲特征和扩展求解，就能获得屈曲应力和屈曲模式。现将公式解出的临界载荷 p_g 与 3D 有限元分析的一阶屈曲结果 p_f 进行比较。先根据式(20)和式(23)确定胞元壳的类型，有 $L_1=1.1 \text{ mm}$ ， $L_2=190.1 \text{ mm}$ ，分析结果列入下表。

表 公式计算的临界载荷与 3D 有限元分析结果比较

	长胞元壳		特长胞元壳		
	胞元壳高度 L/mm	36	1500	360	400
有限元法计算值 p_f/N	61.340	61.380	17.670	14.320	9.178
文中公式计算值 p_g/N	61.740	61.740	17.220	13.950	8.928
误差 $e/\%$	0.65	0.59	2.55	2.58	2.72

从上表知，公式与有限元分析结果非常接近，说明临界载荷计算公式的有效性。为了便于比较，图 4 绘出该蜂窝胞元的临界载荷总图，其中水平轴是胞元壳的高度与边长比，垂直轴是夹层板蒙皮所受临界压强 p_{cr} 的对数。将其与有限元分析的结果进行比较。

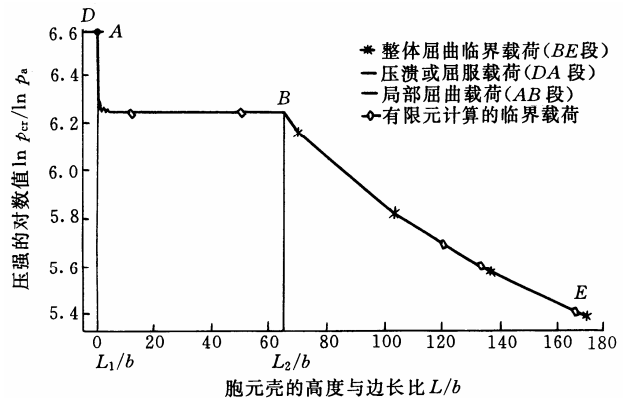


图 4 铝制蜂窝临界载荷的理论值和有限元分析的结果

现将计算结果换算成蜂窝夹层板蒙皮的压强，其值比参考文献[9]推荐的压缩强度值要小，如再考

虑上、下蒙皮与夹芯的粘接和夹芯本身的缺陷,显然应降低参考文献[9]的推荐值,防止由于夹芯的屈曲失稳而引起夹层板的塌陷。

下面整理出有限元数值模拟所获得的部分屈曲模态图,其中图 5a 是局部屈曲模态图,图 5b 是整体屈曲模态图,图 5c、d 是调制屈曲模态图。其实在蜂窝胞元壳中,整体屈曲和局部屈曲一直统一的存在着,在某些参数范围内,局部屈曲占主导地位,而在另一些参数范围内,整体屈曲占主导地位,中间有一个过渡的调制屈曲模态。

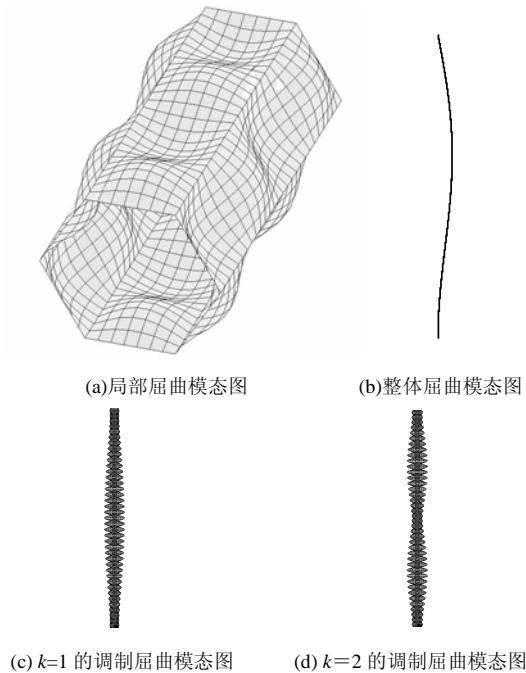


图 5 部分屈曲模态图

5 蜂窝夹芯板的设计原则

根据目前有关复合材料的参考文献,蜂窝夹芯板的厚度还没有具体而成熟的设计办法和设计原则,为此提出了一种循环优化设计的思想,并根据该思想编制了相应的计算程序,具体过程如下。

(1) 根据预定的蜂窝夹层板所承受最大压应力 σ_z 大小,确定该板不失稳(或失效)的最大夹芯厚度 L_{\max} 。

(2) 根据强度理论,利用蜂窝夹层板最大许用内应力 σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} 、 τ_{xz} 、 τ_{yz} 确定蒙皮厚度和最小的夹芯厚度 L_{\min} (注意选择适当的安全系数)。

(3) 利用参考文献[10]的优化方法,在上述两个 L 之间取一个优化的结果为夹芯的厚度。

(4) 校核优化后蜂窝夹层板的蒙皮厚度。

如在执行上述过程中出现 $L_{\min} > L_{\max}$ 时,应根据标准蜂窝结构尺寸选择其他型号的蜂窝。将第三和第

四步的计算结果作为预定蜂窝夹层板参数,重复上述过程,直到满足所有的受力和第三步优化条件为止。

这样设计出的夹层板,既能满足承载要求,同时还具有刚性好、质量轻的优点。但一定要尽量选择胞壁边长小(蜂窝孔小)壁板薄的标准蜂窝。当然还要考虑胶粘剂的强度。

6 结论

(1) 以蜂窝夹芯的正六边形胞元壳为例,将细长杆的稳定理论与薄壁板的稳定理论相结合,提出了胞元壳屈曲变形的三重级数表达式及其临界应力总图,根据不同的失效形式把胞元壳分成了短胞元壳、长胞元壳和特长胞元壳,推出了不同类型胞元壳的失效参数控制方程,给出了一套较完整的分析设计理论,为蜂窝夹层板和棱柱壳屈曲失稳的理论研究提供依据。

(2) 通过对铝制蜂窝夹芯胞元壳的 3D 有限元数值分析,证实了文中提出的胞元壳屈曲失稳临界应力总图的有效性。通过对屈曲模态的分析研究,证实了文中提出的胞元壳屈曲模态三重级数表达式的正确性,最后还给出了蜂窝夹芯板的设计原则。

(3) 提出的胞元壳屈曲失稳临界载荷图是在理想状态下得出的,实际上胞元壳含有几何缺陷和材料缺陷,设计时要根据试验结果加上一定的安全系数才行。

参 考 文 献

- 1 Allen H G. Analysis and Design of Structural Panels. Oxford: Pergamon Press, 1969
- 2 Rhodes J. Buckling of thin plates and members—and early work on rectangular tubes. Thin-Walled Structures, 2002, 40: 87~108
- 3 Makoto M, Hidekazu E, Hideaki N. Dynamic axial plastic buckling of square tube. Journal of Materials Processing Technology, 1999, 85: 213~216
- 4 Migita Y, Fukumoto Y. Local buckling behaviour of polygonal sections. Journal of Constructional Steel Research, 1997, 41: 221~233
- 5 Chen W G, Wierzbicki T. Torsional collapse of thin-walled prismatic columns. Thin-Walled Structures, 2000, 36: 181~196
- 6 Herbert S. Stability of steel shell structures general report. Journal of Constructional Steel Research, 2000, 55: 159~181
- 7 Liu Y, Young B. Buckling of stainless steel square hollow section compression members. Journal of Constructional Steel Research, 2003, 59: 165~177

- 8 陈铁云, 沈惠中. 结构的屈曲. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1993
- 9 方昆凡, 黄英. 机械工程材料实用手册. 沈阳: 东北大学出版社, 1995
- 10 范秋习. 蜂窝夹层复合材料. 北京轻工业学院学报, 1998,16(2): 77~81

BUCKLING STUDY ON A THIN-WALLED CELLULAR SHELL OF HONEYCOMB SANDWICH STRUCTURE

Liang Sen Chen Hualing

*(School of Mechanical Engineering,
Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)*

Liang Tianxi

*(No.4 Institute, China Academy of
Engineering Physics, Mianyang 621900)*

Abstract: Taking a cellular shell of regular hexagonal honey-

comb sandwich as example, the buckling theories of Euler column and thin-walled plate are combined. The treble series solution of cellular shell buckling mode and the critical loading formulas are derived. The short cellular shell, medium length cellular shell, and the long cellular shell have been classified according to the failure forms of cellular structure. The perfectly designing theory is built up and the critical loading chart is provided. It can be found that the different classical cellular shell has different controlling equation and first-order buckling formation. Finally the calculated results with derived formulas are coincidence with 3D finite element analysis results. The conclusions will have significant reference for the study of a honeycomb sandwich structure and thin-walled prismatic shell.

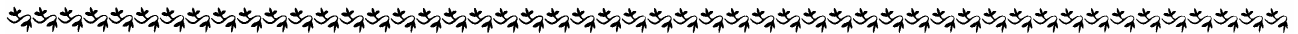
Key words: Honeycomb sandwich structure

Buckling mode

Critical loading Numeric simulation

作者简介: 梁森, 男, 1962 年出生, 高级工程师, 博士研究生。主要研究方向为复合材料结构的动态设计和数控机床的研发等。

E-mail: liangsen888111@sina.com.cn



(上接第 89 页)

of 55 steel is small, but corrosion and the synergetic action between erosion and corrosion is increased with the increasing erosion rates, the weight loss rate of pure corrosion is small, but the weight loss of pure wear is great, so the application of two materials is limited.

Key words: Erosion-wear Corrosion Synergeticaction

作者简介: 鲍崇高, 男, 1966 年出生, 副教授, 博士后。主要从事先进陶瓷材料的制备工艺及性能研究, 陶瓷颗粒增强金属基复合材料的制备及性能研究, 金属合金材料的磨损(常温、高温)、腐蚀与冲蚀。

E-mail: cgbao@mail.xjtu.edu.cn