第 42 卷 增 刊　　机 械 工 程 学 报　　Vol.42 Supp.
2006 年 5 月　　CHINESE JOURNAL OF MECHANICAL ENGINEERING　　May 2006

泛函多维空间理论在动态设计中的应用

蒋勇敏　许明恒

(西南交通大学机械工程学院　成都　610031)

摘要：多于三维空间的动态设计问题是机械设计的难题，原因是对多维空间没有恰当的认识方法和分析方法，因此，动态设计需要更抽象、更全面的分析方法。泛函空间理论是成熟的多维空间数学理论，是多维空间分析和表达的有力工具。用泛函处理动态设计问题，如多变量系统的描述，关系建模和优化处理等。物理意义完全不同的变量系统可能具有相同的范函结构，便于简化复杂问题的抽象和分析；设计内容是根据物理本质建模和对模型的分析计算，而不是传统的几何分析；设计方法不是类比，而是精确计算；设计结果是系统范函最优解。离心调速系统是一个典型的机械动力系统，根据动态要求，建立和求解该系统的能量泛函，完成系统的机械结构设计。实例表明：泛函设计方法是可行的、数字化的动态设计方法。

关键词：多维空间　路径规划　动态设计　泛函空间

中图分类号：TH122　TH123^{+}.1

0　前言

随着科学技术的发展，机械设计的主要任务是对多变量系统的动态设计。多变量动态空间是多于三维的空间，至少是包括时间的四维空间，没有直观几何意义。动态设计的任务主要是对超三维空间的表达和分析。现在的机械设计基本上处于类比设计和静态设计阶段[1-2]，缺乏认识多维空间的科学方法，对动态空间的描述和分析是困难的。困难在于不能在机械结构设计中同时表达和研究以下问题：机械传动系统的运动位置和运动性能的展示，机构运动弹性动力特性，空间的分时占用，空间相遇和运动物体的捕捉，不同运动参数对机构力学性能和运动性能的影响，高速机构的结构与动态强度问题等。这些问题涉及位置、切线、法线、时间、速度和加速度，归结起来是同时研究函数及其导数的问题。

泛函空间理论是多维空间描述和分析的数学理论，泛函分析建立了三维空间与无穷空间的联系。通常三维空间中的几何直观，数学方法成熟，有助于理解在高维空间，甚至无穷维空间中出现的概念和公式[3-4]。

用泛函空间理论分析机械设计的多维空间的描述、表达和整体优化等动态设计问题，以便机械设计从几何类比设计向精确计算设计转化，从三维空间向多维空间过渡，改变设计方法，增加设计内容，扩展机械设计的深度和广度。

* 四川省教育厅自然科学基金重点资助项目(2004A163)。20051027 收到初稿，20051230 收到修改稿

1　N 维设计空间的泛函问题

1.1　设计空间的扩展和组成

机械设计的发展已从静态设计走向动态设计，从三维空间面向多维空间，从机械专业面向机、电、磁、液和光等多专业融合，从类比设计走向精确设计，从顺序设计转向并行设计，从专注结构设计到关注产品生命过程，机械设计的不断发展将使设计空间的维度和容量不断扩张。

结构参数和表达物理过程的函数或微分方程组是形成总体性能的基础。结构参数或函数序列组成机械设计的多维空间。设计空间变量一般用矢量表示，形式为

$$\boldsymbol{X}=\left[x_1, x_2, \cdots, x_n\right]^{\mathrm{T}}$$

子空间是具有相同特性的参数集合。设计空间可根据以下功能划分子空间：几何形体、形状约束、几何要素；公差、表面技术要求；静力学性能；运动学性能；动力学性能；工艺性能；与几何拓扑相关的其他性能等。这些性能用函数及导数来表示，如：轮廓曲线设计要考虑曲线函数和导数，希望具有 n 阶连续导数，以保证轮廓的光滑性；机械运动设计希望运动方程具有三阶以上连续偏导数，以保证运动的平稳性。

1.2　设计空间泛函问题

泛函比高等数学、线性代数更抽象、更综合，研究不同函数组成的空间，用抽象算子分析函数空间的性质和变化趋势。通常的泛函问题是：多维函

数空间的描述和分析；根据要求在函数群体中选择一组最优函数。

机械设计过程是：根据预先给定的系统某些动态特性，选择描述参数，推导符合设计条件的函数解，选择一组最优函数，如轮廓函数、运动函数和强度函数等，以满足期望准则。例如：振动频率在一定范围内挠度最小、质量最轻的设计，这是动力学的逆问题，即预先给定系统的频率、应力、应变和位移条件来确定机械系统的材料特性和几何特性，这是求解设计泛函极值的问题。动态设计问题是泛函问题：描述和分析机械设计的多维空间，求解设计泛函极值。

动态设计的泛函问题一：同时研究 N 维变量，要建立能度量 N 维变量的空间。

动态设计的泛函问题二：同时研究变量及其变化率。要解决的关键问题是建立能同时度量函数及其 N 阶导数的泛函空间。

动态设计的泛函问题三:选择符合动态条件的最优函数解，要选择恰当的算子，求解设计泛函极值。

2 泛函对 N 维设计空间度量和简化

2.1 设计空间描述

传统的机械设计空间是三维 Euclid 空间，用距离或角度来度量，可以引入连续、极限来分析。对多维空间，如多维线性空间，一般地说，没有度量，只有引进范数，使之成为一个赋范空间。用范数来度量，才能相应的引入开集、闭集、收敛和连续的概念。 为了解决动态设计的泛函问题一，应该定义一个赋范空间。

定义 设 X 是数域 K(实数域 R 或复数域 C)上的矢量空间,若对每个 $x\in X$,指定了一个实数 $\|x\|$,称为 x 的范数，它满足以下范数公理

(1) 齐次性：$\|ax\|=|a|\|x\|$

(2) 三角不等式：$\|x+y\|\geq\|x\|+\|y\|$

(3) 正定性：$\|x\|\geq 0 \quad \|x\|=0\Leftrightarrow x=0$

以上 x，$y\in X$ ，$a\in$ K 则称 X 为 K 上的赋范矢量空间，简称为赋范空间；当必须明确指出范数时写作(X，‖ • ‖)。若 K=R (或 C)，则称 K 上的赋范空间为实(或复)赋范空间。

范数的定义方式是多种多样的。可根据物理意义定义范数，三维空间距离、运动位移、速度和加速度可以分别定义为范数，也可以组合在一起定义为范数。对同样的函数可以赋予不同的范数。如：$C[a，b]$是定义在$[a，b]$上的所有连续可导函数，构成的线性空间 X，对于每一个 $x\in X$ 赋予范数

$$\|x\|=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)|$$

或
$$\|x\|=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)|+\max_{a\leq t\leq b}|\dot{x}(t)|$$

或
$$\|x\|=\int_a^b|x(t)|\mathrm{d}t$$

都可以成为赋范空间。N 维 Euclid 空间规定距离为范数

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

N 维 Euclid 空间也是一个赋范空间。

范数是多维空间的度量，范数定义方式是人为的，其物理意义千差万别。有些范数代表的物理意义用三维空间概念是无法理解的。多维空间所能表达的物理意义比三维空间更加丰富多彩。范数可以同时度量 N 个变量，这使系统的、全面的、同时描述和分析众多设计空间变量成为可能。

2.2 泛函对 N 维设计空间的简化

泛函分析具有高度的综合性和抽象性，不关注函数的具体结构和物理意义，关注函数体系和函数的共性。用泛函分析机械设计空间，使得几何、静力学、运动学和动力学设计函数具有同一的泛函结构。

由于范数定义的多样性，使得研究问题的方式具有综合性、灵活性。以距离为范数的赋范空间是传统的几何空间，以位移、速度和加速度的线性组合为范数的赋范空间，可以方便地直观表现运动形式之间的差异。以轮廓曲线的函数和 N 阶导数的线性组合为范数的赋范空间可以方便地表示曲线的光顺和加工连续性等。

定义 对任给 $u\in C^m(t)$，规定范数

$$\|u\|_{m,p}=\left(\sum_{|a|\leq m}\|\partial^a u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$S=\{u\in C^m(t):\|u\|_{m,p}<\infty\}$是一个赋范空间，其完备化是一个 Banach 空间，称之为 Sobolev 空间。

定义 Sobolev 空间可以解决动态设计的泛函问题二，即同时研究变量及其变化率的问题。虽然范数 $\|u\|_{m,p}$ 相等的两个函数并不一定相同，但是相同函数的范数一定相等，因此，可以辅助其他条件，利用范数研究函数。位置空间、运动空间和能量空间都涉及函数及其导数，有关运动的 Sobolev 空间：设运动空间由位移、速度、加速度和加加速度等组成，分别用 u，u'，u''，u''' 表示，$u\in C^m(t)$ 规定范数

$$\|u\|_{m,p}=\left(\sum_{|a|\le m}\left\|\partial^{a}u\right\|_{p}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$\left(\int_{x_1}^{x_2}|u|^2\,\mathrm{d}t+\int_{x_1}^{x_2}|u'|^2\,\mathrm{d}t+\int_{x_1}^{x_2}|u''|^2\,\mathrm{d}t+\int_{x_1}^{x_2}|u'''|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\|u\|_{m,p}$ 范数可以同时度量 u，u'，u''，u''' 四个变量。动力学空间变量：u，u'，u''，mu''，其中 m 为质量，轮廓曲线空间变量：$C^0(t)$，$C^1(t)$，$C^2(t)$，…，$C^n(t)$ 都可用类似的方法定义范数，在形式上都一样，都是 Sobolev 空间。

把参数和参数的导数合并定义范数的 Sobolev 空间，以统一的范函结构包含了动态设计的主要内容。这种高度抽象综合的结构，使得机械设计空间的分析更简单、更全面。

3　泛函分析动态设计实例

无论是把多种参数统一规定为范数或独立定义范数，直接用范数来分析泛函问题是离散的、繁琐的。如果直接用微积分分析，因为微积分只能研究一个函数，对于函数空间来说也是离散的、繁琐的。泛函的各种算子是分析泛函的有效手段。

泛函优化有效的理论方法是微分学方法的扩充：Gateaux 微分相当于变分学的变分，或微分学的方向导数；Fréchet 微分相当于微分学的梯度或全微分或梯度。利用 Gateaux 微分和 Fréchet 微分可以方便地求解线性空间泛函极值，可以方便地得到局部极值的必要条件。若 X 是一线性空间，f 是 X 上的实值泛函，并且 Gateaux 可微，或 Fréchet 可微，则 f 在 $x_0\in X$ 取得极值的必要条件是，对于所有的 $h\in X$，有 $\delta f(x;h)=0$。即可以通过求变分的方法求解泛函极值。这是分析计算最常用、最简捷的办法。

就目前来看，动态设计主要解决运动学和动力学问题，如振动频率、周期、惯性力等，所涉及的理论主要是分析力学。分析力学的主要理论是根据泛函极值的必要条件推导出来的，如哈密顿原理、拉格朗日方程等。哈密顿原理研究由广义位移及其导数、时间等组成的能量泛函：如果约束是理想、完整的，且主动力是保守力，真实地运动是使泛函

$$S(q)=\int_{t_2}^{t_1}L(q,q',t)\,\mathrm{d}t=\int_{t_2}^{t_1}\left[T(q,q',t)-V(q,t)\right]\mathrm{d}t$$

取极值的那个运动。如果是泛函 $S(q)$ 取极值的函数存在且唯一，根据泛函微分理论，等价于泛函极值的必要条件 $\delta L(q_a;h)=0$ 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_a'}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_a}=0$$

此式称为拉格朗日方程式[5-6]，求解此式，只需求偏微分或微分，使泛函极值的求解简单易行。

例：设计如图所示的离心调速器，质量为 M 的滑块 C 可沿着竖直轴滑动，整个系统可绕该轴转动，A 点固定，B、D 处铰接并各置质量为 m 的质点。要求：系统到达稳定转速 ? 时，振动周期为 T。确定杆长 a。

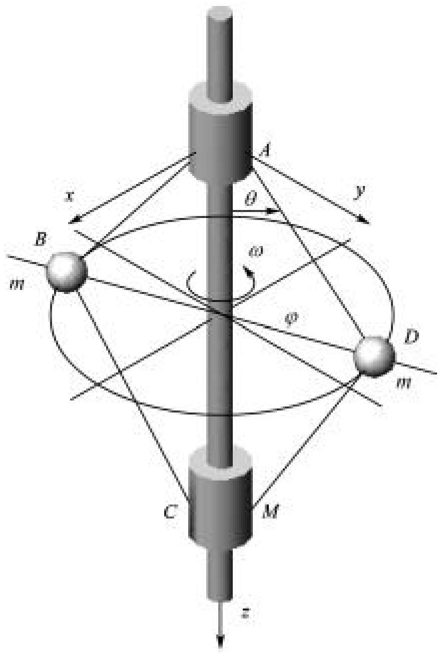

图　离心调速器振动周期设计

(1)写出拉氏方程。面 $ABCD$ 与 x 轴的交角为 f，$q=\angle DAC$，自由度 F=2，选 q，f 为广义坐标，约束是理想、稳定的。质点 m 的直角坐标

$$\begin{cases}x=a\sin ?\cos f\\ y=a\sin q\cos q\\ z=a\cos ?\end{cases}$$

拉格朗日函数

$$L(?,f,?',f')=2\frac{m}{2}\left[(a?')^2+af'^2\sin ?\right]+$$

$$\frac{M}{2}\left[4a^2(?'\sin ?)^2\right]+2mga\cos ?+2Mga\cos ?$$

求偏微商

$$\frac{\partial}{\partial ?}L(?,f,?'f')=$$

$$\left[(2mf'^2+4M?'^2)a^2\cos ?-(2m+2M)ga\right]\sin q$$

求偏微商，化简

$$\frac{\partial}{\partial ?'}L(?,f,?'f')=2ma^2?'+4Ma^2?'\sin^2 ?$$

拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2ma^2?'+4Ma^2?'\sin^2 ?)=$$

$$\left[(2mf'^2+4M?'^2)a^2\cos ?-(2m+2M)ga\right]\sin ?$$

即
$$\left(m+2M\sin^2 ?\right)?''=$$
$$\left[\left(mf'^2-2M?'^2\right)\cos ?-\left(m+M\right)\frac{g}{a}\right]\sin ?$$

(2) **求相对平衡的条件及微振动的周期，已知系统以匀角速度**w **绕竖直轴转动，**$f'=w$ **，在平衡位置**

$$\left[mw^2\cos q-(m+M)\frac{g}{a}\right]=0$$

化简得

$$m+2M?'\sin^2 ?=\left[m?^2\cos ?-(m+M)\frac{g}{a}\right]\sin ?$$

在平衡位置

$$m?^2\cos q_s=(m+M)\frac{g}{a}$$

解出角度q_s **，并把**q_s **代入拉格朗日方程得到**

$$(m+2M\sin^2 q)?''=\left[m?^2(\cos ?-\cos q_s)\right]\sin ?$$

利用公式

$$\cos q-\cos q_s=-2\sin\left(\frac{?+q_s}{2}\right)\sin\left(\frac{?-q_s}{2}\right)$$

定义$f=q-q_s$ **，取微振动近似：**$\frac{?+q_s}{2}=q_s$ **，则**

$$\cos ?-\cos q_s=-2\sin q_s\sin\frac{f}{2}=-f\sin q_s$$

定义取微振动近似

$$(m+2M\sin^2 q_s)f''=\left[m?^2(-\sin q_s f)\right]\sin q_s$$

$$f''=\frac{-m?^2\sin^2 q_s}{m+2M\sin^2 q_s}f$$

$$W^2=\frac{m?^2\sin^2 q_s}{m+2M\sin^2 q_s}$$

微振动频率

$$W=?\sqrt{\frac{\sin^2 q_s}{1+2\frac{M}{m}\sin^2 q_s}}$$

在平衡位置上附近的微振动周期

$$T=\frac{2\pi}{O}=\frac{2\pi}{?}\sqrt{\frac{1+2\frac{M}{m}\sin^2 q_s}{\sin^2 q_s}}$$

解出

$$\sin q_s=\left[\left(\frac{?T}{2p}\right)^2-\frac{M}{m}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

设定： $T=0.6\ \mathrm{s}$，$M/m=3$，$?=10\ \pi\cdot\mathrm{s}^{-1}$，

解得

$$\sin q_s=0.408\ 2\qquad q_s=24.0949^\circ$$

由平衡位置上的角度q_s

$$mw^2\cos q_s=(m+M)\frac{g}{a}$$

解得

$$a=\frac{\left(1+\frac{M}{m}\right)g}{?^2\cos q_s}=0.0435\mathrm{m}$$

由以上动态设计的简单范例可知：根据微振动周期 T **的表达式可以设计出符合动力学要求的离心调速器结构。设计步骤是：根据给定系统物理特性，选择运动参数来描述，建立泛函规律，推导出符合设计条件的函数解。这与传统设计不同，不再局限于尺寸参数或三维空间，直接面对系统的物理本质，灵活地选择参数，建立泛函规律，用求解泛函规律的方法设计。**

4 结论

用泛函理论描述机械设计多维空间，选用参数不再是几何尺寸，描述对象不再是几何形体，表达方式不再局限于三维图形。而是直接对系统物理本质建模，用多种方式表达，同时表达不同类型的参数；设计手段不再局限于三维图形的编排，可以用子空间理论分析和比较不同设计领域的参数。利用范数可以讨论设计函数的 Banach **空间的收敛和极限问题。利用** Hilbert **空间讨论最优化问题，利用微分算子求解动态空间函数、导函数及参数的最优解。总之，泛函理论可以解决动态设计的难题，可以对动态设计起到推进作用。**

参 考 文 献

[1] 柯尊忠，徐业宜. 机械设计中的非线性动力学和动态设计中的一些问题[J]. 机械工程学报，1995, 31(4)：36-42.

[2] 乌兰木其，邓家禔. 现代产品设计方法及其演进[J]. 机械工程学报，2000，36(5)：1-6.

[3] 王日爽. 泛函分析与最优化理论[M]. 北京：北京航空航天大学出版社，2004.

[4] 胡适耕. 应用泛函分析[M]. 北京：科学出版社，2003.

[5] 纪哲锐. 数字化经典力学[M]. 北京：清华大学出版社，2001.

[6] ALTINTAS Y, EYKORKMAZ K. Feedrate optimization for spline interpolation in high speed machine tools[J]. CIRP, 2003, 52(1)：288-305.

NORM FUNCTIONAL MULTIDIMENSIONAL SPACE THEORY USED FOR DYNAMIC MECHANICAL DESIGN

JIANG Yongmin　XU Mingheng
(*Department of Mechanical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031*)

Abstract：A dynamic design method using functional analysis is described. Lacking of proper realization and analyses method，it is difficult to deal with dynamic design problem in more than three-dimensional space. Therefore, more abstractive and comprehensive design method is needed to solve the problem. Functional analysis theory is a mature hyperspace mathematics theory. It is a potent tool for multidimensional space analysis and expression. It can be used to solve the dynamic design problem such as multivariate system description, relation model establishment, optimization treatment etc. The variables which have dissimilar physics signification may have similar norm functional expression, so it is benefit for the simplification and abstract of complicated question. The content of design is to establish the model and to analyse the model. The way of design is rigorous calculation rather than geometric analogy, the result of design is optimal solution of system functional. Centrifugal velocity modulation system is a typical mechanical dynamical system. According to the dynamic requirement，the energy norm function of the system has been built-up and calculated. In this way, the mechanical structure design be worked out. The results demonstrate that this design method is feasible and accurate digitizing dynamic design methods.

Key words： Multidimensional space　Path planning　Dynamic design　Norm functional space

作者简介：蒋勇敏，男，1958 **年出生，博士研究生，成都电子机械高等专科学校副教授。主要研究方向为机械设备及自动化、智能优化控制算法。负责省级科研项目** 1 **项，发表论文** 20 **余篇。**
E-mail：jyminphd@163.com