

二齿差摆线针轮减速器针齿壳内曲线参数优化*

万朝燕 兆文忠 李力行

(大连铁道学院机械工程系 大连 116028)

摘要: 以二齿差摆线针轮减速器针齿壳内曲线参数为设计变量, 摆线轮处于任意位置均能顺利装入, 且针齿壳内曲线不发生干涉为约束条件, 针齿壳强度、刚度削弱最小为优化目标, 对二齿差摆线针轮减速器针齿壳内曲线参数进行了优化。编制了集优化参数、判定间隙、绘图检验为一体的计算机程序。该程序使用方便, 通用性强, 对针齿壳的生产制造具有一定的指导意义。

关键词: 摆线针轮减速器 针齿壳 二齿差摆线轮 优化设计 短幅内摆线

中图分类号: TH311.414 TP311.72

0 前言

对摆线针轮行星减速器针齿壳内曲线的要求是: 在保证两片相错 180° 的摆线轮能够顺利安装的前提下, 使针齿壳强度、刚度削弱最小, 同时应使加工、测量和检验方便。

一般是在铣床上用立铣刀铣出短幅内摆线的外等距曲线作为针齿壳内曲线, 笔者曾在文献[1]中提出了一齿差传动针齿壳内曲线参数优化方法, 在合作厂的应用中已收到了满意的效果。

鉴于在小速比的情况下, 二齿差传动所具有的同时啮合传力齿数多、抗胶合能力强的特点, 生产制造厂十分需要有关二齿差传动针齿壳内曲线参数优化的原理及相关数据, 故在以往工作的基础上, 对此问题作了更进一步的深入研究, 并得出了有价值的结论。

1 数学模型的建立

二齿差摆线针轮减速器针齿壳内曲线参数优化的基本思想是: 首先, 选用比较适用且工艺性较好的曲线作为针齿壳内曲线 L_q , 选定坐标系并列数学方程, 确定设计参数; 其次, 列出二齿差摆线轮在运行中相对上述同一固定坐标系所形成的一系列曲线族的方程; 然后, 应用微分几何原理, 求出该曲线族的包络线 L 的方程。从理论上讲, 只要保证针齿壳内曲线 L_q 上的所有点均在此包络线 L 之外, 即可保证摆线轮能够顺利安装。因此, 其约束条件为曲线 L_q 必须位于曲线 L 以外(可根据需要

设定间隙量), 且保证曲线 L_q 不产生“顶切”或“尖点”, 优化目标为使针齿壳强度、刚度削弱最小。

1.1 针齿壳内曲线

选用短幅内摆线的外等距曲线作为针齿壳内曲线, 由立铣刀铣削而成, 如图1所示。该曲线 L_q 在直角坐标系 Oxy 下的方程式^[1]为

$$\begin{aligned} x_q &= R_r \sin \varphi - a_q \sin(z_{cq} \varphi) + \\ &\quad r_t \frac{R_r \sin \varphi + a_q z_{cq} \sin(z_{cq} \varphi)}{\sqrt{R_r^2 - 2a_q z_{cq} R_r \cos(z_{pq} \varphi) + a_q^2 z_{cq}^2}} \\ y_q &= R_r \cos \varphi + a_q \cos(z_{cq} \varphi) + \\ &\quad r_t \frac{R_r \cos \varphi - a_q z_{cq} \cos(z_{cq} \varphi)}{\sqrt{R_r^2 - 2a_q z_{cq} R_r \cos(z_{pq} \varphi) + a_q^2 z_{cq}^2}} \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $R_r = D_a / 2 + a_q - r_t$

D_a ——齿顶圆直径

a_q ——针齿壳内曲线偏心距

$a_q = (D_f - D_a) / 4$

D_f ——齿根圆直径

r_t ——铣刀半径

φ ——角参数

z_{pq} ——内曲线枝数, 对二齿差: $z_{pq} = 2(i+1)$

i ——减速器传动比

$z_{cq} = z_{pq} - 1$

1.2 二齿差摆线轮运行中形成的曲线族的包络线

如图2所示, 设 $O_c x_c y_c$ 为与摆线轮固连的动坐标系, Oxy 为与针齿壳固连的静坐标系。当摆线轮运行时, O_c 绕 O 旋转, $O_c O$ 为摆线轮中心 O_c 到针齿壳中心 O (即图3中针轮中心 O_p) 的中心距(偏心距) a 。在 $O_c x_c y_c$ 坐标系随摆线轮绕 O_c 自转的同时, $O_c O$ 以 ω_i 的角速度绕 O 公转, $O_c x_c y_c$ 的绝对角速度为 ω 。

* 国家自然科学基金资助项目(50175011)、20021009 收到初稿, 20030130 收到修改稿

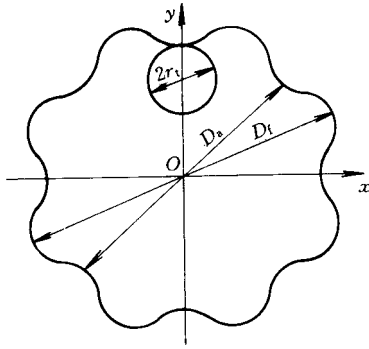


图1 针齿壳内曲线—短幅内摆线的外等距曲线

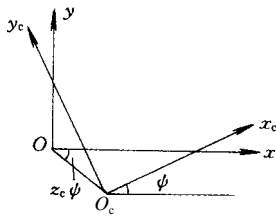


图2 摆线轮动坐标系与针齿壳静坐标系

1.2.1 二齿差摆线轮齿廓

在二齿差传动中，摆线轮的齿形是由两条相位相差半个周节的一齿差摆线轮齿形相交而成^[2,3]，如图3所示。故从齿根F到齿顶A的齿形与相同传动比的一齿差齿形一致，在O_c x_c y_c坐标系中的方程为

$$\begin{aligned}
 x_c &= [r_p + \Delta r_p - (r_{tp} + \Delta r_{tp})\Phi(K'_1, \varphi)] \cos[(1 - i_H) \times \\
 &\quad \varphi - \delta] - \frac{a}{r_p + \Delta r_p} [r_p + \Delta r_p - z_p (r_{tp} + \Delta r_{tp}) \times \\
 &\quad \Phi(K'_1, \varphi)] \cos(i_H \varphi + \delta) \\
 y_c &= [r_p + \Delta r_p - (r_{tp} + \Delta r_{tp})\Phi(K'_1, \varphi)] \sin[(1 - i_H) \times \\
 &\quad \varphi - \delta] + \frac{a}{r_p + \Delta r_p} [r_p + \Delta r_p - z_p (r_{tp} + \Delta r_{tp}) \times \\
 &\quad \Phi(K'_1, \varphi)] \sin(i_H \varphi + \delta)
 \end{aligned} \quad (2)$$

- 式中 r_p ——针齿中心圆半径
 a ——摆线针轮行星传动中心距(偏心距)
 $a = \overline{O_c O_p}$
 r_{tp} ——针齿套外圆半径
 Δr_p ——移距修形量
 Δr_{tp} ——等距修形量
 δ ——转角修形量
 z_p ——相应的一齿差传动针轮齿数
 $z_p = i + 1$
 K'_1 ——有移距修形时齿形的短幅系数
 $K'_1 = az_p / (r_p + \Delta r_p)$
 $\Phi(K'_1, \varphi) = \sqrt{1 + K'^2_1 - 2K'_1 \cos \varphi}$
 i_H ——摆线轮与针轮的相对传动比

$$i_H = z_p / z_c$$

z_c ——相应的一齿差传动摆线轮齿数

$$z_c = z_p - 1 = i$$

φ ——转臂相对于某一针齿中心矢径的转角，即啮合相位角 φ_{Hp} 的简写

其齿顶由交点A构成(为简化起见，此处不考虑齿形的修顶^[2,3])，由图3可知

$$\lambda = 180^\circ / (2z_c) \quad (3)$$

设A点在O_c x_c y_c坐标系下的坐标为(x_A, y_A)，则

$$\tan \lambda = y_A / x_A \quad (4)$$

由式(2)可得

$$\begin{aligned}
 x_A &= [r_p + \Delta r_p - (r_{tp} + \Delta r_{tp})\Phi(K'_1, \varphi_A)] \cos[(1 - i_H) \times \\
 &\quad \varphi_A - \delta] - \frac{a}{r_p + \Delta r_p} [r_p + \Delta r_p - z_p (r_{tp} + \Delta r_{tp}) \times \\
 &\quad \Phi(K'_1, \varphi_A)] \cos(i_H \varphi_A + \delta)
 \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned}
 y_A &= [r_p + \Delta r_p - (r_{tp} + \Delta r_{tp})\Phi(K'_1, \varphi_A)] \sin[(1 - i_H) \times \\
 &\quad \varphi_A - \delta] + \frac{a}{r_p + \Delta r_p} [r_p + \Delta r_p - z_p (r_{tp} + \Delta r_{tp}) \times \\
 &\quad \Phi(K'_1, \varphi_A)] \sin(i_H \varphi_A + \delta)
 \end{aligned} \quad (5b)$$

注意此处 $z_p = i + 1 = z'_p / 2$ (z'_p 为二齿差传动针轮的实际齿数，与式(1)中针齿壳内曲线枝数 z_{pq} 相等)。

已知 r_p 、 r_{tp} 、 a 、 i 、 Δr_p 、 Δr_{tp} 、 δ ，由式(3)算得 λ 值，将式(4)、式(5a)、式(5b)三式联立上机求解，即可求得 φ_A 、 x_A 和 y_A 的数值。由此可得，二齿差摆线轮齿顶圆半径为

$$r_{ac} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \quad (6)$$

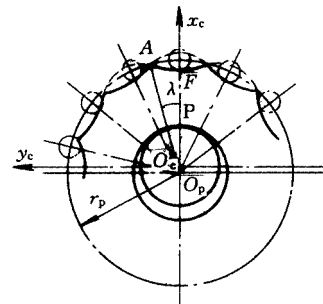


图3 二齿差摆线轮齿廓

1.2.2 二齿差摆线轮运行中形成的曲线族及其包络线

由图2可得摆线轮齿形方程由动坐标系O_c x_c y_c变换到静坐标系Oxy的表达式，见式(7a)中x, y式，式中x_c、y_c由式(2)表达。当图2中psi取一系列不同值时，即可得到摆线轮在运行中所形成的曲线族的方程。特别需要注意的是，由于二齿差摆线

轮齿形方程式中的 x_c 、 y_c 在摆线轮齿顶处的导数不连续, 即齿廓曲线有尖点, 因此, 无法应用文献[4]中的包络线方程直接求出完整的上述曲线族的包络线。运用微分几何知识做出理论分析并绘图检验, 采用以下方法求出了二齿差摆线轮运行中形成的曲线族(如图 4)的包络线: 先用第 1.2.1 节中介绍的方法求出二齿差摆线轮齿顶处的角参数 φ_A 及齿顶圆半径 r_{ac} , 然后由式(7a)计算出角参数为 φ_A 时包络线上的点 x_{φ_A} 、 y_{φ_A} , 该点即为导数不连续的点。最后, 求包络线的半个分支 ($0 \leq \varphi \leq 180^\circ$): 当角参数 $0 \leq \varphi \leq \varphi_A$ 时, 根据文献[4], 导出包络线方程式(7a); 当角参数 $\varphi_A \leq \varphi \leq 180^\circ$ 时, 包络线为二齿差摆线轮齿顶的轨迹, 由式(7b)表示, 因此, 所求包络线 L 的方程为

$$\begin{aligned} x &= x_c(\varphi) \cos \psi - y_c(\varphi) \sin \psi + a \cos(z_c \psi) \\ y &= x_c(\varphi) \sin \psi + y_c(\varphi) \cos \psi - a \sin(z_c \psi) \\ F(\varphi, \psi) &= \frac{\partial x_c}{\partial \varphi} x_c + \frac{\partial y_c}{\partial \varphi} y_c - a z_c \frac{\partial x_c}{\partial \varphi} \cos(z_p \psi) + \\ & a z_c \frac{\partial y_c}{\partial \varphi} \sin(z_p \psi) = 0 \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq \varphi_A \\ x &= x_c(\varphi_A) \cos[\varphi(1 - z_p / z_c)] - \\ & y_c(\varphi_A) \sin[\varphi(1 - z_p / z_c)] + a \cos \varphi \\ y &= x_c(\varphi_A) \sin[\varphi(1 - z_p / z_c)] + \\ & y_c(\varphi_A) \cos[\varphi(1 - z_p / z_c)] + a \sin \varphi \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\varphi_A \leq \varphi \leq 180^\circ$$

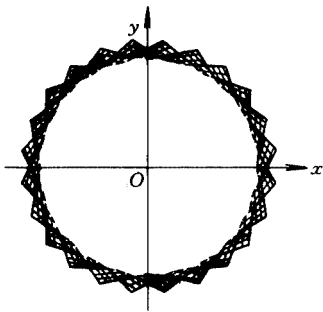


图 4 二齿差摆线轮在运行中形成的曲线族

1.3 针齿壳内曲线参数优化的数学模型

(1)设计变量: 由式(1)可知, 针齿壳内曲线是由 D_a 、 r_t 和 a_q 三个基本参数所决定的, 为使优化能在满足精度的条件下尽量简化, 可输入 D_a , 或者, 取针齿壳内曲线 L_q 在齿顶处与摆线轮曲线族的包络线 L 的径向距离为设计者所要求的间隙量 δ_c , 则根据上述 L_q 与 L 的形成原理可得

$$D_a = 2[r_p + \Delta r_p - (r_{tp} + \Delta r_{tp}) + \delta_c] \quad (8)$$

若取 L_q 在齿根处与 L 的径向距离亦为 δ_c , 则同理可得

$$D_f = 2(a + r_{ac} + \delta_c) \quad (9)$$

式中各符号意义同前。根据第 1.1 节中的分析及式(8)、式(9), 得式(1)中针齿壳内曲线的偏心距

$$a_q = \frac{D_f - D_a}{4} = \frac{a + r_{ac} - [r_p + \Delta r_p - (r_{tp} + \Delta r_{tp})]}{2} \quad (10)$$

因此, 在上述前提下, 针齿壳内曲线参数的优化就成为仅有一个设计变量——铣刀半径 r_t 的优化问题。

(2)目标函数: 如前述, 该问题的优化目标应为对针齿壳的强度、刚度削弱最小, 即在同一极角 θ_i (i 点矢径与 Ox 轴正向的夹角)下, 针齿壳内曲线 L_q 上对应点的矢径长度 $\sqrt{x_{qi}^2 + y_{qi}^2}$ 与二齿差传动摆线轮在运行中形成的曲线族的包络线 L 上对应点的矢径长度 $\sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ 之差的绝对值最小, 将针齿壳内曲线的一个周节分为 n 份时, 则有目标函数

$$\min f(r_t) = \sum_{i=0}^n \left[\left(\sqrt{x_{qi}^2 + y_{qi}^2} - \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \right)^2 \right] \quad (11)$$

式中, x_{qi} 、 y_{qi} 由式(1)求得, x_i 、 y_i 由式(7a)、(7b)求得。

(3)约束条件: 因曲线 L_q 上的点必须在相距包络线 L 上对应点以外 δ_c 处, 故应有约束函数

$$g_1(r_t) = \delta_c - \left(\sqrt{x_{qi}^2 + y_{qi}^2} - \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \right) \leq 0 \quad (12)$$

r_t 不得为负值

$$g_2(r_t) = -r_t \leq 0 \quad (13)$$

另外, 必须保证针齿壳内曲线不产生“顶切”和“尖点”, 故应有约束函数^[1]

$$g_3(r_t) = \begin{cases} r_t - \frac{\left(\frac{D_a}{2} + a_q + a_q z_{cq} \right)^2}{\frac{D_a}{2} + a_q (1 + z_{cq})^2} \leq 0 & r_{t1} < r_t \leq r_{t2} \\ r_t - D_d \leq 0 & r_{t2} < r_t < r_{t3} \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{式中 } r_{t1} = \frac{D_a}{2} + a_q - a_q z_{cq}^2$$

$$r_{t2} = \frac{D_a}{2} + a_q - \frac{a_q z_{cq} (2z_{cq} + 1)}{2 + z_{cq}}$$

$$r_{t3} = \frac{D_a}{2} + a_q - a_q z_{cq}$$

$$D_d = \frac{-B_b \pm \sqrt{B_b^2 - 4A_a C_c}}{2A_a} = \begin{cases} D_{d1} \\ D_{d2} \end{cases}$$

若 D_{d1} 与 D_{d2} 之一为负值，则舍去负值；若两者均为正值，取值小者；若两者均为负值，则无解。

式中 $A_a = -B_c + 1$

$$B_b = 4B_c(D_a/2 + a_q)$$

$$C_c = B_c[-4(D_a/2 + a_q)^2 + 4a_q^2 z_{cq}^2]$$

$$B_c = 27(1 + z_{cq}) / (z_{cq} - 1)^3$$

2 程序设计原理及功能

本优化程序根据对目标函数性态的分析^[1]，应用外推法进行求解。初始点选为^[1] $r_t = (2i + 1)(r_p + \Delta r_p) / (i + 1)^2 - (r_{tp} + \Delta r_{tp})$ 。此问题解的情形有两种可能。① 有一个最优解，此时输出最优解。② 可行域为空集，即问题无解。此时将针齿壳内曲线取为圆形，输出整圆直径 $D_z = D_f = 2(a + r_{ac} + \delta_c)$ 。

根据已知的摆线轮参数 r_p 、 r_{tp} 、 a 、 i 、 Δr_p 、 Δr_{tp} 、 δ ，运用此程序可完成以下工作。

(1) 输入预选间隙量 δ_c ，根据式(8)确定或输入 D_a ，设计者参考计算机由式(10)算得的 a_q 值，输入选定 a_q 值。经优化得加工针齿壳内曲线的铣刀半径的最佳值 r_t^* ，并提供可选代用铣刀的尺寸范围(问题无解时，输出整圆直径 D_z)。

(2) 选用半径为等于或稍大于 r_t^* ，且现场便于提供的铣刀，经人机对话将该 r_t 值输入，打印出针齿壳内曲线 L_q 与摆线轮在运行中形成的曲线族的包络线 L 之间的间隙分布情况：极角为 θ_i 处的实际间隙 $\delta_{csi}(\theta_i) = \left(\sqrt{x_{qi}^2 + y_{qi}^2} - \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \right)$ ，并绘制出相应的图形。

(3) 对上述结果满意，选取部分或全部项目输出；若不满意或有其他要求，可重新输入不同的 D_a 、 a_q 和 r_t ，求得对应的数据及图形结果。

此程序也可直接用来检验选定的某一组针齿壳内曲线参数是否合理。

3 算例

已知二齿差摆线轮参数为： $r_p=135$ mm， $r_{tp}=11$ mm， $a=6$ mm， $i=11$ ， $\Delta r_p=0.15$ mm， $\Delta r_{tp}=0.3$ mm， $\delta=0^\circ$ 。取预选间隙 $\delta_c=0.5$ mm。

(1) 经优化确定针齿壳内曲线参数为 $D=249$ mm， $a_q=3.8$ mm， $r_t=10$ mm。

(2) 针齿壳内曲线 L_q 与摆线轮在运行中形成的曲线族的包络线 L 之间的间隙情况 $[\delta_{csi}(\theta_i)]$ 数据省略：最小间隙量 $\delta_{cmin}=0.567$ mm；最大间隙量 $\delta_{cmax}=1.492$ mm。

(3) 绘制图形检验：针齿壳内曲线 L_q 、摆线轮在运行中形成的曲线族 L_c 及其包络线 L 分别如图5、图6所示。

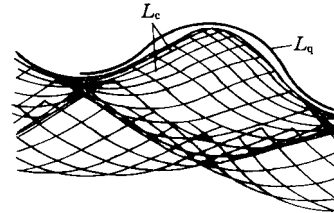


图5 针齿壳内曲线 L_q 与曲线族 L_c



图6 针齿壳内曲线 L_q 与曲线族 L_c 的包络线 L

4 结论

(1) 图5、图6验证了表达曲线族 L_c 及其包络线 L 的式(7a)，式(7b)和表达针齿壳内曲线 L_q 的式(1)的正确性。

(2) 选取短幅内摆线的外等距曲线作为二齿差传动针齿壳内曲线是比较合适的。除工艺性好之外，只要选取适当的参数，就可以使该曲线与摆线轮曲线族的包络线之间的间隙分布比较合理，以达到对针齿壳强度、刚度削弱最小的目的。

(3) 由于程序中除给出最佳铣刀半径值外，还提供了可选代用铣刀的尺寸范围，操作者可非常方便地选用现有铣刀，并继续利用该程序进行检验。

(4) 当三个约束条件不能同时被满足时，优化问题无解，取整圆作为针齿壳内曲线，程序输出最佳整圆直径值供参考。避免了在制造过程中，因事先无法预料结果，而加工出干涉曲线的情况。

参考文献

- 1 万朝燕. 新型摆线针轮行星传动计算机辅助设计的研究: [硕士学位论文]. 大连: 大连铁道学院, 1990
- 2 朱孝录主编. 中国机械设计大典. 第4卷, 第35篇, 第二章(李力行编). 南昌: 江西科学技术出版社, 2002
- 3 Li L X, Guan T M, Wang Z F, et al. The computer aided design of cycloid drive. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1990, 3(2): 221~231

(下转第134页)