

DOI: 10.3901/JME.2008.10.222

# 基于时频脊线的瞬时频率特征提取\*

柏林 刘小峰 秦树人

(重庆大学机械工程学院 重庆 400044)

**摘要:** 根据时频脊线所在的位置信息与信号瞬时频率的对应关系, 提出根据时频脊线提取多成分瞬时频率的新方法。该方法先通过加窗处理对一维时间信号进行时域分段, 对每个时段信号采用自适应核函数时频分析, 再把每个时段上求得的时频分布拼接成信号整体时频谱; 然后将时频分布图转换成直观的二维图像, 进行平滑处理后采用二维Laplacian算子提取时频图像的脊线并作细化处理; 采用Hough变换自动检测时频脊线的特征参数, 特别对正弦调频信号和线性调频信号的时频脊线检测问题进行论述。仿真试验和齿轮故障诊断的工程实践证明该方法的可行性和有效性。

**关键词:** 瞬时频率 时频分布 脊线提取 Hough变换 曲线检测

**中图分类号:** TG156

## Extraction of Instantaneous Frequency Characteristic Using Time-frequency Ridges

BO Lin LIU Xiaofeng QIN Shuren

(College of Mechanical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044)

**Abstract:** A novel multi-component instantaneous frequency (IF) extracting method using the corresponding relation between the position information of time-frequency ridges and IF of signal is introduced. After the radial Gaussian kernel time-frequency distribution (RGKD) is studied, the improved RGKD is proposed. By segmenting the one dimensional time signal in time domain by way of adding windows, the whole time series is cut into many sub-segments and the whole RGKD can be obtained by concatenating the sub-segment RGKD. Then, the whole RGKD is regarded as an image, and the ridges of the image are extracted by using digital image processing method including smoothing processing, two dimensional Laplacian operator and refining treatment. Hough transform for detecting lines automatically is used, especially, the process of detecting beeline and sine curve are discussed. The validity of the whole method has been verified by computer simulation and fault diagnosis in gear box.

**Key words:** Instantaneous frequency Time-frequency distribution Ridges extraction Hough transform Curve detection

## 0 前言

为了研究瞬态与非平稳现象, 提取非平稳过程的瞬时频率特征是一项极为重要的工作。机械设备的故障振动信号是一种典型的非平稳时变信号, 在设备运行状态、工况发生变化时, 振动信号的频率成分往往随时间产生突发性变化, 分析这些频率的时变特征是故障诊断的一个重要手段。用经典的瞬时频率特征提取方法(如 Hilbert 变换、相位拟合法

等)所得到的只是信号的瞬时平均频率, 而不是信号中某个特殊成分的瞬时频率值。这些经典方法对单分量宽带信号是非常有效的, 但不适用于故障振动信号这样的多分量窄带信号。在诊断某一故障时, 往往希望能掌握信号中某些特殊成分的瞬时频率变化情况, 因为振动信号中某些成分的瞬时频率在故障状态下与正常状态下时存在明显差别。可以通过提取振动信号中某些特殊成分的瞬时频率特征来诊断故障。

本文介绍了一种新的瞬时频率特征提取方法。该方法利用信号的时聚性好且无交叉项的时频分布, 把一维时间转换为直观的二维时频图形。时频图像的脊线标记了信号能量在时频面上最为集中的区域, 也反映了非平稳信号频率随时间变化的过程,

\* 国家自然科学基金(50605065)、国家高技术研究发展计划(863 计划, 2008AA042408)和重庆市科委自然科学基金(2007BB2142)资助项目。20071108 收到初稿, 20080611 收到修改稿

可以通过图像脊线的提取，使得信号分量瞬时频率在时频面上变得直观且具有实际物理意义<sup>[1]</sup>。为了能够实时地自动提取瞬时频率特征，本文将在图像处理中用于检测一次或二次曲线的 Hough 变换引入到时频面上特征脊线的识别过程中，加快了瞬时频率特征的提取速度并提高了特征参数的识别精度。

### 1 自适应核函数时频分布

时频分析由于具有时频域的局部化信息，已经成为研究非平稳信号的主要工具。目前，对非平稳信号的时频分析大多采用的是双线性 Cohen 类分布。本文主要的理论基础之一，就是 Cohen 类时频分布中由 BARANIUK 等<sup>[2]</sup>提出的自适应核函数时频分布。他们采用带约束的最优化方法，巧妙地设计出了径向高斯核函数。基于这种核函数的时频分布对信号的自分量具有较好的聚集作用，能较好地描述信号能量沿瞬时频率的变化关系，同时采用随信号自适应变化的核函数在很大程度上抑制了交叉干扰项，提高了时频分辨率，减弱了对噪声的敏感性。信号  $x(t)$  的最优核函数的优化准则为

$$\max \iint_{\tau, \nu} |A_x(\tau, \nu) \Psi(\tau, \nu)|^2 d\tau d\nu \quad (1)$$

约束为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\tau, \nu)| d\tau d\nu \leq \alpha \quad \alpha \geq 0 \quad (2)$$

式中  $A_x(\tau, \nu)$  为信号的模糊函数，定义为

$$A_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2}) x^*(t - \frac{\tau}{2}) \exp(j\nu\tau) dt \quad (3)$$

$\Psi(\tau, \nu)$  为径向高斯核函数

$$\Psi(\tau, \nu) = \exp(-(\tau^2 + \nu^2)/(2\sigma^2(\theta))) \quad (4)$$

式(4)中  $\sigma(\theta)$  控制  $\Psi(\tau, \nu)$  在径向角  $\theta$  方向的扩展，称之为扩展函数， $\theta$  为径向与水平方向的夹角

$$\theta = \arctan \frac{\tau}{\nu} \quad (5)$$

式(2)中  $\alpha$  为核函数的能量体积。在模糊域，为了极大化准则式(1)，不管对应的是自分量还是交叉干扰分量，信号模糊函数  $A_x(\tau, \nu)$  大的地方， $\Psi(\tau, \nu)$  也要大，而核函数约束式(2)表明核函数能量体积是有限的，因此如果要保留远离原点的交叉干扰分量，核函数  $\Psi(\tau, \nu)$  必在交叉分量方向有比较远的延伸，这就会浪费宝贵的能量体积。为使优化准则极大化，核函数在能量体积有限的约束下， $\Psi(\tau, \nu)$  将尽可能近的延伸，保留集中在原点的信号模糊函数的自分量，抑制远离原点的交叉分量，并在无信号分量的模糊区域使模糊函数等于零。为计算简便，通常将上述优化问题转换到极坐标中进行处理。式(4)中的

径向高斯核函数用极坐标形式表示为

$$\Psi(r, \theta) = \exp(-r^2/(2\sigma^2(\theta))) \quad (6)$$

式(6)中， $r = \sqrt{\theta^2 + \tau^2}$ 。这样就将二维函数的优化求解问题转换为一维函数的优化求解问题，优化的目的简化为寻找最优一维扩展函数  $\sigma_{opt}(\theta)$ 。式(1)在极坐标形式下表达为

$$\max \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |A_x(r, \theta) \Psi(r, \theta)|^2 r dr d\theta \quad (7)$$

约束条件式(2)简化为

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sigma^2(\theta) d\theta \leq \alpha \quad (8)$$

优化准则核约束都是径向对称的，优化准则的核约束对模糊域信号成分的定位角度并不敏感。这样，只要确定一半区间的最优核函数  $\sigma_{opt}(\theta)$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) 就可以了。整个计算过程的关键在于最优核函数的计算，即扩展函数  $\sigma(\theta)$  的计算，可以采用梯度上升迭代算法<sup>[3]</sup>求其最优解。迭代步骤简述为

$$\sigma(k+1) = \sigma(k) + \mu \nabla(k) \quad (9)$$

$$\nabla(k) = \frac{A_r^4 A_b}{\sigma_q^3(k)} \sum_p^{p-1} p^3 |A_p(p, q)|^2 \exp\left(-\frac{(pA_r)^2}{\sigma_q^2(k)}\right) \quad (10)$$

式中  $q = 0, 1, \dots, Q-1$ 、 $A_b$ 、 $\sigma(k)$ 、 $A(p, q)$  分别为  $r$ 、 $\theta$ 、 $\sigma(\theta)$ 、 $A(r, \theta)$  的离散化表示， $P$ 、 $Q$  为离散化  $r$ 、 $\theta$  所取的点数，为了便于编程计算，通常取  $P = Q$ 。

工程中的信号在不同的时刻可能含有不同类型的信号分量，不同的信号分量由于其模糊函数不同，也应该选择不同的核函数，只有当核函数与给定信号分量相匹配时，才会得到高质量的时频分布。但传统的径向高斯核时频分布仍是一种整体算法，它对整个信号只设计了一个核函数，不适于分析长时间序列或特征随时间变化较快的信号，也不适于信号的实时和在线处理。本文对该问题的解决方法是，将长信号通过分段处理，求取每个时段信号的最优核，这样得到的核函数是与该时刻信号特征相匹配的，然后计算出分段信号的时频分布，最后组集所有时间段上的核分布得到原信号的整体时频分布。具体步骤可简述如下。

(1) 在任意时刻  $t$ ，用以  $t$  为中心的窗函数  $h(\tau-t)$  在时间轴上抽取分段信号  $x_p(t) = x(t)h(\tau-t)$ 。

(2) 按照式(3)计算  $x_p(t)$  的模糊函数  $A_p(\tau, \nu)$ 。

(3) 用梯度上升迭代算法式(9)、(10)求最优化

扩展函数  $\sigma_{\text{opt}}(\theta)$ 。

(4) 按照式(6)计算极坐标系中的最优核函数, 再把最优核函数转换到直角坐标系, 得到  $\psi_p(\tau, \psi)$ 。

(5) 对模糊函数和最优核函数的乘积做二维傅里叶变换, 计算出分段信号  $x_p(t)$  的时频分布。

(6) 移动窗函数, 重复上述过程。

(7) 组集所有时间段的上的核分布, 就得到原信号  $x(t)$  的时频分布。

为使观测数据  $x(t)$  的信息得到更充分的利用, 滑动窗长取法如下: 设  $x(t)$  的采样点数为  $N$ , 把前  $K$  个观测数据点作为第一个滑窗, 然后, 从第  $K+1(L \leq K)$  个数据起取  $K$  个数据作为第二个滑窗, 再从第  $2L+1$  个数据起取  $K$  个数据作为第三个滑窗, 依次类推, 这样共得到  $L \lfloor (N-K)/L \rfloor + 1$  个滑窗, 式中  $L \lfloor \cdot \rfloor$  表示对一个数取整数。

## 2 时频脊线提取

在时频聚集性较高的时频面上, 信号的能量幅值随时间而变化, 在时频图像中的时间点上作“切片”处理能够获得信号能量在瞬时频率附近的分布。可以把时频图像中瞬时频率分布点的局部极值点求解过程, 看作是以时间为走向的时频山脉脊线的提取过程, 脊线所在的位置信息正好对应着信号瞬时频率的变化情况<sup>[1]</sup>。由于信号是由几个主要的分量叠加而成的, 一般来说每个信号分量都对应着一条比较突出的脊线, 各个信号分量频率的主要参数均可以从各自对应的脊线信息中提取出来。下面就时频脊线提取的具体过程作以下陈述。

### 2.1 平滑处理

假设信号的时频分布图为一个  $M \times N$  矩阵, 其幅值为  $f(i, j)$  ( $j \in [1, M], j \in [1, N]$ ), 采用 Gaussian 算子对时频图像  $f(i, j)$  进行平滑处理。Gaussian 算子为

$$G(i, j) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{i^2 + j^2}{2\sigma^2}\right) \quad (11)$$

平滑过程可以通过调整参数  $\sigma$  来进行控制。对图像进行平滑处理就是把原始图像同 Gaussian 函数进行卷积运算, 即

$$L(i, j) = G(i, j) * f(i, j) \quad (12)$$

式中  $L(i, j)$  为卷积后的图像。

### 2.2 脊线提取

图像的脊线特征是有一定取向的, 为了更好地提取图像的脊线特征, 希望所有的算子无方向性, 并且具有旋转、平移不变性。二维 Lablacian 算子能

够很好地满足这些条件。定义  $w$  为时频图像  $L(i, j)$  的梯度, 它的大小为梯度的模, 方向为梯度变化最大的方向<sup>[4]</sup>, 即

$$\|w\| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \quad \theta_w = \arctan(L_y / L_x) \quad (13)$$

式中  $L_x$  与  $L_y$  分别为图像在  $x, y$  方向上的一阶导数, 对于数字图像, 可以用一阶差分代替一阶导数

$$L_x = f(x, y) - f(x-1, y) \quad (14)$$

$$L_y = f(x, y) - f(x, y-1) \quad (15)$$

在图像脊线两边时,  $w$  的方向始终是指向脊的, 而该点位于脊线上时, 它的方向是沿着脊线方向的, 定义与  $w$  方向垂直的矢量  $v$ , 即

$$\|v\| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \quad \theta_v = \arctan(-L_x / L_y) \quad (16)$$

对于脊线上的点,  $v$  的方向是垂直于脊的, 如图 1 所示。

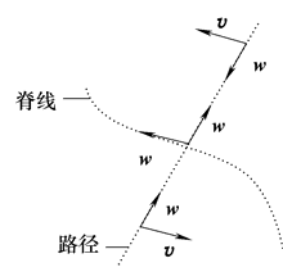


图 1  $w, v$  方向与图像脊线的关系图

根据以上特点可知, 当  $v$  在脊上时, 它的方向变化最大, 它的二阶导数  $L_v$  将有相对比较大幅值出现。因此, 只要选取合适的阈值, 就能够提取出图像的脊特征。 $v$  的 Laplacian 二阶导数的运算式<sup>[5]</sup>为

$$L_v = \frac{1}{\|v\|^2} (v \cdot \nabla)^2 L = \frac{L_y^2 L_{xx} - 2L_x L_y L_{xy} + L_x^2 L_{yy}}{L_x^2 + L_y^2} \quad (17)$$

对于具有明显脊线特征的时频分布图像, 在选取合适的平滑尺度  $\sigma$  和  $L_v$  阈值的情况下, 用上述算法对图像做脊线特征提取, 可以很好地提取出时频图像的脊线。提取出来的图像脊线, 有时会有一定的宽度, 为了便于 Hough 变换, 需要对它们进行细化, 相当于提取出脊的中心线。

### 2.3 能量占优准则

在实际运算中, 发现上述所形成的脊线图中存在很短或很长的脊线, 但其脊线上的能量很弱, 这有可能是由于噪声所引起的, 并非所要提取的脊线, 需要剔除掉<sup>[1]</sup>。因此, 可在上述所提取的脊线图的基础上, 计算每条脊线所具有的能量, 然后根据阈

值准则，保留能量占优的脊线，剔除掉能量不占优的脊线，得到最终所需的脊线图。

### 3 Hough 变换实现信号分量瞬时频率特征的自动提取

时频脊线往往表现为时频面上的各种线条，包括直线、椭圆弧、抛物线、正弦曲线等，表征信号频率变化的各种模式。经上述时频脊线的提取后，信号分量的瞬时频率特征提取工作转变成时频面上特征曲线参数的确定过程。将 Hough 变换进行扩展，可提取出各种参数曲线，实现信号分量瞬时频率参数的自动检测。

Hough 变换的基本思想是，将曲线从图像空间映射到以参数为坐标的参数空间中，根据参数空间中的一些特征反过来确定曲线的参数值，实现图像空间中各种曲线的确定性描述<sup>[6]</sup>。Hough 变换的主要优点在于具有较强的抗干扰能力，对被检测图像的噪声不敏感，允许待检测的边界曲线不连续，便于并行处理。平面中任意一条直线可以用两个参数  $\rho$  和  $\theta$  完全确定下来，即

$$\rho = x \cos \theta + y \sin \theta = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \left( \theta + \arctan \frac{x}{y} \right) \tag{18}$$

式中  $\rho$  是原点到该点的距离， $\theta$  是原点到该直线的垂线与  $x$  轴的夹角。采用极坐标方程而不用直角坐标方程可以避免出现垂直线斜率无限大的问题。将直角坐标系的原点设在图像的中心，对图像的每一点，统计出通过该点的直线对应的参数( $\rho, \theta$ )，图像中的直线通过的点越多，这些直线对应参数统计值就越大，找出最大的统计值对应的参数( $\rho, \theta$ )就是图像中的直线。

前面只讨论了直线的情况，但是，Hough 变换适用于检测任何形状如  $g(\mathbf{v}, \mathbf{c}) = 0$  的方程所代表的线条。这里  $\mathbf{v}$  是一个表示坐标的矢量，而  $\mathbf{c}$  为表示参数的矢量。例如正弦曲线  $y = A \sin(\omega x - \varphi) + y_0$  上的点就可以用上面的方法来检测。这里需要检测出 4 个参数 ( $A, \omega, \varphi, y_0$ ) 并构成 4 维的参数空间，在该参数空间中，积累单元为 4 维立体结构，相应的积累函数具有  $C(i, j, k, l)$  的形式。在变换过程中，不断增加  $A, \omega, \varphi$ ，通过解方程求出相应的  $y_0$ ，并将相应积累单元中的累计函数增加 1。显然 Hough 变换复杂程度在很大程度上依赖于曲线表示式中的坐标及参数数目。基于这一点，可对正弦曲线的检测采用文献[7]的简化算法，即先采用投票机制确定

正弦曲线的基线位置，然后采用 Hough 变换提取该位置所对应的正弦曲线的其他参数。

### 4 仿真信号分析

为验证上述方法的有效性，下面给出了仿真分析实例。图 2 中的信号由从左到右的两个线性调频信号、两个脉冲信号，一个正弦调频信号相叠加的多分量信号  $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$  (式(19))再加上高斯白噪声组合而成

$$\begin{cases} x_1(t) = \sin(2\pi(300 + 250t)t) + \sin(2\pi(150 + 250t)t) & 0 \leq t \leq 1 \text{ s} \\ x_2(t) = \exp\left(-\frac{(t-0.1)^2}{9 \times 10^5}\right) \cos(\pi t(t+1000)) + \exp\left(-\frac{(t-0.2)^2}{9 \times 10^5}\right) \cos(\pi t(t+1000)) \\ x_3(t) = 2 \sin(200\pi t + 20 \sin(10\pi t)) & 1.3 \text{ s} \leq t \leq 2.3 \text{ s} \end{cases} \tag{19}$$

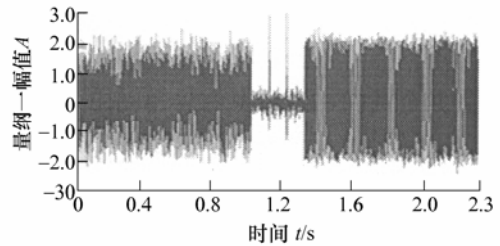


图 2 信号  $x(t)$  的时域图

采用本文提出的加窗自适应核函数的时频分析法得到的  $x(t)$  的时频谱图如图 3 所示，信号的自项清晰可见，且无交叉干扰项。对时频分布图平滑后进行脊线提取并细化处理后得到图 4。再采用 Hough 变化进行直线检测的结果为式(20)中的  $I_{f_1}$ 、 $I_{f_2}$ 、 $I_{f_3}$ 、 $I_{f_4}$ ，正弦检测的结果为  $I_{f_5}$ 。从式(19)与式(20)的比较可以看出，瞬时频率特征的提取精度较高。

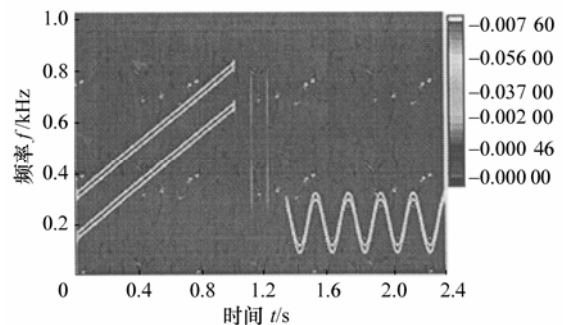


图 3 信号  $x(t)$  的加窗自适应核时频分布图

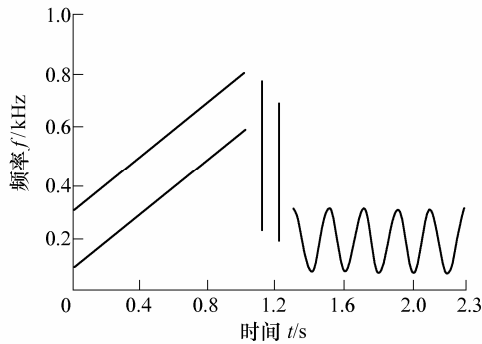


图 4 Hough 变换识别出的线段条重绘后的图像

$$\begin{cases} If_1 : 300.58 + 254.84t & 0 \text{ s} \leq t \leq 1 \text{ s} \\ If_2 : 148.92 + 153.67t & 0 \text{ s} \leq t \leq 1 \text{ s} \\ If_3 : t = 1.1 \text{ s} & 256 \text{ Hz} \leq f \leq 729 \text{ Hz} \\ If_4 : t = 1.2 \text{ s} & 209 \text{ Hz} \leq f \leq 675 \text{ Hz} \\ If_5 = 201.73 + 200.91 \cos(10\pi t) & 1.3 \text{ s} \leq t \leq 2.3 \text{ s} \end{cases} \quad (20)$$

## 5 应用

一般齿轮箱产生故障时,其振动信号除存在幅值调制外,还存在频率调制现象。当齿轮故障很严重时,啮合频率的变化在一定程度上被幅值变化淹没,采用常规边带识别或滤波解调方法就可从幅值解调的角度进行正确的故障诊断。而对早期齿轮故障,频率调制比幅值调制明显,从频率变化角度进行诊断,效果更好,特别是在多故障源调制或调制频带交叠的情况下,边带呈非对称分布,边带识别或常规滤波解调方法就都显得无能为力了,这时瞬时频率特征提取方法就发挥出其独特的优势。

图 5 给出了一台汽车齿轮箱故障诊断的实例。该齿轮箱由两对齿轮副构成,齿轮 1 与齿轮 2 的啮合频率为 490 Hz,齿轮 3 与齿轮 4 的啮合频率为 265.8 Hz,齿轮 1 安装在轴 I 上,旋转频率  $f_1=20.4$  Hz,齿轮 2 和齿轮 3 安装在轴 II 上  $f_{II}=14$  Hz,齿轮 4 安装在轴 III 上  $f_{III}=7.2$  Hz。齿轮振动信号的测点选在轴 I 的轴承座上,采样频率为 5 kHz,图 5(下)为加速度计采集得到的时域信号。为去除高次谐波的影响,模拟滤波器上限截止频率为 1 kHz,从它的频谱图 5(左)中可见,以齿轮副 1-2 的啮合振动的倍频 531.5 Hz 和齿轮副 3-4 的啮合频率 490.3 Hz 为中心的调制频带非常突出,但边频成分非常复杂,是调幅效应和调频效应综合作用的结果,两个调制频带相互交叠。这就给常规滤波解调的诊断方法造成了很大障碍。采用本文中的分段自适应核时频分析方法得到的齿轮箱振动信号的时频分布如图 5(右)

所示,从中可观察到明显的频率调制现象,在时间方向上可清晰地看到在 490 Hz 和 530 Hz 左右的位置上,瞬时频率曲线随时间有规律地波动。经过时频脊线提取和 Hough 变换,检测出上下两条正弦线(周期分别用  $T_1$  和  $T_2$  表示;幅值分别用  $A_1$  和  $A_2$  表示),经检测  $T_1 \approx T_2 \approx 0.071$  s,它代表调制频率的大小  $f=14$  Hz;代表频率调制程度的幅值  $A_1$  约为 24.6 Hz,幅值  $A_2$  约为 13.2 Hz,说明故障较严重。调制频率的大小与齿轮箱轴 II 的频率相吻合,表明齿轮振动受到轴 II 旋转频率的调制,即故障出现在轴 II 的齿轮上。拆箱后经查证,齿轮 2 的齿面有一凹坑存在,与诊断结果相符。

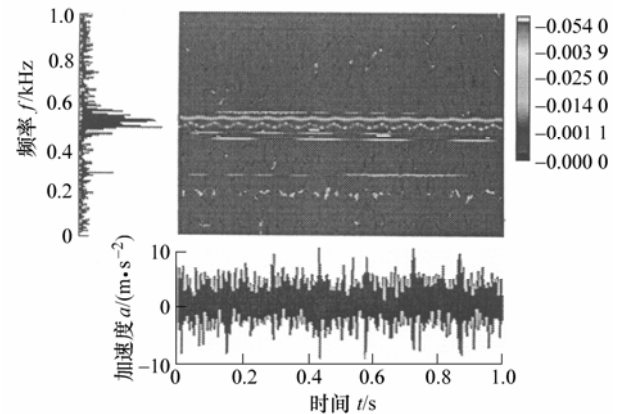


图 5 齿轮信号的时频分析图

## 6 结论

(1) 从理论和试验上论证了利用时频脊线和 Hough 变换能够对瞬时频率进行自动提取,为精确提取故障信号的瞬时频率特征,提供了一种简便可行的新方法,是对传统瞬时频率估计技术的有力补充。

(2) 分段组集自适应核时频分布,对交叉项的抑制效果较好,其时频分辨率比传统的时频分布也得到了很大提高。基于时频脊线的瞬频提取方法对分析多分量时变机械振动信号,特别是对识别频带交叠的多分量瞬时频率有其独特的优势。本文将该方法用于复杂齿轮传动机构的故障诊断,试验证明,它比传统的滤波解调方法识别齿轮故障更具适用性,具有较好的应用前景和实用价值。

(3) 引入 Hough 变换自动检测时频面中的瞬时频率曲线,可对信号的瞬时频率局部特征进行自动定量描述。但需要指出的是,对于非常复杂的瞬频变化曲线, Hough 变换检测存在一定的局限性,关于这一点,可尝试采用分段检测的方法进行进一步的研究探索。

## 参 考 文 献

- [1] CARMONA R A, HWANG W L, TORRESANI B. Multiridge detection and time-frequency reconstruction[J]. IEEE Transactions Signal Processing, 1999, 47(2): 480-492.
- [2] BARANIUK R G, JONES D L. Signal-dependent time-frequency analysis using a radically Gaussian kernel[J]. Signal Processing, 1993,32(3): 263-284.
- [3] BARANIUK R G, JONES D L. A signal-dependent time-frequency representation: optimal kernel design[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(4): 1 589-1 602.
- [4] VAN DEN ELSEN P A, ANTOINE MAINTZ J B, EVERTJAN D P, et al. Image fusion using geometrical features[J]. Visualization in Biomedical Computing, 1992, 18(8): 172-185.
- [5] RUAN Q Q. Digital image processing[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2001.
- [6] XU L, OJA E. Randomized Hough transform: basic mechanism, algorithm, and computational complexities[J]. CVGIP: Image Understanding, 1993, 57(2): 131-154.
- [7] 邹长春, 史譔. 一类正弦曲线的 hough 变换快速检测方法[J]. 计算机工程与应用, 2002, 4(1): 1-3.
- ZOU Changchun, SHI Ge. A fast approach to detect a kind of sinusoidal curves using hough transform[J]. Computer Engineering and Applications, 2002, 4(1): 1-3.

---

作者简介: 柏林, 男, 1972年出生, 博士, 副教授。研究方向为虚拟仪器与信号处理, 获国家、省部级奖4项, 发表论文20余篇。

E-mail: bolin0001@yahoo.com.cn