DOI：10.3901/JME.2008.10.072

# 矩形薄板弯曲的严格简明解析解*

李元媛[1] 蔡睿贤[2]
(1．西北大学化工学院 西安 710069；
2．中国科学院工程热物理研究所 北京 100190)

**摘要：**解析解在理论上与数值计算上都有很高价值。根据历史已有的经典解的启发，对导出矩形薄板弯曲的严格简明解析解(无特殊函数与无穷级数)的方法，提出推导的新思路：在求导简明严格解析解时，应该改变已有办法，不是以外载荷的分布为给定参数，而是先考虑满足边界条件的薄板法向位移分布，再按基本方程求出外载荷与其余参数的应有分布。对于简支边界条件，为得出简明严格解析解，法向位移的解析函数在两个坐标上分别应该至少各有两个根，而且两个根值所在处同时也是函数的拐点。对此准则，以偶数多项式、概率函数与箕舌线函数作为法向位移函数为例，给出其应有的简明严格解析解。同样，对于固定边界条件，类似的准则是：法向位移的解析函数在两个坐标上分别应该至少各有两个根，而且两个根值所在处同时也是函数极值所在。以奇次多项式与星型线函数为例，给出其法向位移函数和应有的简明严格解析解。上述思路与方法能再发展，例如用于不同或复合的边界条件中去。

**关键词：**严格解析解 薄板 矩形 弯
**中图分类号：**TG386

# Some Concise Exact Analytical Solutions of Rectangular Plate Bending

LI Yuanyuan[1] CAI Ruixian[2]
( 1. College of Chemical Engineering, Northwest University, Xi’an 710069;
2. Institute of Engineering Thermophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)

**Abstract：**Analytical solutions have great value in both theory and numerical computation. Enlightened by the classical method of deriving analytical solutions of rectangular plate bending, new idea and method are proposed for deriving concise exact analytical solutions (without special functions and infinite series) of simple supported bending and rigid fixing bending. In such cases, the given function for bending has to be changed from the external loading function to the normal displacement function of the plate which satisfies the boundary conditions. Then, the external loading distribution and other parameters can be derived from the basic equations. For the simple supported bending, the normal displacement functions should have at least two roots in each coordinate, and there are two roots situated at the inflexion point of the normal displacement function. The examples of such functions are given as even polynomial, probability function and versiera function. In addition, the concise exact analytical solutions for the rigid fixing bending are derived similarly to the abovementioned approach; the normal displacement functions should also have at least two roots in each coordinate, but there are two roots situated at the maximum point of the normal displacement function. Two examples of such functions (odd-order polynomial and asteroid) and their concise normal displacement function are also given. The idea and method proposed can be developed further. For example, for a hybrid boundary condition problem.

**Key words：**Exact solution Plate Rectangular Bending

## 符 号

| | | |
|---|---|---|
| $a$ ——$x$ 方向半板宽度 | $d, g$——任意常数 | $x, y$ ——坐标 |
| $b$ ——$y$ 方向半板宽度 | $E$——弹性模量 | $\nu$ ——泊松比 |
| $c$ ——各种常数 | $q$——外载荷 | $\sigma_x, \sigma_y$ ——正应力 |
| $D$ ——抗弯强度 | $w$ ——平板法向位移 | $\tau_{xy}$ ——切应力 |

* 国家自然科学基金资助项目(50576097)。20071126 收到初稿，20080512 收到修改稿

# 0　前言

薄板弯曲是应用弹性力学中已相当成熟的部分。约百年前 KIRCHHOFF 与 LOVE 就已给出了基本简化假定，得出基本方程。而早年的求解方法有求解简支薄板的 Navier 双重三角级数法，及 LEVY 提出的半幅单傅里叶正弦级数法等[1-3]。后来则有各种近似法，以及近年来以有限元法为代表的数值求解方法等。由于电子计算机与数值计算方法的飞跃发展，在工程实用上目前已基本上都用数值求解。

但是上述情况并不排除各种理论解析解的价值，尤其是无任何近似简化、没有无穷级数与特殊函数的代数显式严格解析解。正如文献[4]中所指出："弹性力学的解析解在理论上很有价值"。另一方面，严格解析解对数值求解也有很重要的作用。例如，可以用之作为标准解来检验各种数值解的准确度、收敛性、稳定性等的水平与可用性；也可以用来帮助发展各种数值计算的技巧，或甚启发出新的计算方法。在相近的学科如流体力学、传热学中，近年来也有不少创新的简明严格解析解发表且发挥了相应的作用[5-8]。

也许有人说，薄板弯曲是属于应用弹性力学，即不是严格的弹性力学，在弹性力学基础上还加上了一些近似简化，不必为之求严格的解析解。这种说法其实是不妥当的。弹性力学(乃至绝大多数科学理论)的公式，其实本身也有其很多近似与简化之处(例如认为某些系数是常数)，这并不影响其严格解析解的重大意义。至于作为标准解有助于计算解法，则更是有实际意义。

因此，基于学习与研究历史上薄板弯曲求解的心得，本文提出了对矩形薄板求得其严格(无任何近似)简明(无任何无限级数与特殊函数)解析解的途径，并给出一些简单的例子。

# 1　求得严格简明解析解的途径

先以简支矩形板为例，求解的基本方程是[1–2]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q}{D} \tag{1}$$

而边界条件是

$$w_{(x=\pm a)(y=\pm b)}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}_{(x=\pm a)}=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}_{(y=\pm b)}=0 \tag{4}$$

如果能满足边界条件式(2)～(4)的式(1)能找到严格简明解析解，就完成了本文的目的。在工程实际中，经常是在已定 $q(x,y)$后求解。这样求得严格，简明的解析解通常很难。按照经典办法，多是求得无穷级数解。但本文目的是要求出有理论意义的严格简明解析解，这时为易于入手，以先考虑能满足边界条件的 $w$ 函数，然后按式(1)定出相应的 $q/D$，比较可行。

如取 $w$ 为简单双重三角函 $w=c\sin(\pi x/d)\sin(\pi y/g)$ (相当于 Navier 解法只取级数的第一项)，可推导得 $q$ 也是简单双重三角函数。应该说这是很早的简支矩形薄板弯曲严格简明解析解。此解在经典文献[1-3]都有述及。但据所知，在历史上这几项工作接着的发展，就仅是沿 Navier 解的方向导出很多满足不同条件的无限级数解，而没有着力对式(1)～(4)研究如何可以求出其可能有的严格简明解析解。

其实，按照简支边界条件式(2)～(4)的要求，再参考 Navier 解法对无限级数中函数的选取，就可很容易得知，要导得简支矩形薄板弯曲的严格简明解析解，其法向位移 $w$ 的选用函数准则应该是：该函数在两个坐标上分别至少各有两个根，而且两个根值所在处同时也是函数的拐点。这样就满足了式(2)～(4)。有了简明的 $w$ 解析函数，按式(1)就可求得外负荷解析表达式，再按已知的薄板弯曲各参数与 $w$ 的关系，就可得出所有参数的严格简明解析解。

能满足有两个根且正好又是拐点的函数在原则上应有无限多种。除正弦三角函数外，最简单的应是只含偶次方的代数多项式，尤其是只有 0、2 与 4 次方的多项式。第 2 节将以此为典型情况给予说明，而在再下一节给出更多简支矩形薄板弯曲的严格简明解析解。

# 2　偶次多项式简支矩形薄板弯曲解析解

在此以最简单的四次多项式为例介绍简支矩形薄板的一族严格简明解析解。这时可设(各 $c_i$ 为常数，其中 $c_2$，$c_3$，$c_5$，$c_6$ 为任意常数)

$$w=(c_1-c_2x^2+c_3x^4)(c_4-c_5y^2+c_6y^4) \tag{5}$$

按第 1 节给出的准则，应令在$\partial^2w/\partial x^2$ 及 $\partial^2w/\partial y^2$=0 处 $w$=0。对简单的式(5)很容易得知应在 $-2c^2+12c_3x^2=0$ 与 $-2c_5+12c_6y^2=0$ 处 $w$=0。由此易知有下列关系式：在 $x^2=c_2/6c_3$ 与 $y^2=c_5/6c_6$(即$\partial^2w/\partial x^2$

及$\partial^2 w/\partial y^2$)处，$w$=0；亦即应有

$$c_1 - c_2^2/6c_3 + c_3 c_2^2/36c_3^2 = 0$$

$$c_4 - c_5^2/6c_6 + c_6 c_5^2/36c_6^2 = 0$$

由此可得 $c_1=5c_2^2/36c_3$ 及 $c_4=5c_5^2/36c_6$。于是薄板法向位移 $w$ 的严格简明解析解是

$$w = (5c_2^2/36c_3 - c_2x^2 + c_3x^4)\times (5c_5^2/36c_6 - c_5y^2 + c_6y^4) \tag{6}$$

而相应式(2)～(4)，$x$ 与 $y$ 向的半板宽度为

$$d = \pm\sqrt{c_2/6c_3} \tag{7}$$

及

$$g = \pm\sqrt{c_5/6c_6} \tag{8}$$

有了满足边界条件的解析解，对其他力学参数就可以很容易地按照薄板经典公式而求得。例如按式(1)可得到以下参数。

(1) 外载荷

$$q/D = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 24c_3(5c_5^2/36c_6 - c_5y^2 + c_6y^4) + 8(6c_3x^2 - c_2)(6c_6y^2 - c_5) + 24c_6(5c_2^2/36c_3 - c_2x^2 + c_3x^4) \tag{9}$$

(2) 应力

$$\sigma_x = \frac{E}{\nu^2-1}z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{2E}{\nu^2-1}z[(6c_3x^2 - c_2)(5c_5^2/36c_6 - c_5y^2 + c_6y^4) + \nu(6c_6y^2 - c_5)(5c_2^2/36c_3 - c_2x^2 + c_3x^4)] \tag{10}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{\nu^2-1}z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \frac{2E}{\nu^2-1}z[(6c_6y^2 - c_5)5c_2^2/36c_3 - c_2x^2 + c_3x^4) + \nu(6c_3x^2 - c_2)(5c_5^2/36c_6 - c_5y^2 + c_6y^4)] \tag{11}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E}{1+\nu}z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{-2E}{1+\nu}z(2c_3x^3 - c_2x + 2c_6y^3 - c_5y) \tag{12}$$

(3) 弯矩

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = D[(c_2 - 6c_3x^2)(5c_5^2/36c_6 - c_5y^2 + c_6y^4) - \nu(6c_6y^2 - c_5)(5c_2^2/36c_3 - c_2x^2 + c_3x^4)] \tag{13}$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = D[(c_5 - 6c_6y^2)(5c_2^2/36c_3 - c_2x^2 + c_3x^4) - \nu(6c_3x^2 - c_2)(5c_5^2/36c_6 - c_5y^2 + c_6y^4)] \tag{14}$$

(4) 转矩

$$M_{xy} = (\nu-1)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2(\nu-1)D(2c_3x^3 - c_2x + 2c_6y^3 - c_5y) \tag{15}$$

应该说，式(6)～(15)是很简明的简支矩形薄板弯曲的严格解析解。

再进一步，就如 Navier 解可以扩充到双傅里叶无穷级数以求得任意外载荷下的解，偶次多项式原则上也可以同样扩充为偶次多项式级数来求解。但这就不一定是简明、严格的解析解，应另文再做研究。由于只包括偶次方，这种级数也可能收敛较快。

其实，用不同于本节的偶次方项，适当配合起来，也可以得到很多其他简支矩形薄板弯曲的严格简明解析解。限于篇幅，在此不再赘述。

## 3 其他简支矩形薄板弯曲严格简明解析解例子

正如前述，除偶次多项式外，原则上还有无限多种 $w$ 的函数可得到简支矩形薄板弯曲的严格简明解析解，下面举两个例子。

### 3.1 $w$ 为概率函数

概率函数的基本形式是 $f(x)=c_1\exp(-dx^2)-c_2$，这种函数是有可能在它的两个根处同时使两次导数为 0 的。经过简单的推导，可得当取 $w$ 为下列形式时，满足 $x$ 与 $y$ 向全板宽为 $\sqrt{2/d}$ 与 $\sqrt{2/g}$ 时的简支条件

$$w = c_1[\exp(-dx^2) - \exp(-1/2)]\times [\exp(-gy^2) - \exp(-1/2)] \tag{16}$$

按照式(16)，可以得到

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = c_1[2d(2dx^2-1)\exp(-dx^2)]\times [\exp(-gy^2) - \exp(-1/2)] \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = c_1[\exp(-dx^2) - \exp(-1/2)]\times [2g(2gy^2-1)\exp(-gy^2)] \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 4c_1 dgxy\exp[-(dx^2+gy^2)] \tag{19}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=4d^2c_1(1-8dx^2+4d^2x^4)\times$$
$$\exp(-dx^2)\times[\exp(-gy^2)-\exp(-1/2)] \quad (20)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=4g^2c_1(1-8gy^2+4g^2y^4)\times$$
$$\exp(-gy^2)[\exp(-dx^2)-\exp(-1/2)] \quad (21)$$

$$2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}=8c_1dg(2dx^2-1)\times$$
$$(2gy^2-1)\exp\left(-(dx^2+gy^2)\right) \quad (22)$$

将式(17)～(22)代入式(10)～(15)的左侧等式，即可得到此解的外载荷、应力、弯矩和转矩等解析解。例如外载荷 $q/D$ 的解析解就是式(20)～(22)之和。

### 3.2 $w$ 为箕舌线函数

箕舌线函数的基本形式是 $f(x)=8d^3/(x^2+4d^2)$，其曲线形状与概率函数相近。与第 3.1 节同样处理，可知当取 $w$ 为下列形式时满足 $x$ 与 $y$ 向全板宽为 $4d/\sqrt{3}$ 与 $4g/\sqrt{3}$ 时的简支条件

$$w=c_1\left[8d^3(x^2+4d^2)^{-1}-3d/2\right]\times$$
$$\left[8g^3(y^2+4g^2)^{-1}-3g/2\right] \quad (23)$$

其他推导与第 3.1 节相同，不赘述。

### 3.3 在同一解中用不同函数形式

前面各节建议的外载荷 $w$，所用的函数都是以同一形式的 $f(x)$与 $f(y)$相乘，其实它们是分别对两个互为垂直的矩形边满足简支条件的。所以，对同一矩形的不同边，也可用不同的函数形式。例如可对 $x$ 方向用偶次多项式而 $y$ 向用三角函数

$$w=(5c_2{}^2/36c_3-c_2x^2+c_3x^4)\times c_0\sin(\pi y/g) \quad (24)$$

等各种组合。本来实现简支矩形边界条件四边都用同一函数形式的解析解，原则上就有无限多种，再加以交叉匹配，可能有的解就更无限多了。

## 4　固定边界矩形薄板弯曲求严格简明解析解的准则

按第 3 节的讨论与具体推导，很容易会引出下述准则：要导得固定边界矩形薄板的严格简明解析解，其法向位移 $w$ 的选用函数准则应该是：该函数在两个坐标上分别至少各有两个根，而且两个根值所在处同时也是函数的极值所在。

原则上能满足此准则的函数也是无限多的，但是要很简明的就不一定很多。初步可以考虑的例如奇次多项式，其表达式是

$$w=(c_1x-c_2x^3+c_3x^5)\times(c_4y-c_5x^3+c_6x^5) \quad (25)$$

式中 $c_1$ 与 $c_4$ 要按上述准则那样求出，分别是 $c_2$，$c_3$ 与 $c_5$，$c_6$ 的函数。推导方法与第 3 节中相同。但由于函数次数高了，推导略繁一点。

另一个例子是用星形线函数

$$w=\left(\sqrt{d^{2/3}-x^{2/3}}\right)^3\times\left(\sqrt{g^{2/3}-y^{2/3}}\right)^3 \quad (26)$$

其他处理和考虑与前面是相同的。例如，不同函数形式也可以在同一解中同时用。

## 5　结论

(1) 严格、简明的解析解对相应的学科在理论上及发展数值计算上都有很大价值。矩形薄板弯曲在历史上有过经典的解析解，但都是以无限级数或特殊函数来表达，理论与实用上均有不足。

(2) 为能较容易得到矩形薄板弯曲的严格简明解析解，以选用薄板法向位移代替以前常用的外载荷为给定参数为宜。

(3) 对简支边界条件，选用的法向位移的函数，应在两个坐标向至少各有两个根，而且根值所在处同时也是函数的拐点，就能很容易推导得出无限多族解(相应不同的函数)。

(4) 以偶次多项式、概率函数、箕舌线函数为例，给出其简支边界条件下具体的解。

(5) 对固定边界选用的法向位移的函数，在两个坐标相应至少各有两个根，而且根值所在处同时也是函数的极值所在。这样的函数有奇次多项式和星形线函数等。

(6) 提出的思路与建议，对矩形薄板弯曲的应力应变等的分析，还有可继续发展之处。

## 参　考　文　献


[1] TIMOSHENKO S,WOINOWSKY-KRIEGER S. Theory of plates and shells [M]. 2nd ed. New York：McGraw-Hill Book Co., Inc., 1959.

[2] 杨桂通. 弹塑性力学引论[M]. 北京：清华大学出版社，2004.

YANG Guitong, Introduction to elasticity and plasticity [M]. Beijing：Tsinghua University Press, 2004.

[3] 别茹霍夫. 弹性与塑性理论[M]. 北京：高等教育出版社，1956.

БЕЗУХОВ Н. Theory of elasticity and plasticity[M].

Beijing：Higher Education Press, 1956.

[4] 武际可，王敏中，王炜. 弹性力学引论[M]. 北京：北京大学出版社, 2001.

WU Jike, WANG Minzhong, WANG Wei. Introduction to elasticity[M]. Beijing：Beijing University Press, 2001.

[5] CAI Ruixian. Some explicit analytical solutions of unsteady compressible flow[J]. Trans. ASME, Journal of Fluids Engineering, 1998, 120 (4)：760-764.

[6] 蔡睿贤. 非定常可压等熵流非线性方程显式解析解的推导[J]. 工程热物理学报, 2001, 22(2)：159-162.

CAI Ruixian. Derivation of explicit analytical solutions for nonlinear unsteady compressible isentropic flow[J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2001, 22(2)：159-162.

[7] CAI Ruixian. ZHANG N. Some algebraically explicit analytical solutions of unsteady nonlinear heat conduction[J]. Trans. ASME Journal of Heat Transfer, 2001, 123(6)：1 189-1 191.

[8] CAI Ruixian. ZHANG N. Explicit analytical solutions of couple heat and mass transfer set for drying process[J]. Trans. ASME Journal of Heat Transfer, 2003, 125(1)：175-178.

**作者简介**：李元媛，女，1984 年出生。主要研究方向为固体力学应力分析。

E-mail：marryliyuanyuan@126.com

(上接第 71 页)

[10] 李秦川. 对称少自由度并联机器人型综合理论及新机型综合[D]. 秦皇岛：燕山大学，2003.

LI Qinchuan. Type synthesis theory of lower-mobility parallel mechanisms and synthesis of new architectures[D]. Qinhuangdao：Yanshan University, 2003.

[11] 黄真，孔令富，方跃法. 并联机器人机构学理论及控制[M]. 北京：机械工业出版社, 1997.

HUANG Zhen, KONG Lingfu, FANG Yuefa. Mechanism theory and control of parallel manipulator[M]. Beijing：China Machine Press, 1997.

[12] 李艳文. 几类空间并联机器人的奇异研究[D]. 秦皇岛：燕山大学, 2005.

LI Yanwen. On singularity of several kinds of spacial parallel manipulators[D]. Qinhuangdao：Yanshan University, 2005.

**作者简介**：李艳文，女，1966 年出生，博士，副教授。主要研究方向为机器人技术及应用。发表论文 20 余篇。

E-mail：ywl@ysu.edu.cn

黄真，男，1936 年出生，教授，博士研究生导师。主要研究方向为机器人技术及应用。先后承担国家自然科学基金项目 9 项，国家 863 项目 3 项，国家科技攻关等项目共计 20 余项。已在国内外发表论文 280 余篇。

E-mail：huangz@ysu.edu.cn

王鲁敏，男，1964 年出生，副教授。主要研究方向为机械工程技术。发表论文 10 余篇。

E-mail：lmw@ysu.edu.cn

赵铁石，男，1963 年出生，教授，博士研究生导师。主要研究方向为机器人技术及应用。主持国家科技攻关等项目共计 10 余项，发表论文 50 余篇。

E-mail：tszhao@ysu.edu.cn