

DOI: 10.3901/JME.2009.01.056

# 一般 6-6 型平台并联机构位置正解代数消元法<sup>\*</sup>

黄昔光<sup>1</sup> 廖启征<sup>2</sup> 魏世民<sup>2</sup> 李端玲<sup>2</sup>

(1. 北方工业大学机电工程学院 北京 100041;

2. 北京邮电大学自动化学院 北京 100876)

**摘要:** 提出一种求解一般 6-6 型平台并联机构位置正解的代数消元法。通过变量替换将 9 个约束方程中的 6 个转换为线性方程组, 采用线性消元消去 9 个变量中的 6 个。基于计算机符号计算, 运用计算机代数系统中的分次字典序 Groebner 基算法, 推导出 15 个只含剩余 3 个变量最高次数为 4 次的多项式, 应用推导出的多项式构造 Sylvester 结式, 获得一般 6-6 型平台并联机构位置正解的一元高次方程, 通过分析符号形式方程组变量的次数, 得出该一元高次方程的次数为 20 次且该机构位置正解最多有 40 组解的结论。通过改变单项式的分次字典序, 在理论上阐明存在多个不同的结式都可以获得该机构的位置正解。推导出的 15 个符号形式的多项式可直接用于求解一般 6-6 型平台并联机构位置正解, 从而实现该问题的数学机械化求解。最后给出数字实例, 经反解验证所有解满足原始方程, 且无增根。

**关键词:** 并联机构 运动学正解分析 Sylvester 结式

**中图分类号:** O327 TB122

## Forward Kinematics Analysis of the General 6-6 Platform Parallel Mechanism Based on Algebraic Elimination

HUANG Xiguang<sup>1</sup> LIAO Qizheng<sup>2</sup> WEI Shimin<sup>2</sup> LI Duanlin<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, North China University of Technology, Beijing 100041;

2. School of Automation, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876)

**Abstract:** A new algebraic elimination method for the forward kinematics analysis of the general 6-6 platform parallel mechanism is presented. Six in nine constraint quadratic equations are transformed into linear equations by introducing substitution variables and six in nine variables are eliminated by using Cramer algorithm. The reduced Groebner basis under degree lexicographic ordering for the substitution equations and the remainder closed-form equations are obtained. A univariate equation of higher degree is derived from the determinant of the Sylvester's matrix, constructed by the 4th degree subset of the Groebner basis, the size of which is 15×15. Based on computer symbolic manipulating, it can be concluded that the degree of the univariate polynomial equation is at most 20 and the number of closed-form solutions is at most 40. It is proved theoretically that there are many completely different resultants which can derive all closed-form solutions in terms of different term orderings through changing the degree lexicographic order. The direct kinematics of the general 6-6 Stewart platform can be solved directly by the 15 derived equations. And the mathematical mechanized solution of the problem can be realized. The result is verified by a numerical example, whose solutions agree with the original equations without extraneous roots.

**Key words:** Parallel robot mechanisms Forward kinematics analysis Sylvester resultant

## 0 前言

一般 6-6 型平台并联机构是由上、下平台均为

平面任意六边形, 并通过 6 条两端带球副的移动副联接而成 Stewart 机构。其位置正解最终归结为一组 6 参数的非线性方程组求解, 这个过程极其艰难, 是继空间 6R 串联机械手位移分析完成后的又一机构学难题。在应用中很难给出全部解析解, 如何给出全部解析解以及解决求解实时性是该类机构运动学正解研究的重点<sup>[1]</sup>。目前求解该问题的主要方法

<sup>\*</sup> 国家重点基础研究发展计划(973 计划, 2004CB31800)、国家自然科学基金(50475161, 50705010, 50775012)、国家高技术研究发展计划(863 计划, 2007AA04Z200)和北京市自然科学基金(3053017, 3082014)资助项目。20080107 收到初稿, 20081025 收到修改稿

有数值法、附加传感器法和代数法。数值法求解相对简单，无须求解复杂的高次非线性方程组，文献[2-3]分别运用数值迭代和路径跟踪原理得到了部分位置正解；文献[4]将同伦连续法与齐次化法相结合跟踪了 768 条同伦路径，得到全部 40 组位置正解。附加传感器方法则通过采用必要数量的附加传感器和一定的布置方式来简化位置正解的求解过程，文献[5-6]采用附加传感器的方法求解出单个位置正解。

代数法求解是最复杂的，但也是最基础的。尤其是代数法求解提供无增根的一元高次方程具有很高的理论价值，用它可以进行许多机构学问题的研究。文献[7-8]利用代数法求解了两种结构特殊的 6-6 型平台机构；文献[9]求解了一般 6-6 型平台机构的位置正解，但从符号形式上看，文献[9]构造的 21 阶系数行列式的最高次数与展开行列式后获得的一元高次方程并不一致，导出的一元 20 次方程只是数值计算结果，而非符号运算结果；文献[10]通过构造 15 个中间方程得到了该机构的一元 20 次方程，但没有给出最后关键 9 个中间方程的构造过程，对于 15 个方程是否唯一也没有进行讨论；文献[11]通过求解 11 个封闭方程的字典序 Groebner 基，然后从 43 个基中挑选出 15 个基构造 Sylvester 结式，由于计算效率太低，推导过程只能采用有理数运算，无法进行符号计算，且需要人工参与挑选基，没能实现数学机械化求解。

参考文献[10]的方法，本文提出了一种求解一般 6-6 型平台并联机构位置正解的代数消元法。基于计算机符号运算，利用计算机代数系统中的分次字典序 Groebner 基算法，推导出 15 个可直接用于求解一般 6-6 型平台并联机构位置正解的多项式，实现了该问题的数学机械化求解，获得了该机构位置正解的一元高次方程，通过分析符号形式方程组的变量次数，得出该一元高次方程的次数为 20 次并且该机构位置正解最多有 40 组解的结论。同时，通过改变单项式的分次字典序，在理论上阐明了存在多个不同的结式可以获得该机构的位置正解。最后给出数字实例，经运动学反解验证，所有解满足原始方程，且无增根。

### 1 位置正解的数学建模

下图为一般 6-6 型平台并联机构，上、下平台的 6 个球铰中心分别位于同一个平面中，并由 6 条支链把球铰用滑动副相连。在上、下平台球铰中心平面中任取点  $O_2$ 、 $O_1$  为原点，轴  $z_2$ 、 $z_1$  分别垂直于

上、下平台，分别建立与上、下平台固定连接的动坐标系  $O_2x_2y_2z_2$ 、定坐标系  $O_1x_1y_1z_1$ 。只要能求出动坐标系  $O_2x_2y_2z_2$  到定坐标系  $O_1x_1y_1z_1$  的旋转变换矩阵  $R$  和平移矢量  $P$ ，就可以确定上平台相对下平台的空间位姿。

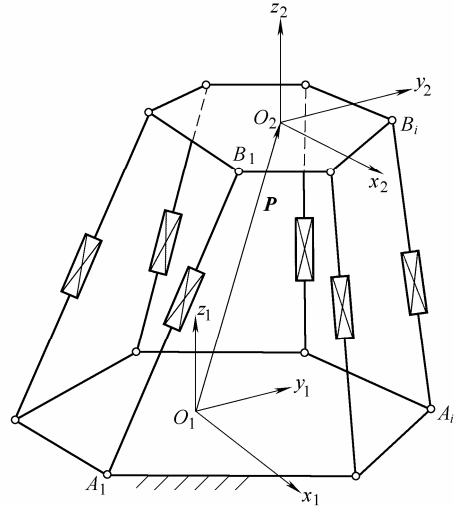


图 一般 6-6 型平台并联机构

设点  $A_i$  在定坐标系  $O_1x_1y_1z_1$  中的坐标为  $Q_{ai}(a_{xi}, a_{yi}, 0)$ ，动坐标系原点  $O_2$  在定坐标系  $O_1x_1y_1z_1$  中的坐标为  $P(x, y, z)$ ，点  $B_i$  在动坐标系  $O_2x_2y_2z_2$  中的坐标为  $Q_{bi}(b_{xi}, b_{yi}, 0)$ ， $A_iB_i$  的长度为  $L_i$ ，动坐标系  $O_2x_2y_2z_2$  到定坐标系  $O_1x_1y_1z_1$  的旋转变换矩阵为

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & r_4 & r_7 \\ r_2 & r_5 & r_8 \\ r_3 & r_6 & r_9 \end{pmatrix}$$

由杆长约束条件有

$$L_i^2 = (RQ_{ib} + P - Q_{ia})^T (RQ_{ib} + P - Q_{ia}) \quad i=1, 2, \dots, 6$$

代入坐标值得

$$(b_{xi}r_1 + b_{yi}r_4 + x - a_{xi})^2 + (b_{xi}r_2 + b_{yi}r_5 + y - a_{yi})^2 + (b_{xi}r_3 + b_{yi}r_6 + z)^2 - L_i^2 = 0 \quad i=1, 2, \dots, 6 \quad (1)$$

由于旋转矩阵  $R$  是单位正交的，有

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - 1 = 0 \quad (2)$$

$$r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

$$r_1r_4 + r_2r_5 + r_3r_6 = 0 \quad (4)$$

$$r_4r_8 - r_5r_7 - r_3 = 0 \quad (5)$$

$$r_2r_7 - r_1r_8 - r_6 = 0 \quad (6)$$

$$r_1r_5 - r_2r_4 - r_9 = 0 \quad (7)$$

式(1)~(7)共含有 12 个未知量  $r_1 \sim r_9$ 、 $x$ 、 $y$  和  $z$ ，式(1)~(4)不包含变量  $r_7 \sim r_9$ 。如果已知  $r_1 \sim r_6$ ，可以由式(5)~(7)非常容易求得  $r_7 \sim r_9$ ，因此，式(1)~(4)是一般 6-6 型平台并联机构位置正解的关键与难点，也是本文研究的目标数学模型，待求变量为  $r_1 \sim$

$r_6$ 、 $x$ 、 $y$  和  $z$  共 9 个。

## 2 数学模型的消元过程

式(1)~(4)为 9 元 2 次非线性多项式方程组,其总次数为  $2^9=512$ ,若直接应用常见的代数消元法,如 Dixon 结式法、Sylvester 结式法、吴方法,都难以得到求解。本文基于计算机符号运算,应用 Cramer 法则消去 9 个变量中的 6 个;利用计算机代数系统中的分次字典序 Groebner 基算法,推导出 15 个只含剩余 3 个变量最高次数为 4 次的多项式,应用推导出的多项式构造 Sylvester 结式,实现了该问题的代数消元求解。

### 2.1 数学模型中 6 个变量的消除

引入 3 个替换变量, 设

$$u = r_1x + r_2y + r_3z \quad (8)$$

$$v = r_4x + r_5y + r_6z \quad (9)$$

$$w = x^2 + y^2 + z^2 \quad (10)$$

将式(8)~(10)代入式(1)有

$$b_{xi}a_{xi}r_1 + b_{xi}a_{yi}r_2 - b_{xi}u + b_{yi}a_{xi}r_4 + b_{yi}a_{yi}r_5 - b_{yi}v + a_{xi}x + a_{yi}y - w/2 + m_i = 0 \quad i=1,2,\dots,6 \quad (11)$$

式中,  $m_i = (L_i^2 + a_{xi}^2 - a_{yi}^2 - b_{xi}^2 - b_{yi}^2)/2$ 。

式(11)是关于变量  $r_1$ 、 $r_2$ 、 $r_4$ 、 $r_5$ 、 $u$ 、 $v$ 、 $x$ 、 $y$ 、 $w$  的线性方程组, 写成矩阵形式

$$M_{6 \times 10}t = 0$$

式中, 矩阵  $M_{6 \times 10}$  的第  $i$  行形式为  $(b_{xi}a_{xi}, b_{xi}a_{yi}, -b_{xi}, b_{yi}a_{xi}, b_{yi}a_{yi}, -b_{yi}, a_{xi}, a_{yi}, -1/2, m_i)$ , 且

$$t = (r_1, r_2, u, r_4, r_5, v, x, y, w, 1)^T$$

将式(11)看成关于变量  $r_1$ 、 $r_2$ 、 $r_4$ 、 $r_5$ 、 $u$ 、 $v$  的线性方程组, 由 Cramer 法则有

$$a_0r_1 + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}w + a_{14} = 0 \quad (12)$$

$$a_0r_2 + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}w + a_{24} = 0 \quad (13)$$

$$a_0u + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}w + a_{34} = 0 \quad (14)$$

$$a_0r_4 + a_{41}x + a_{42}y + a_{43}w + a_{44} = 0 \quad (15)$$

$$a_0r_5 + a_{51}x + a_{52}y + a_{53}w + a_{54} = 0 \quad (16)$$

$$a_0v + a_{61}x + a_{62}y + a_{63}w + a_{64} = 0 \quad (17)$$

式中  $a_0 = \det(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$

$$a_{ij} = \det(c_1, \dots, c_{i-1}, c_{j+6}, c_{i+1}, \dots, c_6)$$

$c_j$ ——矩阵  $M_{6 \times 10}$  的第  $j$  列

由式(12)~(17)可知, 只要求出变量  $x$ 、 $y$ 、 $w$ , 其他 6 个变量很容易得到求解。

### 2.2 基于分次字典序 Groebner 基法构造结式

Groebner 基法的基本思想是在原非线性多项式系统所构成的多项式环内, 通过对变量多项式的适当排序, 求多项式的 S-多项式并进行约简和消元,

最后生成一个与原系统完全等价且便于直接求解的三角化标准基。Bucherberg 算法是构造多项式系统 Groebner 基的一种有效算法, 该算法核心包括排序、生成 S-多项式、约简, 当消元过程中方程组的所有多项式对 S-多项式约简皆为 0 时, 即得到与原方程组等价的 Groebner 基。本文运用计算机代数系统 Mathematica 软件中提供的分次字典序 Groebner 基算法, 即 GroebnerBasis 命令推导出 15 个可直接用于一般 6-6 平台并联机构位置正解的多项式方程, 构造构造 Sylvester 结式。

由式(2)~(4)、(8)~(10)有

$$f_1 = r_3^2 = 1 - r_1^2 - r_2^2 = 1 - a_0^{-2}(A^2 + B^2) \quad (18)$$

$$f_2 = r_6^2 = 1 - r_4^2 - r_5^2 = 1 - a_0^{-2}(D^2 + F^2) \quad (19)$$

$$f_3 = r_3r_6 = -r_1r_4 - r_2r_5 = -a_0^{-2}(AD + BF) \quad (20)$$

$$f_4 = r_3z = u - r_1x - r_2y = a_0^{-1}(-C + Ax + By) \quad (21)$$

$$f_5 = r_6z = v - r_4x - r_5y = a_0^{-1}(-G + Dx + Fy) \quad (22)$$

$$f_6 = z^2 = w - x^2 - y^2 \quad (23)$$

式中  $A = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}w + a_{14}$

$$B = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}w + a_{24}$$

$$C = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}w + a_{34}$$

$$D = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}w + a_{44}$$

$$F = a_{51}x + a_{52}y + a_{53}w + a_{54}$$

$$G = a_{61}x + a_{62}y + a_{63}w + a_{64}$$

由式(18)~(23)左边等式, 有下列关系式

$$p_1 = f_1f_6 - f_4^2 = 0 \quad (24)$$

$$p_2 = f_2f_6 - f_5^2 = 0 \quad (25)$$

$$p_3 = f_3f_6 - f_4f_5 = 0 \quad (26)$$

$$p_4 = f_1f_5 - f_3f_4 = 0 \quad (27)$$

$$p_5 = f_2f_4 - f_3f_5 = 0 \quad (28)$$

$$p_6 = f_1f_2 - f_3^2 = 0 \quad (29)$$

式(24)~(29)中, 变量  $x$ 、 $y$ 、 $w$  的最高次数均不超过 4 次。

此外, 式(24)~(29)也可以通过求解分次字典序 Groebner 基获得, 具体步骤如下。

由式(18)~(23)有

$$h_1 = f_1 - r_3^2$$

$$h_2 = f_2 - r_6^2$$

$$h_3 = f_3 - r_3r_6$$

$$h_4 = f_4 - r_3z$$

$$h_5 = f_5 - r_6z$$

$$h_6 = f_6 - z^2$$

以  $r_3$ 、 $r_6$ 、 $z$  为变量, 应用 GroebnerBasis 命令, 按照单项式的分次字典序排列  $r_3 > r_6 > z$ , 计算式  $h_i(i=1 \sim 6)$  的分次字典序 Groebner 基, 得到 20 组基,

其中与 $f_i$  ( $i=1\sim 6$ )相关的基有6组,即式(24)~(29)。

运用同样的方法可以构造其他9个关系式。将式(18)~(23)中最右边等号的右边部分代入式(24)~(29),但不代入变量 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $F$ 、 $G$ 的值,按照单项式的分次字典序排列 $A > B > C > D > F > G > x > y > w$ 排列,计算式 $p_i$  ( $i=1\sim 6$ )的分次字典序Groebner基,在Intel Pentium IV 2.93 GHz RAM 1 GB的PC机上,耗时仅0.015 s,得到17个基,其中有15个基为 $x$ 、 $y$ 、 $w$ 的4次方程,其他基为5次。由于使用这15个次数较低的基已经可以构造出 $15 \times 15$ 的Sylvester结式,所以把次数高于4次的第16、17个基舍弃。15个基中包括式(24)~(38),其他9个基如下

$$p_7 = C^2D - ACG - a_0^2Dw + B^2Dw - ABFw + BCFx + a_0^2Gx - B^2Gx - 2BCDy + ACFy + ABGy - a_0^2Fxy + a_0^2Dy^2 \quad (30)$$

$$p_8 = -C^2F + BCG + ABDw - A^2Fw + a_0^2Fw - BCDx + 2ACFx - ABGx - a_0^2Fx^2 - aCDy + a^2Gy - a_0^2Gy + a_0^2Dxy \quad (31)$$

$$p_9 = -CDG + AG^2 - a_0^2Aw - BDFw + AF^2w + a_0^2Cx - CF^2x + BFGx + CDFy + BDGy - 2AFGy - a_0^2Bxy + a_0^2Ay^2 \quad (32)$$

$$p_{10} = CFG - BG^2 + a_0^2Bw - BD^2w + ADFw - CDFx + 2BDGx - AFGx - a_0^2Bx^2 - a_0^2Cy + CD^2y - ADGy + a_0^2Axy \quad (33)$$

$$p_{11} = -a_0^2AC - BCDF + ACF^2 - a_0^2DG + B^2DG - ABFG + a_0^4x - a_0^2B^2x - a_0^2F^2x + a_0^2ABy + a_0^2DFy \quad (34)$$

$$p_{12} = a_0^2BC - BCD^2 + ACDF + ABDG - A^2FG + a_0^2FG - a_0^2ABx - a_0^2DFx + a_0^2A^2y - a_0^4y + a_0^2D^2y \quad (35)$$

$$p_{13} = a_0^2C^2 - C^2F^2 + 2BCFG + a_0^2G^2 - B^2G^2 - a_0^4w + a_0^2B^2w + a_0^2F^2w - 2a_0^2BCy - 2a_0^2FGy + a_0^4y^2 \quad (36)$$

$$p_{14} = -C^2DF + BCDG + ACFG - ABG^2 + a_0^2ABw + a_0^2DFw - a_0^2BCx - a_0^2FGx - a_0^2ACy - a_0^2DGy + a_0^4xy \quad (37)$$

$$p_{15} = a_0^2C^2 - C^2D^2 + 2aCDG - A^2G^2 + a_0^2G^2 + a^2a_0^2w - a_0^4w + a_0^2D^2w - 2a_0^2ACx - 2a_0^2DGx + a_0^4x^2 \quad (38)$$

经检验,变量 $x$ 、 $y$ 、 $w$ 的最高次数均不超过4次。形式上看,式(30)~(38)比文献[10]提供的9个多项式更加简洁。

式(24)~(38)为本文推导出的15个多项式,可以直接用于求解一般6-6型平台并联机构位置正解,不必重复求解分次字典序Groebner基的步骤。

由Groebne基理论知,单项式的序确定后,其相应的分次字典序Groebner基是唯一的。对于不同的单项式序,可以得到不同的分次字典序Groebner基。于是,本文尝试对不同的变量排序进行Groebner求解,得到了不同的分次字典序Groebner基,数量也不相同,例如按单项式的分次字典序排列 $B > C > D > F > G > x > y > w > A$ ,可以得到15个Groebner基,但总有15个基的次数为4次,用它们构造结式都能获得正确的结果。也就是说,理论上存在多个不同的结式都可以获得该机构的位置正解,这说明文献[10]构造的Sylvester结式并不是唯一的。

### 2.3 一元高次输入输出方程

第2.2节导出的式(24)~(38),可以写成矩阵形式

$$M_{15 \times 15} T = 0 \quad (39)$$

式中 $T = (w^4, w^3y, w^2y^2, wy^3, y^4, w^3, w^2y, wy^2, y^3, w^2, wy, y^2, w, y, 1)^T$

由代数学知,式(24)~(38)有解的条件是其系数行列式等于零,即

$$\det(M_{15 \times 15}) = 0 \quad (40)$$

矩阵 $M_{15 \times 15}$ 每列关于 $x$ 的最高次数分别为:0、0、0、0、0、1、1、1、1、2、2、2、3、3、4,其总和等于20。可知,展开式(40)后得到关于 $x$ 的单项式多项式最高次数不会超过20。

根据式(40),不需要提取任何公因式,可以直接得到的关于变量 $x$ 的一元20次输入输出方程

$$\sum_{i=0}^{20} s_i x^i = 0 \quad (41)$$

式中, $s_i$ 是由输入参数确定的实系数。

由以上分析可知,本文构造的15阶系数行列式与展开系数行列式后获得的一元多项式在符号形式上最高次数是完全一致的。求解式(41),将得到20个解。

### 2.4 其他变量的求解

将所求得的 $x$ 代入式(24)~(38)中任何14个关系式中,则这14个式子变成除假象变元1之外的14个假想变元的线性方程组,解此方程组,可求得对应于 $x$ 的 $w$ 、 $y$ 的值。

将所求得的 $x$ 、 $y$ 、 $w$ 值代入式(12)~(17),可以求得对应的 $r_1$ 、 $r_2$ 、 $r_4$ 、 $r_5$ 、 $u$ 、 $v$ 的值。将所求得的

$x$ 、 $y$ 、 $w$ 、 $r_1$ 、 $r_2$ 、 $r_4$ 、 $r_5$ 、 $u$ 、 $v$  的值代入式(8)~(10), 可以求得其他所有未知变量的值。其中  $z$ 、 $r_3$ 、 $r_6$  这 3 个变量分别取得一正一负两个解, 即对应于每一个  $x$  的值, 将产生两组位置正解, 共计 40 组解。解的情况反映了该机构分支是成对的, 且关于基座平面成几何对称的几何性质。

### 3 位置正解数字实例

已知图 1 所示机构的结构参数, 如表 1 所示, 求该机构的全部位置正解。将表 1 中已知参数带入式(24)~(38), 前述求解方法在 Intel Pentium III

2.93 GHz RAM 1GB 的 PC 机上, 运用计算机代数系统 Mathematica 5.2, 耗时仅 2.219 s, 得到全部 40 组位置正解, 如表 2 所示。经运动学反解验证, 全部 40 组解都满足原方程, 无增根、无漏根。

表 1 数字实例的已知结构参数(量纲为一)

| 序号 | $a_{xi}$ | $a_{yi}$ | $b_{xi}$ | $b_{yi}$ | $A_i B_i$ 的长度 $L_i$   |
|----|----------|----------|----------|----------|-----------------------|
| 1  | 9        | 3        | 3        | 1        | $\sqrt{36\ 205/13}$   |
| 2  | 6        | 8        | 2        | 3        | $2\sqrt{188\ 630/65}$ |
| 3  | 0        | 14       | 1        | 5        | $3\sqrt{101\ 465/65}$ |
| 4  | -8       | 13       | -3       | 4        | $\sqrt{237}$          |
| 5  | -7       | -6       | -2       | 2        | $\sqrt{462}$          |
| 6  | -3       | -5       | -1       | -4       | $6\sqrt{46\ 670/65}$  |

表 2 数字实例的全部 40 组位置正解

| 序号    | $x$        | $y$       | $z$                | $r_1$     | $r_2$     | $r_3$             | $r_4$     | $r_5$     | $r_6$             |
|-------|------------|-----------|--------------------|-----------|-----------|-------------------|-----------|-----------|-------------------|
| 1,2   | 20.678 2   | 13.664 7  | $\pm 26.291\ 5i$   | -7.077 5  | -1.501 1  | $\mp 7.165\ 4i$   | -4.537 0  | -2.200 3  | $\mp 4.942\ 2i$   |
| 3,4   | -3.953 0   | 4.672 6   | $\mp 5.828\ 5i$    | -4.926 7  | -5.123 8  | $\mp 7.037\ 5i$   | 0.0963 4  | -1.354 6  | $\mp 0.918\ 8i$   |
| 5,6   | 9.957 4+   | 2.927 6+  | $\mp 11.581\ 7\pm$ | -3.651 2- | -3.163 8+ | $\pm 1.448\ 8\mp$ | -0.939 4- | -0.181 6- | $\pm 2.035\ 8\mp$ |
|       | 6.811 8i   | 3.068 7i  | 10.331 0i          | 2.051 1i  | 0.312 2i  | 4.487 3i          | 1.671 1i  | 0.751 6i  | 0.838 1i          |
| 7,8   | 9.957 4-   | 2.927 6-  | $\mp 11.581\ 7\mp$ | -3.651 2+ | -3.163 8- | $\pm 1.448\ 8\pm$ | -0.939 4+ | -0.181 6+ | $\pm 2.035\ 8\pm$ |
|       | 6.811 8i   | 3.068 7i  | 10.331 0i          | 2.051 1i  | 0.312 2i  | 4.487 3i          | 1.671 1i  | 0.751 6i  | 0.838 1i          |
| 9,10  | 15.963 0   | -3.666 8  | $\pm 10.343\ 1i$   | -2.246 9  | -3.107 2  | $\mp 3.701\ 7i$   | -0.295 1  | 1.350 6   | $\pm 0.954\ 6i$   |
| 11,12 | -24.765 0  | 31.461 0  | $\pm 37.634\ 5i$   | 1.356 9   | 1.781 6   | $\pm 2.00\ 4i$    | -0.469 1  | -3.802 3  | $\mp 3.698\ 4i$   |
| 13,14 | -2.186 7   | 10.720 3  | $\mp 9.214\ 7$     | 0.043 4   | -0.820 1  | $\pm 0.570\ 5$    | -0.033 6  | -0.572 0  | $\mp 0.819\ 6$    |
| 15,16 | -8.073 1   | 32.914 0  | $\pm 30.715\ 7i$   | 1.366 9   | 4.051 6   | $\pm 4.157\ 4i$   | -2.580 1  | -3.321 3  | $\mp 4.085\ 1i$   |
| 17,18 | -4.392 6-  | 10.756 1- | $\pm 9.832\ 0\mp$  | 0.731 9-  | -0.684 2- | $\mp 0.650\ 0\mp$ | 0.351 0+  | -0.456 4- | $\pm 0.822\ 1\mp$ |
|       | 0.086 9i   | 0.592 2i  | 0.396 7i           | 0.491 1i  | 0.413 9i  | 0.117 4i          | 0.002 1i  | 0.0745 4i | 0.042 3i          |
| 19,20 | -4.392 6+  | 10.756 1+ | $\pm 9.832\ 0\pm$  | 0.731 9+  | -0.684 2+ | $\mp 0.650\ 0\pm$ | 0.351 0-  | -0.456 4+ | $\pm 0.822\ 1\pm$ |
|       | 0.086 9i   | 0.592 2i  | 0.396 7i           | 0.491 1i  | 0.413 9i  | 0.117 4i          | 0.002 1i  | 0.0745 4i | 0.042 3i          |
| 21,22 | 2.213 9+   | 5.424 0+  | $\mp 15.905\ 7\mp$ | 1.201 4+  | -0.807 2+ | $\mp 0.170\ 4\mp$ | 0.537 8-  | 0.650 8+  | $\pm 0.727\ 0\pm$ |
|       | 3.985 1i   | 0.450 1i  | 0.168 1i           | 0.558 3i  | 0.875 8i  | 0.212 3i          | 0.406 3i  | 0.269 7i  | 0.059 1i          |
| 23,24 | 10.804 7+  | 7.072 1-  | $\mp 10.332\ 9\pm$ | 0.996 1-  | 0.438 6-  | $\mp 0.865\ 2\mp$ | -0.733 1+ | 0.716 4+  | $\mp 0.172\ 0\pm$ |
|       | 0.934 6i   | 1.662 9i  | 0.464 8i           | 0.415 9i  | 0.484 9i  | 0.724 6i          | 0.070 2i  | 0.129 8i  | 0.241 6i          |
| 25,26 | 10.804 7-  | 7.072 1+  | $\mp 10.332\ 9\mp$ | 0.996 1+  | 0.438 6+  | $\mp 0.865\ 2\pm$ | -0.733 1- | 0.716 4-  | $\mp 0.172\ 0\mp$ |
|       | 0.934 6i   | 1.662 9i  | 0.464 8i           | 0.415 9i  | 0.484 9i  | 0.724 6i          | 0.070 2i  | 0.129 8i  | 0.241 6i          |
| 27,28 | 2.213 9-   | 5.424 0-  | $\mp 15.905\ 7\pm$ | 1.201 4-  | -0.807 2- | $\mp 0.170\ 4\pm$ | 0.537 8+  | 0.650 8-  | $\pm 0.727\ 0\mp$ |
|       | 3.985 1i   | 0.450 1i  | 0.168 1i           | 0.558 3i  | 0.875 8i  | 0.212 3i          | 0.406 3i  | 0.269 7i  | 0.059 1i          |
| 29,30 | 8          | 9         | $\pm 10$           | 0.6       | 0.307 7   | $\pm 0.738\ 5$    | -0.8      | 0.230 8   | $\pm 0.553\ 8$    |
| 31,32 | 17.567 5   | -4.868 4  | $\pm 5.503\ 2i$    | 0.941 4   | -1.394 2  | $\mp 1.352\ 9i$   | 0.365 6   | 2.538 8   | $\pm 2.362\ 0i$   |
| 33,34 | -16.182 9  | 28.963 9  | $\pm 0.536\ 2i$    | 22.382 1  | 14.021 9  | $\mp 26.392\ 7i$  | 3.262 0   | 3.240 6   | $\mp 4.488\ 0i$   |
| 35,36 | -23.168 6+ | 15.395 2+ | $\pm 65.591\ 5\pm$ | 25.866 3- | 12.213 2+ | $\mp 0.398\ 3\mp$ | 6.894 0-  | 5.798 3-  | $\mp 9.761\ 3\mp$ |
|       | 56.883 6i  | 19.013 6i | 14.444 4i          | 4.349 8i  | 8.331 8i  | 27.000 8i         | 10.298 8i | 1.535 8i  | 8.185 9i          |
| 37,38 | -23.168 6- | 15.395 2- | $\pm 65.591\ 5\mp$ | 25.866 3+ | 12.213 2- | $\mp 0.398\ 3\pm$ | 6.894 0+  | 5.798 3+  | $\mp 9.761\ 3\pm$ |
|       | 56.883 6i  | 19.013 6i | 14.444 4i          | 4.349 8i  | 8.331 8i  | 27.000 8i         | 10.298 8i | 1.535 8i  | 8.185 9i          |
| 39,40 | -58.808 0  | 16.119 1  | $\pm 49.038\ 1i$   | 27.972 5  | 9.389 2   | $\mp 29.489\ 3i$  | 11.236 9  | 4.913 5   | $\mp 12.223\ 3i$  |

## 4 结论

(1) 提出了一种求解一般 6-6 型平台并联机构位置正解的代数消元法。基于计算机符号运算, 利

用计算机代数系统中的分次字典序 Groebner 基算法, 推导出 15 个可直接用于求解一般 6-6 型平台并联机构位置正解的多项式, 实现了该问题的数学机械化求解, 获得了该机构一元高次方程的次数为 20 次并且该机构位置正解最多有 40 组解的结论。与一

般的消元法相比,没有复杂的数学推导,计算方法简洁。

(2) 在理论上阐明了存在多个不同的结式可以获得该机构位置正解的全部解析表达式,而文献[10]构造的 Sylvester 结式只是其中的一种形式。

### 参 考 文 献

- [1] 张辉,王启明,叶佩青,等.通用 Stewart 平台运动学正向数值求解方法及应用[J].机械工程学报,2002,38(增刊):108-112.  
ZHANG Hui, WANG Qiming, YE Peiqing, et al. Forward kinematics of general Stewart platform and the application [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(Supp.): 108-112.
- [2] INNOCENTI C, CASTELLI V P. Forward kinematics of the general 6-6 Fully parallel mechanism: An exhaustive numerical approach via a mono-dimensional-search algorithm[J]. ASME J. Mech. Des., 1993(115): 932-937.
- [3] 韩先国,陈五一,陈鼎昌.基于路径跟踪原理求解 6-SPS 并联机构位置正解[J].北京航空航天大学学报,2002,28(3): 370-373.  
HAN Xianguo, CHEN Wuyi, CHEN Dingchang. Method to get the forward solution of a 6-SPS parallel manipulator based on position tracking principle [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2002, 28(3): 370-373.
- [4] SREENIVASAN S V, NANUA P. Solution of the direct position kinematics problem of the general Stewart platform using advanced polynomial continuation[C]// The 22nd Biennial Mechanisms Conference, 1992, Scottsdale. New York: ASME, 1992: 99-106.
- [5] 董彦良,吴盛林.一种实用的 6-6 Stewart 平台的实时位置正解法[J].哈尔滨工业大学学报,2002,34(1): 116-119.  
DONG Yanliang, WU Shenglin. A hybrid method to solve forward kinematics of general 6-6 Stewart platform[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2002, 34(1): 116-119.
- [6] 裴葆青,韩先国,陈五一.基于传感器的 6-DOF 并联机构运动学正解[J].北京航空航天大学学报,2005,31(4): 421-424.  
PEI Baoqing, HAN Xianguo, CHEN Wuyi. Solution of direct kinematics of 6-DOF parallel manipulators using extra sensors[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2005, 31(4): 421-424.
- [7] JI Ping, WU Hongtao. A closed-form forward kinematics solution for the 6-6P Stewart platform[J]. IEEE Trans. Robotics & Aut., 2001, 17(4): 522-526.
- [8] YANG Jun, GENG J Z. Closed form forward kinematics solution to a class of hexapod robots[J]. IEEE Trans. Robotics & Aut., 1998, 14(3): 503-508.
- [9] WEN Fuan, LIANG Chonggao. Displacement analysis of the 6-6 Stewart platform mechanisms[J]. Mech. Mach. Theory, 1994, 29 (4): 547-557.
- [10] WU Wenda, HUANG Yuzheng. The direct kinematic solution of the planar Stewart platform with coplanar ground points[J]. MM Research Preprints, 1994, 12: 60-70.
- [11] DHINGRA A K, ALMADI A N, KOHLI D, A Groebner-Sylvester hybrid method for closed-form displacement analysis of mechanisms[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2000, 122(4): 431-438.

作者简介:黄昔光,男,1979年出生,博士,讲师。主要研究方向为机器人学、机构学。

E-mail: huangxiguang@gmail.com