

# 平面图形放缩机构\*

廖启征 李端玲

(北京邮电大学自动化学院 北京 100876)

摘要：放大尺是由单个平行四边形机构组成的，它可以对两点间的距离进行按比例的放大或缩小，但是不能对平面上的几个点间的距离同时进行放大或缩小，如果将多个平行四边形按照一定的顺序和角度连接起来，再加上一个驱动就可以完成这一工作。按这种方式构成的机构既可以是单自由度的普通机构，也可以是单自由度的过约束机构。加上一些带标记的滑动副，这种机构可以组成一些由直线段构成的大小可变的图形。

关键词：平行四边形机构 平面放缩 过约束机构

中图分类号：TH112

## 0 前言

利用平行四边形机构制成的放大尺，可用作绘图仪器或度量工具等，在实践中有着广泛的应用。如图 1 所示，把平行四边形的两条边延长，由于两个三角形  $OXA$  与  $OYB$  相似，所以  $OA$  与  $OB$  两点间的距离永远保持固定的比例。

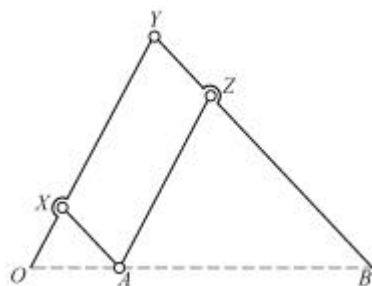


图 1 放大尺机构原理

目前市场上有一种大小可变的“魔术圆盘”玩具，它是由若干个全等的等腰三角形铰接而成。由其两腰组成一系列平行四边形或菱形，如图 2 所示。该机构有 1 自由度，可以大小变化。如果对其自由度进行计算，可以发现它是过约束机构。另外一种魔术花球组成的机构<sup>[1]</sup>，则把这一方法推广到了空间。这种魔术花球机构实际上是对球面上 26 个点间的距离同时进行放大或缩小的机构。这 26 个球面点是这样选择的：作球的外切正方体，把球心与正方体 6 个面的中心，8 个顶点，12 条棱的中点共 26 个点作连线，与球面交于 26 个点。以上两种机构都是对规则的平面或空间图形进行放缩。参考文献

[2,3]通过假定多个成比例的曲柄滑块机构，构造了可以放大或缩小的由全转动副组成的空间多面体，而且此多面体是任意的，并不一定要求是正多面体。然而该方法不适合于平面，当构造平面图形时，需要很多滑动副，否则将会发生奇异，而没有确定的形状。

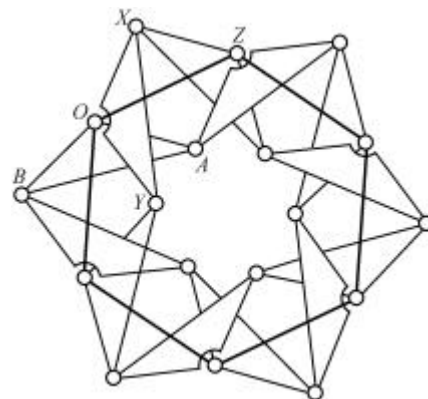


图 2 魔术圆盘简图

介绍一种方法，可以通过一定的步骤，把任意多个平面点连接成一个由多个平行四边形构成的单自由度的机构，从而对这些点间的距离同时进行放大或缩小。这种机构可以应用于广告等商业领域，或对存储空间或工作空间有限制的场合，完成对构件平面位置的驱动。

## 1 魔术圆盘的工作原理

图 2 所示的魔术圆盘是由 6 组互相铰接的等腰三角形组成。图 3 表示其中的一组，是一对等腰三角形。两个等腰三角形  $OAB$  与  $OXY$  全等，且在  $O$  处铰接。当两个三角形以  $O$  为中心相对转动时，下面证明直线  $BY$  与直线  $XA$  的夹角保持不变。

\* 国家 973 项目(2004CB31800)、国家自然科学基金(50475161)和北京市自然科学基金(3053017)资助项目。20050107 收到初稿，20050427 收到修改稿

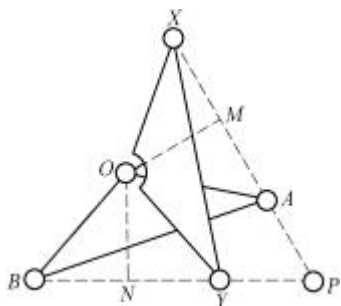


图 3 魔术圆盘中的一组等腰三角形

作  $OM \perp XP, ON \perp BP$ ,  
 因为四个腰相等, 所以  $\angle XOM = \angle YON$   
 $\angle XOY = \angle MON = \text{定值}, P = \text{定值}$   
 又  $PA = PY, PB = PX$

当  $P$  取  $360^\circ/n$  时 ( $n$  为魔术圆盘中等腰三角形的组数), 只要取  $n$  组等腰三角形就可以组成一个首尾相接的封闭的多边形。如图 2 所示,  $OXZA$  为平行四边形或菱形。当两个三角形相对转动时, 此菱形的对角线  $OZ$  长短变化。由一系列的对角线可以组成一个平面多边形, 所以此多边形大小根据每组中两个三角形的相对转动而大小变化。如果把  $OZ$  等一系列的对角线安装上一个有标志的滑动副, 如图 2 中的粗实线, 则可以看到此粗实线将随两组三角形的相对转动而长度变化。

## 2 任意图形放缩机构的构造

当每组中的两个等腰三角形转动到重合位置时, 变成图 4 所示形状, 所有三角形的腰组成了平面正多边形, 这也就是需要放缩的图形。按照魔术圆盘的方法构造的只能是平面正多边形, 即把圆周上均布的点间的距离同时放缩。由此得到启发, 可以把此方法推广到任意图形的放缩。

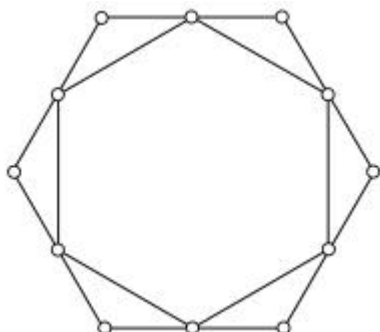


图 4 每组中的等腰三角形重合时的图形

如图 5 所示, 可以把一个字母 A 进行放缩。首先把字母 A 上面的封闭三角形分为偶数份, 例如分为 6 份, 可以不要求平均分。其他部分可以任意分为几份, 也可以保持一份。在图 5 中大圆圈把字母

分成 8 段直线段, 其中包括 A 字上部的三角形 6 段直线段和 A 字下半部分的两段直线段, 分配的结果要求所有环路全为偶数条直线段, 以便后面不同旋向的杆件可以互相衔接。然后把所有的直线段按照固定的比例分成两部分。为了简单先把它平均分为两段。如图 5 中小圆圈把各个直线段平均分为两段。然后以各个大圈为中心, 把与其连接的直线段和小圈放在一起, 构成一个构件。如图 6 所示, 一共构成 8 个构件。再按照相邻构件旋向相反的原则, 把相邻构件向顺时针、逆时针方向旋转一定的角度, 并在小圈处把它们铰接起来, 如图 7 所示。按照同样的方式制作另一套, 但旋向相反, 旋转角度相同。最后把两套机构在大圈处铰接, 构成一个机构, 如图 8 所示。如果需要显示清楚, 可以把各个大圈用带标志的滑动副连接起来, 就成为一个大小可变的字母 A 的形状了。

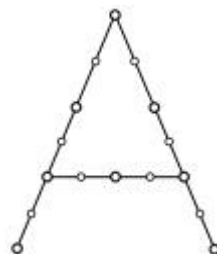


图 5 字母 A 封闭部分分为 6 份, 取中点

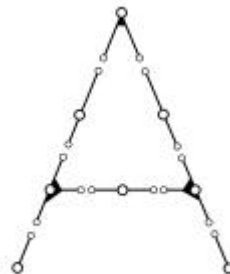


图 6 分解为单个构件

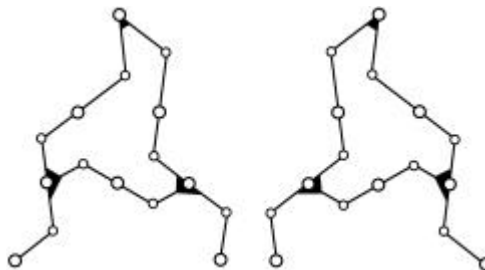


图 7 构件向两个方向旋转、装配, 并制作两套, 两套旋向相反

按照此方法可以把任意形状的图形放大或缩小, 只要它是由若干直线段构成的。从理论上来说, 这样构成的机构其放缩的图形可以从最大一直缩小到零。当然其实际大小还要受具体结构和传动角的

限制，而且各个构件之间还有可能发生干涉。

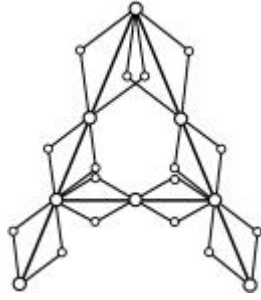


图 8 两套机构重叠，在大圈处铰接，加入粗黑线滑动副

小圈分线段的比例也可以不是二分之一，例如三分之一。如图 9 所示，其中相邻线段分配的比例相反，一个 1/2，另一个 2/1。然后按照图 10 所示，把它们分解成构件。在图 11 旋转时，与前面稍有不同，比例小的构件旋转角度大，例如旋转 30°，比例大的构件旋转角度小，例如 14.48°。使得两边的长度与角度的正弦之乘积相等，即  $(L_1 \times \sin 30^\circ = L_2 \times \sin 14.48^\circ)$ 。然后按照相反旋向作出另一套机构。最后按照图 12 所示，把两套机构在大圈处铰接，并加入滑动副。按照这种比例制作的机构其变化范围最小不是零，而是两部分杆件的差。

图 13 所示是一个字母 R 的构造过程。首先把字母 R 分为 8 段线段，其中上面环路部分分为 6 段，下面各一段，用大圈分开。每个线段再一分为二，用小圈分开。图 14 所示是把它们拆成构件。图 15 是按照顺、逆时针旋转一定的角度。图 16 是把两部分在大圈处铰接，装配成一个机构，并加入滑动副。

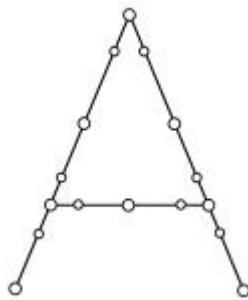


图 9 小圈分线段 1/2

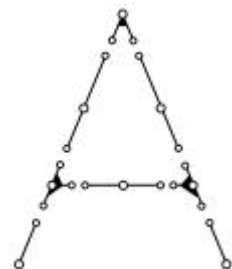


图 10 分解为单个构件

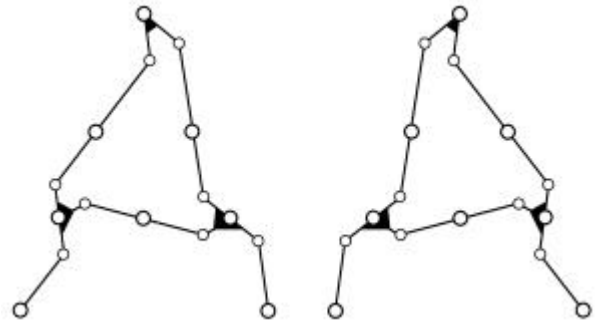


图 11 构件向两个方向旋转、装配，并制作两套，两套旋向相反

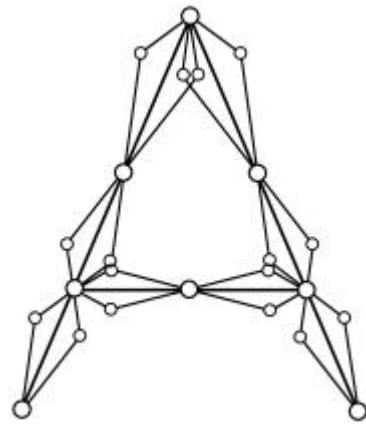


图 12 两套机构重叠，在大圈处铰接，并加入粗线滑动副

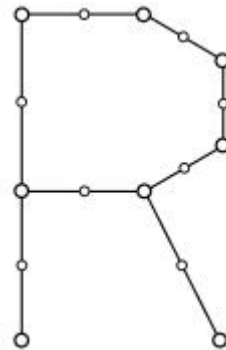


图 13 字母 R，上面环路分为 6 份用大圈分开，每份以小圈平均分

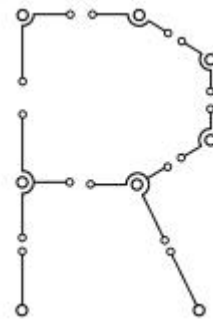


图 14 分解为构件

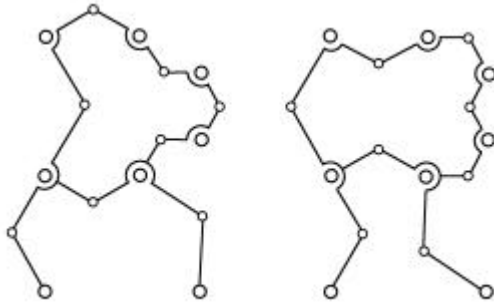


图 15 构件向两个方向旋转、装配，并制作两套，两套旋向相反

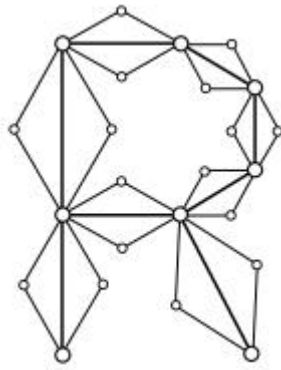


图 16 两套机构重叠，在大圈处铰接，并加入粗线滑动副

### 3 机构自由度的计算

根据图 2 所示，把 6 对等腰三角形按照顺时针铰接起来。根据前面的分析，如果在  $B$ 、 $Y$  处没有铰接，从而头尾两组等腰三角形没有封闭，但这两个位置总是重合的。按照  $B$ 、 $Y$  处没有铰接计算，共 12 个构件，铰链共 16 个，所以自由度  $f = 3 \times (12 - 1) - 2 \times 16 = 1$ 。

如果在  $B$ 、 $Y$  处铰接，则增加了 4 个约束，显然是过约束机构，或者称为虚约束。对于任何一个环路都存在这一现象。

### 4 结论

采用多个平行四边形机构互相联接起来，构成一个全转动副的平面单自由度机构，该机构可以对平面上由线段组成的任意图形进行放大或缩小。当图形中包括环路时，一般会得到过约束机构。其放

缩效果如果不考虑干涉和传动角等因素，理论上可以把平面图形从最大缩小到零。这种机构可以应用于商业领域或工程中对存储空间或工作空间有限制的场合，实现一系列平面图形的大小驱动。

### 参 考 文 献

- 1 Dai J S, Li D L, Zhang Q X, et al. Mobility analysis of a complex structured ball based on mechanism decomposition and equivalent screw system analysis. *Mechanism and Machine Theory*, 2004, 39 ( 4 ): 445 ~ 458
- 2 Wohlhart K. Irregular polyhedral linkages. In : *Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science*, Tianjin, China, 2004, 4 : 1 083~1 087
- 3 Baker J E, Tarnai T. On modeling an expandable virus. In : *Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science*, Tianjin, China, 2004, 4 : 1 295 ~ 1 299

## MECHANISMS FOR SCALING PLANAR GRAPHS

Liao Qizheng Li Duanling

(Automation School, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876)

**Abstract :** Traditional pantograph mechanism consists of a parallelogram with two extended sides. It can scale the distance from the pole to a given point. However it can not scale the distance between any given points. This goal is achieved by using inter-connected multi parallelograms with a link chosen as a driver. The result is a class of linkages that can enlarge or shrink a planar graph by driving a revolute pair. These mechanisms can be single degree-of-freedom or over-constrained.

**Key words :** Parallelogram mechanisms Planar pantograph Overconstrained linkages

作者简介：廖启征，男，1947 年出生，教授，博士生导师。主要研究方向为机构学、机器人学。

E-mail : qzliao@bupt.edu.cn

李端玲，女，1974 年出生，博士，讲师。主要研究方向为机构学、机器人学。

E-mail : liduanling@163.com