

DOI: 10.3901/JME.2011.13.035

绳牵引并联机器人的静刚度解析*

刘 欣^{1,2} 仇原鹰¹ 盛 英¹

(1. 西安电子科技大学电子装备结构教育部重点实验室 西安 710071;

2. 南京电子技术研究所 南京 210039)

摘要: 基于微分变换和线几何理论, 建立包含关节弹性变形以及绳拉力等因素的绳牵引并联机器人的刚度模型, 推导刚度矩阵的数学表达式。模型不仅考虑驱动单元、绳的弹性变形对机构刚度的影响, 而且考虑机构在广义外力作用下由末端执行器微分运动所引起的结构矩阵的变化。通过线矢量的引入, 分步求导模型中结构矩阵对末端执行器位姿变分的三维 Hessian 矩阵。模型表明, 绳牵引并联机器人的系统刚度由两部分组成, 其中一部分主要取决于绳的几何布置、末端执行器的位姿、驱动支链的物理特性; 另一部分表达为结构矩阵相对末端执行器位姿的变分-Hessian 矩阵与绳拉力矢量的乘积。大射电望远镜 5 m 缩尺模型数值仿真与试验结果的对比较验证了该方法的正确有效。

关键词: 绳牵引并联机器人 微分变换 线几何 Hessian 矩阵 刚度

中图分类号: TP242

Analysis on the Static Stiffness of Wire-driven Parallel Manipulators

LIU Xin^{1,2} QIU Yuanying¹ SHENG Ying¹

(1. Key Lab of Electronic Equipment Structure of Ministry of Education, Xidian University, Xi'an 710071;

2. Nanjing Research Institute of Electronics Technology, Nanjing 210039)

Abstract: Based on differential transform and linear geometry theory, a stiffness model of wire-driven parallel manipulators is established, including the elastic deformation of joints and wire tension. And a mathematical expression of the stiffness matrix is developed. Not only the influence of elastic deformation of the drive units and wires on the mechanism stiffness, but also the change of the structure matrix due to the movement of end-effectors under the action of generalized external force are considered in the stiffness model. The structure matrix derivative with respect to the position and orientation of the end-effectors, namely three dimension Hessian matrix is obtained by introducing linear vector. The model shows that the stiffness matrix of wire-driven parallel manipulators consists of two parts, one of which depends mainly on the geometric distribution of the wires, the position and orientation of the end-effectors, and the physical property of the driven links, while the other is a product of the Hessian matrix and the wire tension vector. The simulation and experiments of a five-meter scaled model of large spherical radio telescope verify the accuracy and effectiveness of the proposed method.

Key words: Wire-driven parallel manipulator Differential transform Line geometry Hessian matrix Stiffness

0 前言

并联机器人的刚度是末端执行器在外力作用下, 由于弹性元件的变形引起位移大小的度量。刚度影响机构的动态特性和定位精度, 是机器人重要的设计评价指标, 建立精确完整的刚度模型对于提高机构性能至关重要^[1]。

绳牵引并联机器人具有结构简单、惯性小、工作空间大和运动速度快等优点, 已在触觉装置^[2]、

风洞试验^[3]、大型射电望远镜^[4]等方面得到应用, 但刚度差、定位精度低的弱点是制约其获得广泛应用的一个瓶颈。由于绳的单向承载且易于屈服, 绳牵引并联机器人比传统连杆并联机器人刚度低, 因此其刚度问题更值得研究。并联机器人的刚度分为被动和主动刚度^[5], 前者与机器人结构参数、末端执行器位姿等因素相关, 后者与外载荷及驱动力等因素有关。VERHOEVEN 等^[6-7]导出了绳牵引并联机器人的刚度公式, 但忽略了主动刚度。KAWAMURA 等^[8]虽然指出增加牵引绳的拉力可以提高结构刚度, 但没有给出两者的解析关系。YU^[9]推导了刚度表达式, 且同时考虑了主动和被动刚度,

*教育部留学回国人员实验室基金(030401)和国家自然科学基金(10433020)资助项目。20100705 收到初稿, 20101205 收到修改稿

但没有得出主动刚度矩阵中 Hessian 矩阵的显示表达, 因此还无法应用于刚度控制。BEHZADIPOUR 等^[10]通过将每根牵引绳等效为沿绳轴线和法线方向的弹簧组合, 从而推导出系统的刚度矩阵表达式, 但用多个弹簧刚度代替一根牵引绳刚度在矩阵形式上不同, 且近似程度需要证明。隋春平等^[11]从微分变换出发推导了绳牵引并联机器人的刚度解析表达式, 包括主动和被动刚度, 但推导过程中略去了值得保留的项。隋春平等^[12]针对一种由 4 根绳牵引的 3 自由度(2 个转动及 1 个移动)带有约束机构的并联机器人, 在导出刚度矩阵的基础上, 采用位置和拉力混合控制的策略, 对该操作臂进行了刚度控制。但该文献的研究对象构型特殊, 杆状执行器的中点受到胡克铰的约束。在对绳牵引并联机器人刚度的研究中, 以往的文献往往忽略了主动刚度, 或者在主动刚度的推导过程中因数学推导的困难而忽略了值得考虑的某些非线性因素, 导致得到的刚度解析表达式不完整、欠准确, 限制了其在运动控制中的应用, 妨碍了对刚度的有效增强。

为此, 本文从刚度基本定义出发, 通过微分变换和线矢量的引入, 解析表达结构矩阵相对于末端执行器位姿变分得到的三维 Hessian 矩阵, 建立完整的绳牵引并联机器人静刚度模型。以大射电望远镜 5 m 缩尺模型为实例, 物理试验与数值仿真结果的对比验证本文方法的正确有效。

1 刚度解析

为了简化理论研究, 作如下假设。

- (1) 绳与机架、末端执行器的连接为理想铰链。
- (2) 绳的自重忽略不计。
- (3) 绳的变形为线弹性变形。
- (4) 绳是理想柔性的, 既不能受压, 也不能抗弯。

以 m 根绳牵引的具有 n 自由度的并联机器人为研究对象, 如图 1 所示, 其中, A_i 为第 i 根绳与机架的连接点, $i=1\sim m$; B_i 为第 i 根绳与末端执行器的铰接点。建立其末端执行器的力和力矩平衡方程

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{J}\mathbf{T} + \mathbf{W} = \mathbf{0} \\
 \mathbf{J} = & \begin{pmatrix}
 \mathbf{}^o\mathbf{u}_1 & \mathbf{}^o\mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{}^o\mathbf{u}_m \\
 \mathbf{}^o\mathbf{R}_{o'}\mathbf{}^o\mathbf{B}_1\mathbf{}^o\mathbf{u}_1 & \mathbf{}^o\mathbf{R}_{o'}\mathbf{}^o\mathbf{B}_2\mathbf{}^o\mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{}^o\mathbf{R}_{o'}\mathbf{}^o\mathbf{B}_m\mathbf{}^o\mathbf{u}_m
 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{J} \in \mathbf{R}^{n \times m} \\
 \mathbf{}^o\mathbf{u}_i = & \frac{\mathbf{}^o\mathbf{A}_i - \mathbf{}^o\mathbf{P}_{o'} - \mathbf{}^o\mathbf{R}_{o'}\mathbf{}^o\mathbf{B}_i}{\|\mathbf{}^o\mathbf{A}_i - \mathbf{}^o\mathbf{P}_{o'} - \mathbf{}^o\mathbf{R}_{o'}\mathbf{}^o\mathbf{B}_i\|_2} \\
 \mathbf{T} = & (t_1 \ t_2 \ \dots \ t_m)^\top \in \mathbf{R}^m \\
 \mathbf{W} = & (\mathbf{F}_e \ \mathbf{M}_e)^\top \in \mathbf{R}^n
 \end{aligned} \tag{1}$$

- 式中 \mathbf{J} ——结构矩阵
 \mathbf{T} ——绳拉力矢量
 \mathbf{W} ——广义外力矢量
 $\mathbf{}^o\mathbf{u}_i$ ——第 i 根绳的单位矢量, $i=1\sim m$
 $\mathbf{}^o\mathbf{R}_{o'}$ ——与末端执行器固接的局部坐标系 $Ox'y'z'$ 到全局坐标系 $Oxyz$ 的旋转变换矩阵
 $\mathbf{}^o\mathbf{A}_i$ ——第 i 根绳与机架的连接点在全局坐标系下的位置矢量
 $\mathbf{}^o\mathbf{B}_i$ ——第 i 根绳与末端执行器的铰接点在局部坐标系下的位置矢量
 $\mathbf{}^o\mathbf{P}_{o'}$ ——末端执行器 O' 点的位置矢量
 t_i ——第 i 根绳的拉力值
 \mathbf{F}_e ——作用于末端执行器的等效外力
 \mathbf{M}_e ——作用于末端执行器的等效外力矩

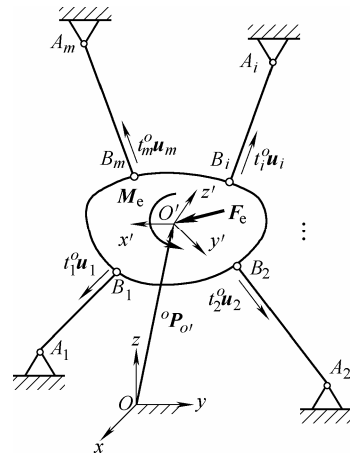


图 1 绳牵引并联机器人的受力矢量图

当作用在末端的广义外力发生微小变化 $\partial\mathbf{W}$ 时, 必然导致末端执行器产生一个相应的微小运动矢量 $\partial\mathbf{X}$, 则系统的刚度与二者的关系为

$$\mathbf{K} = \frac{\partial\mathbf{W}}{\partial\mathbf{X}} = -\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial\mathbf{X}}\mathbf{T} - \mathbf{J}\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\mathbf{X}} \tag{2}$$

式中 $-\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial\mathbf{X}}\mathbf{T}$ ——主动刚度

$-\mathbf{J}\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\mathbf{X}}$ ——被动刚度

\mathbf{X} ——末端执行器的位姿, $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n$

进一步, 得

$$\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{J}}{\partial\mathbf{X}} = (\mathbf{H}^{(1)} \ \mathbf{H}^{(2)} \ \dots \ \mathbf{H}^{(n)}) \in \mathbf{R}^{n \times m \times n} \tag{3}$$

式中, $\mathbf{H}^{(j)}$ 为矩阵 \mathbf{H} 的第 j 个平面。

结构矩阵 \mathbf{J} 分别对末端执行器位姿矢量 \mathbf{X} 的每一个元素求偏导, 构成一个三维 Hessian 矩阵 \mathbf{H} , 其结构如图 2 所示。

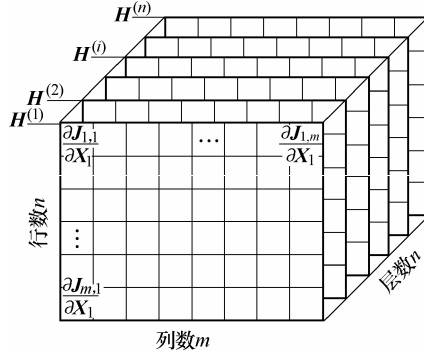


图 2 三维 Hessian 矩阵

对于 $\mathbf{H}^{(j)}$, 有

$$\mathbf{H}^{(j)} = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{X}_j} \quad (4)$$

式中, \mathbf{X} 为矢量 \mathbf{X} 的第 j 个元素, $j=1 \sim n$ 。

1.1 Hessian 矩阵的求解

为了简化矩阵 \mathbf{H} 的推导, 基于线几何理论, 以方向余弦表示每根绳的单位矢量

$$\begin{cases} {}^o\mathbf{u}_i = (\cos \alpha_i \ \cos \beta_i \ \cos \gamma_i)^T \\ \cos \alpha_i = {}^o\mathbf{u}_i^T \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \cos \beta_i = {}^o\mathbf{u}_i^T \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \cos \gamma_i = {}^o\mathbf{u}_i^T \hat{\mathbf{e}}_3 \end{cases} \quad (5)$$

式中 $\hat{\mathbf{e}}_1$ —— x 轴方向的单位矢量, $\hat{\mathbf{e}}_1 = (1 \ 0 \ 0)^T$

$\hat{\mathbf{e}}_2$ —— y 轴方向的单位矢量, $\hat{\mathbf{e}}_2 = (0 \ 1 \ 0)^T$

$\hat{\mathbf{e}}_3$ —— z 轴方向的单位矢量, $\hat{\mathbf{e}}_3 = (0 \ 0 \ 1)^T$

α_i —— ${}^o\mathbf{u}_i$ 与 x 轴的夹角

β_i —— ${}^o\mathbf{u}_i$ 与 y 轴的夹角

γ_i —— ${}^o\mathbf{u}_i$ 与 z 轴的夹角

根据牵引绳根数 m 与末端执行器可控自由度 n 之间的关系, 绳牵引并联机器人可分为欠约束 ($m < n$)、完全约束 ($m = n + 1$) 和冗余约束 ($m > n + 1$) 机构^[13]。以下按欠约束、完全和冗余约束分别进行研究。

1.1.1 欠约束绳牵引并联机器人

对于 $m = n$ 的欠约束绳牵引并联机器人, 可得

$$\mathbf{H}^{(j)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial {}^o\mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{X}_j} & \dots & \frac{\partial {}^o\mathbf{u}_m}{\partial \mathbf{X}_j} \\ \frac{\partial [({}^o\mathbf{R}_{o'} {}^o\mathbf{B}_1) \times {}^o\mathbf{u}_1]}{\partial \mathbf{X}_j} & \dots & \frac{\partial [({}^o\mathbf{R}_{o'} {}^o\mathbf{B}_m) \times {}^o\mathbf{u}_m]}{\partial \mathbf{X}_j} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\frac{\partial {}^o\mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{X}_j} = \frac{\partial {}^o\mathbf{u}_i}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \mathbf{X}_j} + \frac{\partial {}^o\mathbf{u}_i}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial \mathbf{X}_j} + \frac{\partial {}^o\mathbf{u}_i}{\partial \gamma_i} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \mathbf{X}_j} \quad (7)$$

$$\frac{\partial [({}^o\mathbf{R}_{o'} {}^o\mathbf{B}_i) \times {}^o\mathbf{u}_i]}{\partial \mathbf{X}_j} = \frac{\partial ({}^o\mathbf{R}_{o'} {}^o\mathbf{B}_i)}{\partial \mathbf{X}_j} \times {}^o\mathbf{u}_i + ({}^o\mathbf{R}_{o'} {}^o\mathbf{B}_i) \times \frac{\partial {}^o\mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{X}_j} \quad (8)$$

由式(5)得

$$\frac{\partial {}^o\mathbf{u}_i}{\partial \alpha_i} = (-\sin \alpha_i \ 0 \ 0)^T \quad (9)$$

$$\frac{\partial {}^o\mathbf{u}_i}{\partial \beta_i} = (0 \ -\sin \beta_i \ 0)^T \quad (10)$$

$$\frac{\partial {}^o\mathbf{u}_i}{\partial \gamma_i} = (0 \ 0 \ -\sin \gamma_i)^T \quad (11)$$

由于 $\cos^2 \alpha_i + \cos^2 \beta_i + \cos^2 \gamma_i = 1$, 得

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial \mathbf{X}_j} = \frac{-\cos \alpha_i \sin \alpha_i}{\cos \gamma_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \mathbf{X}_j} + \frac{-\cos \beta_i \sin \beta_i}{\cos \gamma_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial \mathbf{X}_j} \quad (12)$$

将式(9)~(12)代入式(7), 得

$$\frac{\partial {}^o\mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{X}_j} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial \mathbf{X}_j} \mathbf{p}_i + \frac{\partial \beta_i}{\partial \mathbf{X}_j} \mathbf{r}_i \quad (13)$$

$$\mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_i & 0 \\ \cos \alpha_i \sin \alpha_i \\ \cos \gamma_i \end{pmatrix}^T$$

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \beta_i \\ \cos \beta_i \sin \beta_i \\ \cos \gamma_i \end{pmatrix}^T$$

为了求解 $\partial \alpha_i / \partial \mathbf{X}_j$ 和 $\partial \beta_i / \partial \mathbf{X}_j$, 选取绳牵引并联机器人的第 i 条闭链支路, 列写闭链约束方程

$${}^o\mathbf{P}_{o'} + {}^o\mathbf{R}_{o'} {}^o\mathbf{B}_i = {}^o\mathbf{A}_i + l_i {}^o\mathbf{u}_i \quad (14)$$

式中, l_i 为第 i 根绳长。

将式(14)两边对时间求导得

$${}^o\dot{\mathbf{P}}_{o'} - ({}^o\mathbf{R}_{o'} {}^o\mathbf{B}_i) \times \boldsymbol{\omega} = \dot{l}_i {}^o\mathbf{u}_i + l_i {}^o\dot{\mathbf{u}}_i \quad (15)$$

式(15)的左边写为

$${}^o\dot{\mathbf{P}}_{o'} - ({}^o\mathbf{R}_{o'} {}^o\mathbf{B}_i) \times \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{I} - ({}^o\mathbf{R}_{o'} {}^o\mathbf{B}_i) \times) \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{X}} \quad (16)$$

绳牵引并联机器人的绳长变化速率与末端执行器运动速度之间有 $(\dot{l}_1 \ \dot{l}_2 \ \dots \ \dot{l}_m)^T = -\mathbf{J}^T \dot{\mathbf{X}}$, 则

$$\dot{l}_i = -\mathbf{J}_i^T \dot{\mathbf{X}} \quad (17)$$

式中, \mathbf{J}_i^T 为 \mathbf{J}^T 的第 i 行。

结合式(5), 则

$$l_i {}^o u_i = \begin{pmatrix} -\cos \alpha_i \mathbf{J}_i^T \\ -\cos \beta_i \mathbf{J}_i^T \\ -\cos \gamma_i \mathbf{J}_i^T \end{pmatrix} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{N}_i \dot{\mathbf{X}} \quad (18)$$

将式(16)、(18)代入式(15)中, 得

$$l_i \begin{pmatrix} -\sin \alpha_i \dot{\alpha}_i \\ -\sin \beta_i \dot{\beta}_i \\ -\sin \gamma_i \dot{\gamma}_i \end{pmatrix} \dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{M}_i - \mathbf{N}_i) \dot{\mathbf{X}} \quad (19)$$

则

$$\dot{\alpha}_i = \left(\frac{-1}{l_i \sin \alpha_i} (\mathbf{M}_i - \mathbf{N}_i)_{1\cdot} \right) \dot{\mathbf{X}}$$

$$\dot{\beta}_i = \left(\frac{-1}{l_i \sin \beta_i} (\mathbf{M}_i - \mathbf{N}_i)_{2\cdot} \right) \dot{\mathbf{X}}$$

$$\dot{\gamma}_i = \left(\frac{-1}{l_i \sin \gamma_i} (\mathbf{M}_i - \mathbf{N}_i)_{3\cdot} \right) \dot{\mathbf{X}}$$

式中, $(\mathbf{M}_i - \mathbf{N}_i)_{1\cdot}$ 表示矩阵 $\mathbf{M}_i - \mathbf{N}_i$ 的第 1 行, 其余类似。

进一步, 可得

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \mathbf{X}_j} = \frac{-1}{l_i \sin \alpha_i} (\mathbf{M}_i - \mathbf{N}_i)_{1,j} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial \mathbf{X}_j} = \frac{-1}{l_i \sin \beta_i} (\mathbf{M}_i - \mathbf{N}_i)_{2,j} \quad (21)$$

式中, $(\mathbf{M}_i - \mathbf{N}_i)_{1,j}$ 表示矩阵 $\mathbf{M}_i - \mathbf{N}_i$ 的第 1 行第 j 列元素, 其余类似。

将式(20)、(21)代入式(13), 得到 $\partial {}^o u_i / \partial \mathbf{X}_j$ 。再

由式(8)计算 $\partial [({}^o \mathbf{R}_{o'} {}^o \mathbf{B}_i) \times {}^o \mathbf{u}_i] / \partial \mathbf{X}_j$, 最终由式(6)整理得到三维矩阵 \mathbf{H} 。

1.1.2 完全和冗余约束绳牵引并联机器人

对于 $m \geq n+1$ 的完全和冗余约束绳牵引并联机器人, 其末端执行器属于完整位置约束。根据结构力学中的刚化原理, 将绳牵引并联机器人视为整体研究对象, 得到外界作用在机架 O 点的等效外力和外力矩。接着, 抽取机架为研究对象, 如图 3 所示, 得到静平衡方程

$$\mathbf{A}\mathbf{T} + \mathbf{B}\mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (22)$$

$$\text{式中 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} {}^o \mathbf{u}_1 & \cdots & {}^o \mathbf{u}_m \\ {}^o \mathbf{A}_1 \times {}^o \mathbf{u}_1 & \cdots & {}^o \mathbf{A}_m \times {}^o \mathbf{u}_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times m}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ {}^o \mathbf{P}_{o'} \times & \mathbf{I} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

${}^o \mathbf{P}_{o'} \times$ —— 反对称矩阵

$${}^o \mathbf{P}_{o'} \times = \begin{pmatrix} 0 & -{}^o z_{o'} & {}^o y_{o'} \\ {}^o z_{o'} & 0 & -{}^o x_{o'} \\ -{}^o y_{o'} & {}^o x_{o'} & 0 \end{pmatrix}$$

由式(22)可知

$$\mathbf{J} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \quad (23)$$

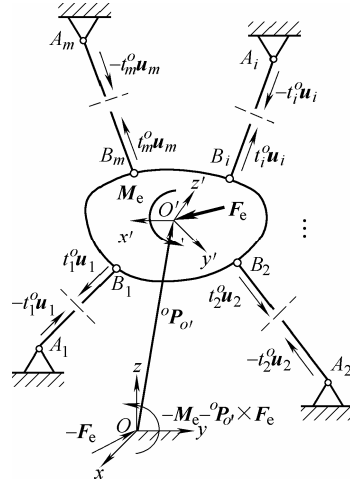


图3 机架的静力平衡矢量图

根据式(3), 得

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 = \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{X}} \quad (24)$$

式中 $\mathbf{H}_1 = \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times m \times n}$

$$\frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \mathbf{X}} \in \mathbf{R}^{n \times n \times n}$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{X}} \in \mathbf{R}^{n \times m \times n}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{X}} \in \mathbf{R}^{n \times m \times n}$$

首先, 求解三维矩阵 \mathbf{H}_1

$$\mathbf{H}_1^{(j)} = \frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \mathbf{X}_j} \mathbf{A} \quad (25)$$

式中, $\mathbf{H}_1^{(j)}$ 为三维矩阵 \mathbf{H}_1 的第 j 个平面, $j=1, 2, \dots, n$ 。

由于 $\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -{}^o \mathbf{P}_{o'} \times & \mathbf{I} \end{pmatrix}$, 根据矩阵导数理论得

$$\frac{\partial \mathbf{B}^{-1}}{\partial \mathbf{X}_j} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\partial ({}^o \mathbf{P}_{o'} \times)}{\partial \mathbf{X}_j} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (26)$$

将式(26)和矩阵 \mathbf{A} 代入式(24)中, 经过整理得到三维矩阵 \mathbf{H}_1 。

对于 6 自由度完全和冗余约束绳牵引并联机器人, $\mathbf{H}_1^{(1)}$ 第 i 列 $\mathbf{H}_{1i}^{(1)} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \cos \gamma_i \ -\cos \beta_i)^T$, $\mathbf{H}_1^{(2)}$

的第 i 列 $\mathbf{H}_{1i}^{(2)} = (0 \ 0 \ 0 \ -\cos\gamma_i \ 0 \ \cos\alpha_i)^\top$, $\mathbf{H}_1^{(3)}$ 的第 i 列 $\mathbf{H}_{1i}^{(3)} = (0 \ 0 \ 0 \ \cos\beta_i \ -\cos\alpha_i \ 0)^\top$, $i=1,2,\dots,m$, $\mathbf{H}_1^{(4)} = \mathbf{H}_1^{(5)} = \mathbf{H}_1^{(6)} = \mathbf{0}_{6 \times m}$ 。

接着, 求解矩阵 \mathbf{H}_2

$$\mathbf{H}_2^{(j)} = \mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{X}_j} \quad (27)$$

由式(22)中 \mathbf{A} 的构成可得

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{X}_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial {}^o \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{X}_j} & \frac{\partial {}^o \mathbf{u}_2}{\partial \mathbf{X}_j} & \dots & \frac{\partial {}^o \mathbf{u}_m}{\partial \mathbf{X}_j} \\ {}^o \mathbf{A}_1 \times \frac{\partial {}^o \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{X}_j} & {}^o \mathbf{A}_2 \times \frac{\partial {}^o \mathbf{u}_2}{\partial \mathbf{X}_j} & \dots & {}^o \mathbf{A}_m \times \frac{\partial {}^o \mathbf{u}_m}{\partial \mathbf{X}_j} \end{pmatrix} \quad (28)$$

将式(13)得到的 $\partial {}^o \mathbf{u}_i / \partial \mathbf{X}_j$ 代入式(27)、(28), 整理得到矩阵 \mathbf{H}_2 。

定理 对于完全和冗余约束绳牵引并联机器人, 通过机架的静力平衡方程和通过末端执行器的静力平衡方程求解 Hessian 矩阵的方法是等效的。

证明: 式(1)为末端执行器的力和力矩平衡方程, 可知结构矩阵

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} {}^o \mathbf{u}_1 & \dots & {}^o \mathbf{u}_m \\ ({}^o \mathbf{R}_{o'} \ {}^o \mathbf{B}_1) \times {}^o \mathbf{u}_1 & \dots & ({}^o \mathbf{R}_{o'} \ {}^o \mathbf{B}_m) \times {}^o \mathbf{u}_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times m}$$

$$m \geq n+1$$

式(22)为机架的力和力矩平衡方程, 结构矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} {}^o \mathbf{u}_1 & \dots & {}^o \mathbf{u}_m \\ ({}^o \mathbf{A}_1 - {}^o \mathbf{P}_{o'}) \times {}^o \mathbf{u}_1 & \dots & ({}^o \mathbf{A}_m - {}^o \mathbf{P}_{o'}) \times {}^o \mathbf{u}_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times m}$$

根据矢量封闭原理

$${}^o \mathbf{A}_i - {}^o \mathbf{P}_{o'} - l_i {}^o \mathbf{u}_i = {}^o \mathbf{R}_{o'} \ {}^o \mathbf{B}_i \quad i=1,2,\dots,m$$

$$({}^o \mathbf{R}_{o'} \ {}^o \mathbf{B}_i) \times {}^o \mathbf{u}_i = ({}^o \mathbf{A}_i - {}^o \mathbf{P}_{o'} - l_i {}^o \mathbf{u}_i) \times {}^o \mathbf{u}_i$$

由于 ${}^o \mathbf{u}_i \times {}^o \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$, $({}^o \mathbf{R}_{o'} \ {}^o \mathbf{B}_i) \times {}^o \mathbf{u}_i = ({}^o \mathbf{A}_i - {}^o \mathbf{P}_{o'}) \times {}^o \mathbf{u}_i$, 通过末端执行器的力(力矩)平衡方程和通过机架的力(力矩)平衡方程得到的结构矩阵 \mathbf{J} 是等价的。那么, 分别基于这两种方法, 从 Hessian 矩阵的基本定义 $\mathbf{H} = \partial \mathbf{J} / \partial \mathbf{X}_j$ 出发求解的 \mathbf{H} 也是等价的。

1.2 被动刚度的求解

设驱动单元的刚度为 k_{ai} , 绳的线弹性刚度为 EA/l_{0i} , E 、 A 分别是绳的弹性模量和横截面积, l_{0i} 为变形前的第 i 根绳长。根据驱动单元和绳的串联连接方式, 得到每个支链的等效刚度模型为

$$k_i = k_{ai} EA / (EA + k_{ai} l_{0i})。$$

对于式(2)中的第二部分, 由于 $\partial l / \partial \mathbf{X} = -\mathbf{J}^\top$ 可得

$$-\mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial l} \mathbf{J}^\top = \mathbf{J} \text{diag} \left[\frac{k_{ai} k' l_i^{-1} (1 + k'^{-1} t_i)}{k_{ai} + k' l_i^{-1} (1 + k'^{-1} t_i)} \right] \mathbf{J}^\top \quad (29)$$

式中, $k' = EA$, l 为变形后的第 i 根实际绳长, 由运动学位置反解求出。

2 完整刚度模型

对于 $m=n$ 的欠约束绳牵引并联机器人, 当末端执行器所受到的广义外力 \mathbf{W} 已知, 由式(1)得 $\mathbf{T} = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{W}$, 则其刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \mathbf{H} (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{W}) + \mathbf{J} \text{diag} \left[\frac{k_{ai} k' l_i^{-1} (1 + k'^{-1} t_i)}{k_{ai} + k' l_i^{-1} (1 + k'^{-1} t_i)} \right] \mathbf{J}^\top \quad (30)$$

对于 $m \geq n+1$ 的完全和冗余约束绳牵引并联机器人, 由式(1)得

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}^+ (-\mathbf{W}) + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \boldsymbol{\lambda} \quad (31)$$

式中 \mathbf{J}^+ —— \mathbf{J} 的 Moore-Penrose 广义逆, $\mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^\top (\mathbf{J} \mathbf{J}^\top)^{-1}$
 $\mathbf{J}^+ (-\mathbf{W})$ —— 方程式(1)的极小范数解

由于 $\mathbf{J}(\mathbf{I} - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{J} - \mathbf{J}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{I} - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \boldsymbol{\lambda}$ 是方程式(1)的齐次解, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^m$ 为任意矢量, $(\mathbf{I} - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \boldsymbol{\lambda}$ 形成了结构矩阵 \mathbf{J} 的零空间矢量, 对平衡末端执行器上的外载荷无贡献, 只用于牵引绳之间的相互平衡, 归为内力项。则刚度矩阵

$$\mathbf{K} = \mathbf{H} \left[\mathbf{J}^+ \mathbf{W} - (\mathbf{I} - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \boldsymbol{\lambda} \right] + \mathbf{J} \text{diag} \left[\frac{k_{ai} k' l_i^{-1} (1 + k'^{-1} t_i)}{k_{ai} + k' l_i^{-1} (1 + k'^{-1} t_i)} \right] \mathbf{J}^\top \quad (32)$$

可见, 绳牵引并联机器人的系统整体刚度分为两部分, 前者与绳拉力有关, 后者取决于绳的几何布置、末端执行器的位姿、驱动支链的物理参数及绳拉力。需要指出的是, 在第二部分中, 一般情况下 $k'^{-1} t_i$ 与 1 相比数量级微小, 对于系统刚度的影响可以忽略不计, 因此其主要取决于机构的结构参数和末端执行器位姿。在第一部分中, 通过改变内力系数 $\boldsymbol{\lambda}$ 可以动态地调整绳拉力大小, 进而影响系统的整体刚度。

3 仿真与试验比较分析

西安电子科技大学 FAST 项目组建造了口径 5 m 的大射电望远镜室内缩比模型, 如图 4 所示。

其馈源舱粗调系统属于 6 根索驱动的 6 自由度欠约束定位机构。相关参数如下: 塔高 $h=2.5$ m, 塔分布圆半径 $R=2.5$ m, 反射面直径为 4 m, 塔顶出索口的位置矢量 ${}^oA_1=(-2.500\ 0\ 2.500)^T$ m, ${}^oA_2=(-1.250\ -2.165\ 2.500)^T$ m, ${}^oA_3=(1.250\ -2.165\ 2.500)^T$ m, ${}^oA_4=(2.500\ 0\ 2.500)^T$ m, ${}^oA_5=(1.250\ 2.165\ 2.500)^T$ m, ${}^oA_6=(-1.250\ 2.165\ 2.500)^T$ m; 馈源舱质量 9 kg, 舱底直径 0.42 m, 索与馈源舱铰接点的位置矢量 ${}^{o'}B_1=(-0.210\ 0\ 0)^T$ m, ${}^{o'}B_2=(-0.006\ -0.014\ 0.210)^T$ m, ${}^{o'}B_3=(0.105\ -0.182\ 0)^T$ m, ${}^{o'}B_4=(0.015\ 0.002\ 0.210)^T$ m, ${}^{o'}B_5=(0.105\ 0.182\ 0)^T$ m, ${}^{o'}B_6=(-0.009\ 0.012\ 0.210)^T$ m; 柔索选用 GB20118—2006 圆股钢丝绳, 公称直径 1.2 mm, 单位长度质量 $0.007\ 5\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$, 横截面积 $A=1.131\ \text{mm}^2$, 弹性模量 $E=28\ \text{GPa}$; 驱动器刚度 $k_{ai}=400\ \text{N}\cdot\mu\text{m}^{-1}$ 。



图 4 FAST 5 m 室内缩比模型

基于上述方法, 计算当馈源舱仅受重力, 且位置矢量 ${}^oP_o=(0\ 0\ 0.980)^T$ m, 姿态角 $\phi=\theta=\psi=0^\circ$ 时的刚度矩阵。刚度矩阵 \mathbf{K}_1 为对称阵, 这是由其解析表达式决定的, \mathbf{K}_2 是与索力相关的主动刚度。总体刚度 \mathbf{K} 中左上角 3×3 维子阵反映系统的平动刚度, 单位为 $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, 右下角 3×3 维子阵反映系统的转动刚度, 单位为 $\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$, 剩余子阵为耦合刚度矩阵。平动刚度中沿 x 轴和 y 轴的刚度基本相同, 都大于沿 z 轴的刚度; 转动刚度中绕 x 轴和 y 轴的刚度要远大于绕 z 轴的刚度, 整体系统绕 z 轴的转动刚度最弱。由于馈源舱位于工作空间的中间位置, 并呈水平状态, 使得柔索对称分布, 舱索系统关于 z 轴是轴对称的, 因此沿 x 和 y 轴的平动刚度、绕 x 轴和 y 轴的转动刚度基本相同。

\mathbf{K} 的 6 个特征值 $k_{e1}=2.520\times 10^4$ 、 $k_{e2}=2.520\times 10^4$ 、 $k_{e3}=1.799\times 10^4$ 、 $k_{e4}=0.075\times 10^4$ 、 $k_{e5}=0.075\times 10^4$ 、

$k_{e6}=0.006\times 10^4$, 分别代表沿 6 个相关特征矢量 $\mathbf{v}_{e1}, \mathbf{v}_{e2}, \dots, \mathbf{v}_{e6}$ 方向上的刚度系数。最小特征值 $k_{e6}=0.002\times 10^4$, 其对应的特征矢量 $\mathbf{v}_{e6}=(0\ 0\ 0.002\ 0\ 0\ 1)^T$, 显然系统的最弱刚度为舱体绕 z 轴的转动刚度。

6 根索驱动的 6 自由度欠约束定位机构的刚度矩阵

$$\mathbf{K}_1=10^4 \times \begin{pmatrix} 2.525 & 0 & 0 & 0.002 & 0.100 & 0 \\ 0 & 2.525 & 0 & -0.100 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 1.795 & 0 & 0 & -0.003 \\ 0.002 & -0.100 & 0 & 0.077 & 0 & 0 \\ 0.100 & 0.002 & 0 & 0 & 0.077 & 0 \\ 0 & 0 & -0.003 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

索力

$$\mathbf{T}=(29.248\ 29.325\ 29.354\ 29.425\ 29.405\ 29.323)^T \text{ N}$$

刚度矩阵

$$\mathbf{K}_2= \begin{pmatrix} -86.742 & -0.006 & -0.037 & -0.014 & -7.495 & 0.004 \\ -0.006 & -86.747 & -0.007 & 7.485 & -0.013 & -0.011 \\ 0.244 & 0.039 & 46.754 & 0.003 & 0.018 & -0.223 \\ 0.116 & 18.512 & 0.002 & 15.330 & 0.104 & -0.016 \\ -18.494 & 0.107 & -0.011 & -0.11 & 15.305 & -0.005 \\ 0.004 & -0.011 & 0.027 & -0.019 & 0 & 15.136 \end{pmatrix}$$

系统刚度矩阵

$$\mathbf{K}=10^4 \times \begin{pmatrix} 2.516 & 0 & 0 & 0.002 & 0.099 & 0 \\ 0 & 2.516 & 0 & -0.099 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 1.799 & 0 & 0 & -0.003 \\ 0.002 & -0.098 & 0 & 0.079 & 0 & 0 \\ 0.098 & 0.002 & 0 & 0 & 0.079 & 0 \\ 0 & 0 & -0.003 & 0 & 0 & 0.002 \end{pmatrix}$$

图 5 为馈源舱绕 x 、 y 和 z 轴的转动刚度试验数据^[14]。试验中分别施加了 5 组力矩, 以计算得到的刚度平均值作为转动刚度。为了验证解析方法的正确性, 将计算结果与试验结果进行对比分析, 如下表。对于馈源舱绕 x 、 y 轴的转动刚度, 试验结果和理论分析值能基本吻合, 但也存在一定的误差。对于绕 z 轴的转动刚度误差较大, 主要是由于试验加载过程中扭转角度过大(不小于 7°)势必改变柔索的拉力 \mathbf{T} 和结构矩阵 \mathbf{J} , 进而影响刚度矩阵 \mathbf{K} , 导致测量值失真。同时, 模型的加工误差以及索力传感器等测量仪器的零漂也对试验数据有影响。

$$10^4 \times \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 = \\ 4.552 & 0.945 & 0 & -0.001 & 0.104 & 0 \\ 0.945 & 2.966 & 0 & -0.100 & 0.004 & 0 \\ 0 & 0 & 1.853 & 0 & 0 & -0.003 \\ -0.001 & -0.100 & 0 & 0.077 & 0 & 0 \\ 0.104 & 0.004 & 0 & 0 & 0.077 & 0 \\ 0 & 0 & -0.003 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

拉力

$$\mathbf{T} = (10.325 \ 57.120 \ 10.248 \ 57.107 \ 10.327 \ 57.035 \ 3 \ 69.219 \ 69.211)^T \text{ N}$$

刚度矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_2 = \\ -198.510 & -20.628 & -0.001 & 0.043 & -0.259 & 0.005 \\ -20.628 & -163.905 & -0.002 & 0.178 & -0.053 & 0.002 \\ 0.055 & 0.003 & 105.667 & 0.021 & 0.011 & -0.078 \\ -4.042 & 18.269 & 0.002 & 18.803 & -0.760 & 0.003 \\ -11.412 & 4.120 & 0 & -0.836 & 20.136 & -0.008 \\ 0.005 & 0.002 & 0.010 & -0.007 & 0.013 & 29.661 \end{pmatrix}$$

系统刚度矩阵

$$10^4 \times \begin{pmatrix} \mathbf{K} = \\ 4.532 & 0.943 & 0 & -0.007 & 0.104 & 0 \\ 0.943 & 2.949 & 0 & -0.100 & 0.004 & 0 \\ 0 & 0 & 1.863 & 0 & 0 & -0.003 \\ -0.001 & -0.099 & 0 & 0.079 & 0 & 0 \\ 0.103 & 0.004 & 0 & 0 & 0.079 & 0 \\ 0 & 0 & -0.003 & 0 & 0 & 0.003 \end{pmatrix}$$

4 结 论

(1) 基于微分变换和线几何理论,建立了欠约束、完全和冗余约束绳牵引并联机器人的刚度模型,推导了刚度矩阵的数学表达式。模型不仅考虑了驱动单元、绳的弹性变形对机构刚度的影响,而且考虑了机构在广义外力作用下由末端执行器微分运动所引起的结构矩阵的变化。

(2) 模型建立了绳牵引并联机器人刚度与包括末端执行器位姿、牵引绳根数、绳与末端执行器、机架的铰接点分布等构型参数以及绳拉力之间的显式联系,还原了刚度的非线性映射。

(3) 为了解决结构矩阵对末端位姿的变分-三维 Hessian 矩阵显式表达的困难,利用线几何理论,引入各牵引绳单位矢量在全局坐标系下的 3 个方向余弦作为过渡变量,变直接求导为分步求导,化解推导难度,得到 Hessian 矩阵的表达式。对于完全

和冗余约束绳牵引并联机器人,通过机架的静力平衡方程和通过末端执行器的静力平衡方程求解 Hessian 矩阵的方法是等效的。

参 考 文 献

- [1] 赵铁石, 赵延治, 边辉, 等. 空间并联机构连续刚度非线性映射[J]. 机械工程学报, 2008, 44(8): 20-25.
ZHAO Tieshi, ZHAO Yanzhi, BIAN Hui, et al. Continuous stiffness nonlinear mapping of spatial parallel mechanism[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(8): 20-25.
- [2] GALLINA P, ROSATI G, ROSSIA. 3-DOF wire driven planar haptic interface[J]. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 2001, 32(1): 23-36.
- [3] 郑亚青, 林麒, 刘雄伟, 等. 用于低速风洞飞行器气动导数试验的绳牵引并联支撑系统[J]. 航空学报, 2009, 30(8): 1549-1554.
ZHENG Yaqing, LIN Qi, LIU Xiongwei, et al. On wire-driven parallel suspension systems for static and dynamic derivatives of aircraft in low-speed wind tunnels[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2009, 30(8): 1549-1554.
- [4] DUAN Baoyan. A new design project of the line feed structure for large spherical radio telescope and its nonlinear dynamic analysis[J]. Mechatronics, 1999, 9(1): 53-64.
- [5] SIMAAN N, SHOHAM M. Geometric interpretation of the derivatives of parallel robots' Jacobian matrix with application to stiffness control[J]. Journal of Mechanical Design, Transaction of the ASME, 2003, 125(1): 33-42.
- [6] VERHOEVEN R. Analysis of the workspace of tendon-based stewart platform[D]. Duisburg: University of Duisburg-Essen, 2004.
- [7] 郑亚青. 绳牵引并联机构若干关键理论问题及其在风洞支撑系统中的应用研究[D]. 泉州: 华侨大学, 2004.
ZHENG Yaqing. Research on key theoretical issues of wire-driven parallel kinematic manipulators and the application to wind tunnel support systems[D]. Quanzhou: Huaqiao University, 2004.
- [8] KAWAMURA S, CHOE W, TANAK S, et al. Development of an ultrahigh speed robot FALCON using wire driven system[C]// Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1995, Japan, Nagoya. Piscataway: IEEE, 1995: 215-220.
- [9] YU Kun. Simultaneous trajectory tracking and stiffness control of cable driven parallel manipulator[D]. Buffalo: The State University of New York, 2008.
- [10] BEHZADIPOUR S, KHAJEPOUR A. Stiffness of cable-based parallel manipulators with application to

- stability analysis[J]. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 2006, 128(1): 303-310.
- [11] 隋春平, 赵明扬. 并联柔索驱动操作臂静刚度的理论分析[J]. *组合机床与自动化加工技术*, 2004(7): 72-92.
SUI Chunping, ZHAO Mingyang. Static stiffness study on parallel wire driven manipulators[J]. *Modular Machine Tool and Automatic Manufacturing Technique*, 2004(7): 72-92.
- [12] 隋春平, 赵明扬. 3自由度并联柔索驱动变刚度操作臂的刚度控制[J]. *机械工程学报*, 2006, 42(6): 205-210.
SUI Chunping, ZHAO Mingyang. Statics and stiffness study on a 3-DOF parallel wire driven flexible manipulator[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006, 42(6): 205-210.
- [13] MING A, HIGUCHI T. Study on multiple degree of freedom positioning mechanisms using wires(Part 1): Concept, design and control[J]. *International Journal of the Japan Society for Precision Engineering*, 1994, 28(2): 131-138.
- [14] 汤奥斐. 大跨度柔索驱动并联机器人关键问题分析及模型实验研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2007.
TANG Aofei. Analysis of key problem and model experimental research on a long-span wire driven parallel robot[D]. Xi'an: Xidian University, 2007.
- [15] QIU Yuanying, DUAN Baoyan, WEI Qiang, et al. Elimination of force singularity of the cable and cabin structure for the next generation of large radio telescopes[J]. *Mechatronics*, 2002, 12(7): 905-918.
- [16] 段宝岩, 仇原鹰, 张福顺, 等. 提高超大型天线索支撑结构刚度的方法及其对电性能的影响[J]. *机械工程学报*, 2009, 45(3): 138-143.
DUAN Baoyan, QIU Yuanying, ZHANG Fushun, et al. Method to enhance the stiffness of cable-suspended structure for super antenna and its effect on the electronic performance[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2009, 45(3): 138-143.

作者简介: 刘欣(通信作者), 男, 1981年出生, 博士。主要研究方向为并联机器人。

E-mail: xliu@mail.xidian.edu.cn

仇原鹰, 男, 1958年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机械CAD/CAE/CAM、机电光一体化。

E-mail: yyqiu@mail.xidian.edu.cn

盛英, 女, 1960年出生, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为流体操纵与控制系统。

E-mail: ysheng@xidian.edu.cn