

关于重新建立空间机构自由度计算公式的探索

欧阳富 刘彦华 孙东民

(北华大学交通建筑工程学院 吉林 132011)

摘要: 从四杆机构具有灵活性和平面机构任意封闭图形具有 3 个约束的理论出发, 对机构学的自由度计算公式重新进行了研究。研究表明: 只要对平面、球面机构自由度的计算公式稍加变化, 就可得到空间机构求自由度的新公式, 利用这个新公式, 既可以求空间机构的自由度, 又可以求平面、多环、空间开式链、混合链等机构的自由度。比传统公式使用方便, 在形式和内容上都有实际意义, 从而为空间机构自由度的计算提供了可靠的理论计算式。

关键词: 空间机构 自由度 约束数 封闭环数

中图分类号: TH112

0 前言

关于空间机构自由度计算公式的研究, 从国内发表的论文来看不是很多, 国际上 Hunt、Daffy、Fichter 和 Tesser 等经常发表文章, 对机构学空间机构的分类做了很好的研究, 具有理论指导意义, 并覆盖了多足步行机、多指灵活手机、多臂机器人的领域。但对空间机构杆件运动的本质规律还缺乏研究。为此, 国内各种教材、设计手册中关于空间机构自由度计算公式多达 34 个, 有的公式在计算中还要计算公共约束数 m , 使用起来很不方便。有的公式求空间机构自由度经常出现错误。为此, 作者从新的视野出发, 研究了平面机构求自由度的公式结构, 在此基础上又扩展到空间机构求自由度的计算公式, 通过运动副总自由度数, 多余自由度、约束数、环数四个概念, 找到了解决构件运动的本质规律, 从而使空间机构自由度的计算十分方便、可靠。

1 对空间机构自由度计算公式的回顾

众所周知, 传统的空间机构自由度计算公式有 34 个, 限于篇幅, 这里只列举了俄罗斯科学院院士陀勃罗伏尔斯基在 1943 年建立的空间机构单封闭环自由度计算式^[4,6]

$$W = (6 - m)n - \sum_{k=m+1}^{k=5} (k - m)P_k \quad (1)$$

式中 W ——机构的自由度

m ——机构各构件在运动时所受到的公共约束数(m 的取值可依次取 0、1、2、3

及 4)

n ——机构的活动构件数

P_k ——机构的 k 类运动副的数量

k ——机构运动副的配合级别, 由运动副所产生的约束数来决定, 其数值相应为

$$k = 5, 4, 3, 2, 1$$

空间机构不含公共约束的自由度计算式, 是由俄罗斯的索莫夫和马雷歇夫两教授提出的, 其表示式为^[3,6]

$$W = 6(n - 1) - 5P_1 - 4P_2 - 3P_3 - 2P_4 - P_5 \quad (2)$$

式中 $n - 1$ ——可动构件数

$P_1 \sim P_5$ ——I~V 级运动副的数目

后面的对比计算将用到这两个公式。

2 重新建立空间机构自由度计算公式的理由

传统的空间机构自由度计算公式太多, 计算过程复杂。由于空间机构很难形象化, 它不象平面机构那样可以表达平面机构的一切真实运动。为此, 许多学者提出了很多的计算公式。诸如: 在文献[1]中第 37~38 页上就有 10 个计算式, 在文献[2]中第 56~61 页就有 6 个, 在文献[4]中第 18 篇 4 页~18 篇 6 页上有 2 个, 在文献[9]中第 8~15 页上有 2 个, 其他文献上有 14 个, 共计 34 个空间机构自由度计算式。在利用这些计算公式时需要计算公共约束数 m 和其他一些参数。有的还需列出专门的图表, 以供查阅。总之计算项数多而复杂, 很不方便。

传统的空间机构自由度计算公式适用范围窄且常出错误。利用式(2)计算图 1 所示空间机构的自由度, 得到

$$W = 6(n-1) - 5P_1 - 4P_2 - 3P_3 - 2P_4 - 1P_5 = 6 \times 5 - 5 \times 5 - 4 \times 1 - 3 \times 1 = -2$$

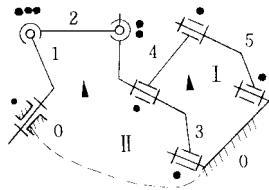


图 1 RSS R-4R 空间机构

利用式(1)计算图 1 所示的空间机构自由度为

$$W = (6-m)n - \sum_{k=m+1}^{k=5} (k-m)P_k = (6-3) \times 5 - [(5-3) \times 5 + (4-3) \times 1 + (3-3) \times 1] = 15 - 11 = 4$$

由此可见，直接利用两个公式得到的两个结果都是不正确。为此，有的在式(1)后又附加几项。见文献[4]中第 18 篇 6 页的公式。由于式(1)只适用于单封闭环，所以其结果等于 4 显然是错误。而应用我们建立的式(3)计算图 1 所示机构的自由度得 $W = P_z - \lambda - 3N = 10 - 3 - 3 \times 2 = 1$ ，这个计算结果是正确的。

3 重新建立空间机构自由度新公式应遵循的几个原则

3.1 多余自由度的等值涵盖原则

在重新建立空间机构自由度计算公式时，用多余自由度这个等值概念去涵盖传统的虚约束多余自由度、滚轮局部多余自由度、移动副 P 的刚化多余自由度和新提出的结构多余自由度、级别配合多余自由度，从而给空间机构自由度的计算赋予了新的内涵，使空间机构自由度的计算，抓到了问题的实质，找到了解决问题的办法，从而避免和减少了有关空间机构自由度计算一些不必要的旧概念。也就是说，在原平面机构自由度计算式中，再减去多余自由度 λ 这一项，就得到了空间机构求自由度的新公式，其表示式为

$$W = P_z - \lambda - 3N \tag{3}$$

式中 W ——空间机构的自由度

P_z ——空间机构运动副自由度总数

λ ——空间机构运动副的多余自由度数目

3——空间机构每个封闭环的约束数，或者说它是独立位移方程数及条件约束数

N ——空间机构的封闭环数(在图上用黑三角形表示)

3.2 多余自由度的弥补原则

在空间机构中，由于轴线的倾斜，势必造成倾斜轴上倾斜安装的圆盘在回转中发生位移变化，由于这种位移变化要求空间机构有多余的自由度来随之转动或移动，以弥补两轴彼此之间因倾斜交错造成的位移变化和空间机构在不同平面上运动质点的位移变化。如果没有这种级别配合多余自由度运动副来调节，空间机构的运动可能卡死不动。这就失去了空间机构设计的目的。所以说多余自由度，在空间机构设计中决不是多余的，而是必须的。

3.3 自由度级别配合点化原则

由于可以将空间机构平面表示或等值球面 $4R$ 表示^[1]，加上运动副配合级别自由度点化原则，就可以很快求出空间机构的自由度。例如，空间 $RCCC$ 四杆机构，根据点化原则，可知转动副 R 上面有一个黑点(表示一个转动副，就是一个自由度)，圆柱副 C 上面有 2 个黑点，就是 2 个自由度。所以 $RCCC$ 机构就变成了 $\dot{R}\ddot{C}\ddot{C}$ ，其自由度 $W = P_z - \lambda - 3N = 7 - 3 - 3 \times 1 = 7 - 6 = 1$ 。这样，空间机构的球销副 S' 记为 \dot{S}' 、虎克铰 T 记为 \ddot{T} 、圆柱副 C 记为 \ddot{C} 、平面副 E 记为 \ddot{E} 、球面副 S 记为 \ddot{S} 、移动副 P 记为 \dot{P} 、螺旋副 H 记为 \dot{H} ，空间机构中的高副也记为 2 个黑点。又例如 $\dot{R}\ddot{C}\dot{R}\ddot{C}\dot{R}$ 空间机构，点化为单自由度后，从标记上得知两个圆柱副 C 有 2 个多余自由度(即 $\lambda=2$)，故该空间机构的自由度 $W = P_z - \lambda - 3N = 7 - 2 - 3 \times 1 = 2$ 。这样，用式(3)计算了文献[1]表 3-1~表 3-4 的 100 多个空间机构的自由度都是正确的。

3.4 新公式的简化原则

在传统的空间机构自由度计算公式中，最麻烦的就是要确定空间机构的公共约束数，用式(1)计算空间机构的自由度，关键在于判断独立的约束条件数 m ，通过写运动方程式，用系数矩阵的秩来计算公共约束数的方法来判断，这项工作很复杂。用式(3)计算空间机构的自由度就可替代原来的 34 个计算公式。取消原来的公共约束数 m 、消极约束、消极自由度、过约束、虚约束、多余约束、约束总数、作图定位法求自由度^[4,7,8]、封闭环割断机架法求自由度等概念，从而简化了计算过程，提高了计算的可靠性。

4 使用新公式计算空间机构自由度时要注意的几点

4.1 五杆或五杆以上球面机构不允许出现相对移动
由于移动副 P 的两构件之间的相对移动在五杆

或五杆以上球面机构或等值球面机构里是不允许的^[1], 所以空间机构中移动副应被约束刚化成不能运动的杆件。这个结论只适用于五杆以上(含五杆)空间机构自由度的计算, 对于空间四杆机构, 移动副 P 的自由度可以计算在自由度总数之内, 例如 $PCCC$ 四杆机构的自由度 $W = P_z - \lambda - 3N = 7 - 3 - 3 \times 1 = 1$, 其中 3 个圆柱副 C 就有三个多余自由度。

4.2 空间机构与平面机构的联系与区别

众所周知, 平面机构的平行轴如果制造误差过大, 机构就不能转动。否则, 这“刚化”的连杆机构就会弯曲和扭曲, 在轴承中产生载荷, 如果这些平行轴承与轴采用动配合, 构件又较长, 补偿构件销轴之间微小不平行的方法是采用球面轴承, 允许三维转动, 这样的平面机构就成了低度的空间机构。所以说平面机构、球面机构是空间机构的特例。虽然空间机构可以表示为平面图形和等值的 $4R$ 球面机构。但不能任意应用平面几何公式求解各种角度。例如平面三杆机构的自由度 $W = 0$, 而空间三杆机构的自由度 $W = 1$, 所以在计算空间机构自由度时, 要注意平面机构与空间机构的联系与区别。

4.3 合理应用空间机构的对称性

在判断空间机构由对称性的构件和零件构成时, 在不影响运动的传递时, 去掉 1 个对称零件或一组对称结构, 空间机构就可以顺利求解。对于万向节十字轴, 要注意十字轴 4 个铰链轴线交于一点, 十字轴有两个平面方程, 两平面方程的交线确定一个铰链的原则。

5 用新旧公式求空间机构自由度的应用举例

例 1: 求图 1 所示的 $RSS'R-4R$ 空间机构自由度。

(1) 用式(3)求图 1 所示 $RSS'R-4R$ 空间机构的自由度^[2,7]

从图上一目了然地看到该机构运动副总自由度 $P_z = 10$ (10 个黑点), 从图上又看到空间机构的多余自由度在 SS' 上共有 3 个, 即 $\lambda = 3$, 将机架 0-0 用虚线连起来(即封闭起来), 得到两个封闭环(0-1-2-3-0 和 0-3-4-5-0), 说明 $N = 2$, 代入式(3), 得 $W = P_z - \lambda - 3N = 10 - 3 - 3 \times 2 = 7 - 6 = 1$ 。说明用式(3)计算图 1 所示空间机构的自由度比用传统公式计算方便、快捷。

(2) 用传统公式(或称旧公式)求图 1 所示 $RSS'R-4R$ 空间机构的自由度

由图 1 可知, 该机构有两个封闭环, 即 0-1-2-3-0 构成的单封闭环, $\lambda_1^* = 6$; 由 0-3-4-5-0 构成的 $4R$ 单封闭环, 封闭环约束数 $\lambda_{II}^* = 6 - m = 6 - 3 = 3$; 所以

$$W = P_1 + 2P_2 + 3P_3 - \sum (\lambda_1^* + \lambda_{II}^*) = 5 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 1 - (6 + 3) = 1$$

式中 λ_1^* ——封闭环 I 约束的条件数

λ_{II}^* ——封闭环 II 的约束条件数

(3) 用传统公式(1)计算图 1 所示 $RSS'R-4R$ 空间机构的自由度, $n = N - 1$ (式中 N 为含机架在内的杆件数)。

$$W = (6 - m)n - \sum_{k=m+1}^{k=5} (k - m)P_k = (6 - 3) \times 5 - [(5 - 3) \times 5 + (4 - 3) \times 1 + (3 - 3) \times 1] = 15 - 11 = 4$$

用传统公式(1)计算图 1 的自由度, 显然是不正确的。

图 1 也可按单环用新公式(3)计算, 然后相加。

$$\text{I 环: } W = P_z - 0 - 3N = 4 - 3 \times 1 = 1$$

$$\text{II 环: } W = P_z - \lambda - 3N = 8 - 5 - 3N = 0$$

所以 I + II 的 $W = 1 + 0 = 1$

$\lambda = 5$ 是考虑 I 环 2 个重复使用自由度及 SS' 三个多余自由度。

例 2: 计算图 2 所示的 $RSSR$ 空间机构的自由度。

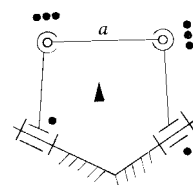


图 2 $RSSR$ 空间机构

(1) 用式(3)求解图 2 所示空间机构的自由度

由图 2 知, 该空间机构运动副总自由度数取 P_z , 只有一个封闭环, 即 $N = 1$, 化为平面四杆机构求自由度, 2 个球面副共有 4 个多余约束(即 $\lambda = 4$), 然而其中一个自由度使连杆绕其自身轴 a 转动, 这种机构可以当作 $R\ddot{S}TR$ 机构分析, 其中 T 是虎克铰, 有 2 个自由度。转化成单自由度运动副为 $\dot{R}\ddot{R}\ddot{R}\dot{R}\ddot{R}\dot{R}$ 。故该空间 $7R$ 机构的自由度为

$$W = P_z - \lambda - 3N = 7 - 3 - 3 \times 1 = 7 - 6 = 1$$

(2) 用传统式(1)求解 $RSSR$ 空间机构的自由度^[4]

$$W = (6 - m)n - \sum_{k=m+1}^{k=5} (k - m)P_k = (6 - 0) \times 3 - [(5 - 0) \times 2 + (3 - 0) \times 2] = 18 - 16 = 2$$

考虑图 2 的 2 个球面副(S)，有一局部多余自由度(补缺自由度使两球面副的连杆自转)，应将其减去。故该机构的实际自由度为

$$W_a = W - 1 = 2 - 1 = 1$$

若 m 开始不知道，还要计算公共约束数 m ，计算 m 还要采用断开封闭环末杆的办法。此项工作确实感到很麻烦，不然就要列出专门可供这种机构查阅 m 的图表和数据。

例 3：计算如图 3 所示曲柄滑块机构的自由度。

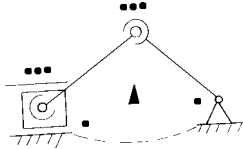


图 3 RSSP 曲柄滑块机构

用式(3)计算图 3 空间曲柄滑块机构 RSSP 的自由度，已知 RSSP 机构的 $P_z = 8$ 、 $N = 1$ 、 $\lambda = 3$ ，将其带入式(3)得

$$W = P_z - \lambda - 3N = 8 - 3 - 3 \times 1 = 5 - 3 = 2$$

为什么多余自由度 $\lambda = 3$ ，是因两球面副的四个多余自由度中，要抽掉一个自由度，使连接两球面副的连杆绕本身轴转动，此时用四杆机构去计算时，多余自由度 $\lambda = (4-1) = 3$ ，机构才能确保空间运动。

(1) 用传统公式计算图 3 空间曲柄滑块四杆机构 RSSP 的自由度

查机械设计手册，已知公共约束数 $m = 0$ ，用传统公式(1)、(2)求解

$$W = (6 - m)n - \sum_{k=m+1}^{k=5} (k - m)P_k = (6-0) \times 3 - [(5-0) \times 2 + (3-0) \times 2] = 2$$

或用

$$W = 6 \times (n - 1) - 5P_1 - 4P_2 - 3P_3 - 2P_4 - P_5 = 6(4 - 1) - 5 \times 2 - 3 \times 2 = 18 - 10 - 6 = 2$$

很显然用传统公式(1)比用新公式(3)计算麻烦。图 3 是空间四杆机构，不属于空间机构四组中的任何一个机构，不存在刚化问题。

例 4：用新公式求解所有 R、P、C 单自由度单环空间等值球面机构的自由度。

由于 Duffy 将所有 R、P、C 单自由度单环空间机构按其等值球面机构的自由度分为四组，共有 100 多个空间等值球面机构，现将四组 16 个空间等值球面机构用式(3)计算其自由度，见下表。

表 用式(3)计算四组空间机构自由度

第一组空间机构	P_z	λ	N	$W = P_z - \lambda - 3N$
(1) 4 杆机构 RCCC	7	3	1	$W = 7 - 3 - 3 \times 1 = 1$
(2) 5 杆机构 RCPCR	7	3	1	$W = 7 - 3 - 3 \times 1 = 1$
(3) 7 杆机构 RRPPRR	7	3	1	$W = 7 - 3 - 3 \times 1 = 1$
第二组空间机构				
(1) 5 杆机构 RCRCR	7	2	1	$W = 7 - 2 - 3 \times 1 = 2$
5 杆机构 RCRCP	7	3	1	$W = 7 - 3 - 3 \times 1 = 1$
(2) 6 杆机构 RRRPCR	7	2	1	$W = 7 - 2 - 3 \times 1 = 2$
6 杆机构 RRRPCP	7	3	1	$W = 7 - 3 - 3 \times 1 = 1$
(3) 7 杆机构 RRPRRR	7	2	1	$W = 7 - 2 - 3 \times 1 = 2$
7 杆机构 RRPRRP	7	3	1	$W = 7 - 3 - 3 \times 1 = 1$
第三组空间机构				
(1) 6 杆机构 RRRRCR	7	1	1	$W = 7 - 1 - 3 \times 1 = 3$
6 杆机构 RRRRCP	7	2	1	$W = 7 - 2 - 3 \times 1 = 2$
(2) 7 杆机构 RRRPRRR	7	1	1	$W = 7 - 1 - 3 \times 1 = 3$
7 杆机构 RRRPRRP	7	2	1	$W = 7 - 2 - 3 \times 1 = 2$
第四组空间机构				
(1) 7 杆机构 RRRRRRR	7	0	1	$W = 7 - 0 - 3 \times 1 = 4$
7 杆机构 RRRRRRP	7	1	1	$W = 7 - 1 - 3 \times 1 = 3$

6 结论

(1) 通过对空间机构自由度计算公式的研究，证明新公式计算速度快、效率高。

(2) 通过对空间机构自由度计算公式的研究，首次发现运动副自由度的总数 P_z ，多余自由度 λ ，环数 N 及约束数四个参数是构成公式最主要的技术参数，也是解决空间机构自由度计算公式的关键参数。

(3) 通过对空间机构自由度计算公式的研究，首次发现将刚化多余自由度、虚约束多余自由度，级别多余自由度、结构多余自由度和滚轮局部多余自由度数，统称为多余自由度的概念是有益的，也是正确的。

(4) 通过对空间机构自由度的研究，将移动副运用于五杆以上(含五杆)球面机构是不允许的，必须将移动副自由度刚化，首次发现这一说法不仅适用于单环空间机构，而且也适用于多环空间机构及等值球面机构。

(5) 通过对空间机构自由度计算公式的研究，首次提出级别多余自由度和结构多余自由度的两个新概念，由于这两个新概念的引入，才使空间机构自由度的计算有了可靠的依据。

(6) 通过对空间机构自由度计算公式的研究，首次提出不计算公共约束数的概念，这给计算空间机构自由度带来了极大的方便性和简捷性。

(7) 通过对空间机构自由度计算公式的研究，发现式(3)不仅适用于单环空间机构、多环空间机构，而且还适用于开式链空间机构，如机器人、机

，而且还适用于开式链空间机构，如机器人、机械手自由度的计算。

(8) 通过对空间机构自由度的研究，发现传统 34 个有关空间机构自由度的计算公式，每个公式的适用面很窄，只适用单环，由于使用面窄，因此常出现计算错误。

(9) 通过对空间机构自由度的研究，发现用式(3)即可取代传统的 34 个有关空间机构自由度的计算公式，去掉式(3)中的 λ 又可以作为平面机构自由度的计算公式，从而使本公式既具有实际的使用意义，又具有对理论的指导意义。

参 考 文 献

- 1 黄真. 空间机构学. 北京: 北京机械工业出版社, 1991
- 2 傅则绍. 机构设计学. 成都: 成都科技大学出版社, 1988
- 3 李学荣. 四连杆机构综合概论(第一册). 北京: 机械工业出版社, 1985
- 4 机械工程手册编辑委员会, 西安交通大学. 机构选型与运动设计(第 18 篇). 北京: 机械工业出版社, 1979
- 5 [苏]柯热夫尼柯夫 C. H. 机构参考手册. 北京: 机械工业出版社, 1988
- 6 天津大学等六所大学主编. 机械原理(上册). 北京: 人民教育出版社, 1979
- 7 白师贤. 高等机构学. 上海: 上海科学技术出版社, 1988
- 8 徐灏. 机械设计手册(第二卷). 北京: 机械工业出版社, 1998

EXPLORATION ON REBUILDING THE

(上接第 28 页)

- 6 潘峰. 人—车闭环系统驾驶员神经网络综合优化建模: [硕士学位论文]. 吉林: 吉林大学, 2001
- 7 马凤军. 驾驶员模型参数和车辆结构参数的辨识及其对闭环系统性能影响的研究: [博士学位论文]. 吉林: 吉林大学, 2002

PREVIEW OPTIMIZED ARTIFICIAL NEURAL NETWORK DRIVER MODEL

Guo Konghui Pan Feng
(Jilin University)

Ma Fengjun

(No.15 Research Institute, CALT)

CALCULATING FORMULA OF DEGREE OF FREEDOM OF SPACE MECHANISM

Ouyang Fu Liu Yanhua Sun Dongmin
(Beihua University)

Abstract: From the theory that four-connecting rods mechanism has flexibility and any closed graphics of plane mechanism has three restrictions, the calculating formula of degree of freedom of mechanism is researched. The results of research indicate that the calculating formula of degree of freedom of space mechanism will be set up if the calculating formulas of degree of freedom of plane and spherical surface mechanism are changed a little. The new formula could substitute for 29 traditional calculating formulas of degree of freedom of space mechanism. The new formula is suitable for not only space mechanism but also the plane mechanism, the multiple rings space mechanism, the open chain space mechanism and mixed chain space mechanism and so on. Because that the new formula is easier and rapider in use than traditional formulas, it is a reliable theoretical calculating formula for calculating degree of freedom of space mechanism.

Key words: Space mechanism Degree of freedom

Number of restrictions Number of closed rings

作者简介: 欧阳富, 男, 1942 年出生, 教授。主要从事内燃机、起重运输机械的教学, 发表论文 42 篇。

Abstract: A preview optimized artificial neural network (POANN) driver model based on the preview-follower theory with considering the driver's target and his physical restriction are studied. Simulation is taken to study the driver's direction control behavior using 2-DOF vehicle models. The simulating results indicate that POANN driver model is a simple controller that represents the regular driver's behavior and can be used to simulate driver-vehicle close loop system and control of intelligent vehicle, such as autonomous driving.

Key words: Preview optimized Artificial neural network

Driver model Close-loop simulation

作者简介: 郭孔辉, 男, 1935 年出生, 吉林大学汽车动态模拟国家重点实验室主任、教授、中国工程院院士。主要研究方向为汽车动态仿真与控制。