

含误差的直齿轮的齿廓修形*

孙月海 张 策 葛 楠

(天津大学机械工程学院 天津 300072)

摘要: 依据齿轮传动载荷与轮齿变形的关系, 推导出定载荷条件下, 修形直齿轮静态传动误差与齿对综合修形参数的关系表达式。提出含制造误差修形齿轮修形参数的确定原则: 理论设计修形齿轮的最大综合修形量应能消除含误差齿廓轮齿在啮入和啮出位置产生的几何干涉, 理论设计修形齿轮的静态传动误差应保持最小的变化。给出了含制造误差修形直齿轮修形参数的计算公式, 阐述了相应的确定方法。系统动态响应计算表明该方法所获得的修形齿轮具有良好的减振效果。

关键词: 直齿轮 静态传动误差 齿廓修形 齿轮传动 振动

中图分类号: TH132.41

0 前言

已有研究表明^[1,2], 齿轮静态传动误差的变化与齿轮传动的振动和噪声有密切关系, 减小齿轮静态传动误差的变化幅值, 是减小齿轮传动动载荷、降低齿轮振动和系统噪声水平的有效途径。通过齿轮修形, 减小齿轮静态传动误差幅值的变化, 实现对齿轮传动误差的控制, 可以达到减小齿轮传动振动的目的。

以往研究大多不计修形齿廓误差的影响, 研究方法多是计算多组齿廓修形曲线下的静态传动误差, 或分析比较其静态传动误差的傅里叶频谱幅值^[2-4], 来选定一组最优修形参数。对于具有工程应用价值的含误差修形齿廓的研究, 有关修形参数具体数值的报道^[1]差异较大, 没有给出一种基于最大限度地减少静态传动误差变化的直接确定齿廓修形参数的方法。

为使问题简化, 暂不考虑齿宽方向的变化因素和温度变化对齿轮修形的影响。

1 理论分析

依据弹性力学原理, 齿对 i 的啮合力可用下式表示

$$F_{di} = k_{vi} d_i \quad (1)$$

式中 $k_{vi} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

k_{vi} —— 齿对 i 的啮合综合刚度

k_1, k_2 —— 齿对 i 啮合位置的主、被动齿轮刚度

d_i —— 齿对综合变形, 即齿对 i 啮合位置主、被动齿轮变形的和。可见 $d_i \neq 0$

在齿轮传动系统中, 有下式存在^[5]

$$x = d_i + e_{im} + e_{it} + y \quad (2)$$

式中 $x = r_{b2} q$

$$e_{im} = e_{im1} + e_{im2}$$

$$e_{it} = e_{it1} + e_{it2}$$

x —— 齿轮线性传动误差。齿轮传动载荷恒定时, 称为静态传动误差

e_{im} —— 啮合齿对的综合修形量

e_{it} —— 齿对齿廓综合误差

y —— 啮合线方向齿轮中心距变化量

r_{b2} —— 被动齿轮基圆半径

q —— 齿轮传动误差, 即被动齿轮实际转角滞后于理论转角的数值

e_{im1}, e_{im2} —— 齿对 i 中主、被动齿轮齿廓法向修形量, 规定从理论渐开线齿廓上去除材料时 e_{im1}, e_{im2} 为正值

e_{it1}, e_{it2} —— 主、被动齿轮齿廓法向度量的制造误差, 规定对应啮合点的实际齿廓被包容于理论齿廓内部时为正值

对于理论精确的渐开线修形齿轮, $e_{it}=0$ 。齿轮载荷恒定时, y 等于定值。为实现修形齿轮静态传动误差 x 不变的目标, 式(2)应等于一常数, 即

$$d_i + e_{im} = c \quad (3)$$

即理论渐开线修形齿轮传动在保持齿轮静态传动误差为定值时, 啮合齿对某啮合点处的综合修形量与该点齿对综合变形值之和应等于某一常数。一般将

* 国家自然科学基金资助项目(50275103)。20020122 收到初稿, 20030525 收到修改稿

其取为啮合齿对的最大综合变形值。即

$$c = d_{\max} \quad (4)$$

设恒定设计载荷为 p , 齿轮啮合重合度为 e $k-1 < e < k$, k 为大于 1 的正整数。齿对在啮入 或 啮出时刻, 渐开线齿轮啮合齿对产生最大综合变形值

$$d_{\max} = \frac{p}{\sum_{i=1}^{k-1} k_{vi}} \quad (5)$$

在任意啮合时刻, 根据式(1)、(3)和式(4), 齿轮传动在特定的设计载荷 p 下, 理论渐开线齿轮齿对综合修形曲线应满足

$$P = \sum_i k_{vi} (d_{\max} - e_{im}) \quad (6)$$

式中, 若 $d_{\max} - e_{im} < 0$ 时, 即表示齿对 i 并未接触, 不承担载荷, 此情况应取 $d_{\max} - e_{im} = 0$ 。

依据式(6), 可以确定出齿轮静态传动误差为定值 d_{\max} 时的齿对综合修形曲线 e_{im} 。显然 e_{im} 的最大值为 d_{\max} 。

根据式(1)和式(2), 含误差的修形直齿轮在定载荷 p 下的静态传动误差 x 可由下式决定

$$p = \sum_i k_{vi} (x - e_{im} - e_{it} - y) \quad (7)$$

式中, 若 $x - e_{im} - e_{it} - y < 0$, 应取其值为 0。

齿对齿廓综合误差 e_{it} 并不总是等于 0。因此修形齿轮传动的静态传动误差 x 不会为定值。由于修形齿轮存在基节误差, 轮齿在啮入或啮出位置又可能出现啮合几何干涉(即理论啮合线外接触)。一般认为轮齿啮合干涉对齿轮传动的振动与噪声影响最大。因此, 设计含误差修形齿轮的修形曲线应遵循下述原则: 理论设计修形齿轮 ($e_{it} = 0$) 的最大综合修形量在避免含误差齿廓轮齿在啮入和啮出位置产生几何干涉的前提下, 理论设计修形齿轮的静态传动误差应保持最小的变化幅值。为此齿对综合修形曲线应满足下述条件

$$\begin{cases} p = \sum k_{vi} (c - e_{im}) \\ c = d_{\max} + c_0 \\ e_{\max} = ? + d_{\max} \end{cases} \quad (8)$$

式中 c_0 ——依据 e 确定的与 d_{\max} 相比非常小的量。

若 $e < 2$, 通常取 c_0 为 0

D ——采用理论渐开线齿轮修形曲线后, 因误差因素齿对在啮入或啮出位置可能出现的最大几何干涉量

e_{\max} —— e_{im} 的最大值

在式(8)中, 若 $c - e_{im} < 0$, 取 $c - e_{im} = 0$ 。

当 $e < 2$ 时, $D = f_{pb1} + f_{pb2}$, f_{pb1} , f_{pb2} 分别为主、被动修形齿轮的基节极限偏差。

2 综合修形曲线的确定方法

由于齿廓位置及其与之对应的齿廓修形量、误差和轮齿刚度均可以表示为啮合线位置的函数, 因此啮合齿对的综合修形曲线也可表示为齿对自啮入至啮出啮合线位置的函数。

设 P_b 为齿轮基节, 啮合线上邻近齿对啮入端和啮出端 $[e - (k - 1)]P_b$ 的长度内, 是理论上存在 k 个齿对同时啮合的区域, 分别称为啮合线的啮入区和啮出区。啮入区和啮出区与啮合线中间区域的两个邻接点 P_1 、 P_2 (图 1), 则是理论上齿廓啮合最大变形点的位置, 也是不计误差修形齿轮齿廓修形的两个起始点, 而两点之间的齿廓通常不进行修形。

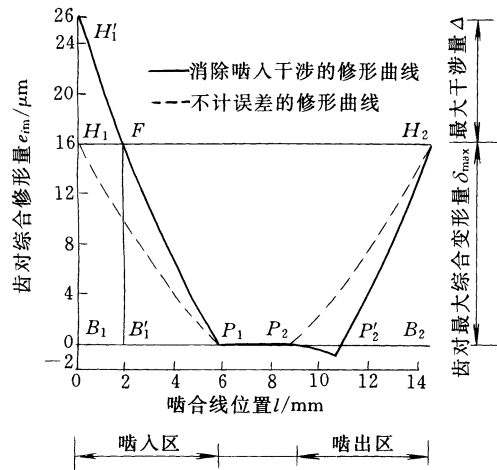


图 1 消除啮入冲击的齿对综合修形曲线

在确定齿对综合修形曲线时, 可先手工设计对应啮合线啮入区的曲线, 然后利用式(6)或式(8), 根据啮合齿对数 i 的变化, 计算出对应啮出区的曲线。由此可见, 特定载荷条件下的齿轮副, 其齿对综合修形曲线不是唯一的。

含误差的修形齿轮, 若手工设计对应啮入区位置的修形曲线为 $H_1' F P_1$ (图 1), 它满足 $e_{\max} = ? + d_{\max}$, $P_2 P_2' H_2$ 是依据式(8)计算所得的啮出区的曲线, 显然它在啮出位置不能满足 e_{\max} 的要求。为此, 啮入区的修形起始点 P_1 应向齿对啮入位置移动至 P_1' , 如图 2 所示。对应手工设计曲线 $H_1' F P_1'$ 计算得到的曲线为 $P_2 P_2' E H_2$, 虽然 $P_2 P_2' E H_2$ 仍不能满足 e_{\max} 的要求, 但我们能够对邻近齿对啮出位置的曲线段进行手工设计, 使齿对啮出位置满足 $e_{\max} = ? + d_{\max}$ 。在图 2 中, 就是将 $P_2 P_2' E$ 延长至 H_2' 。

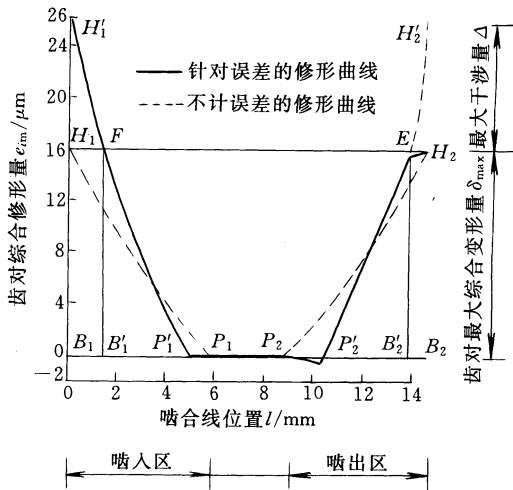


图 2 消除啮入和啮出冲击的齿对综合修形曲线

图 1、2 中齿轮副参数见第 3 节，假定负载转矩为 $100 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，齿对啮入最大干涉量为 $D=10 \mu\text{m}$ 。

需要说明地是，在设计载荷下运转的不计误差的修形齿轮副，修形曲线 $e_{im} > d_{max}$ 的齿廓部分并不参与啮合，因此啮出区的手工设计曲线对齿轮静态传动误差没有影响。如果两个修形起始点 $P_1' P_2'$ 之间的齿廓区域也按式(8)进行修形，则所得的设计修形齿轮的静态传动误差会保持不变。

3 算例

系统动态响应是衡量齿轮修形减振效果的有效途径。本节通过单级直齿轮传动系统动态响应的计算，验证含误差修形齿轮方法的正确性。

选取单级齿轮传动系统的动力学模型^[6]如图 3 所示。设电动机转速 $n_m^0=2\ 000 \text{ r/min}$ ，设定输出负载转矩 $T_l=100 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，齿轮主要参数：模数 $m=3 \text{ mm}$ ，齿数 $z_1=z_2=30$ ，齿宽 $b=12 \text{ mm}$ 。齿轮刚度、系统轴承刚度、传动轴扭转刚度和弯曲刚度按参考文献[5] 计算。最终计算的齿对最大变形量为 $15.96 \mu\text{m}$ 。假定主、被动齿轮各修形齿廓的制造误差形式 e_{it1} 、 e_{it2} (μm) 分别为

$$e_{it1} = 5 \sin \frac{p n_1 t}{z_1} + 4 \sin p n_1 t$$

$$e_{it2} = 5 \sin \left(\frac{p n_1 t}{z_1} + 2.5p \right) + 4 \sin (p n_1 t + 0.25p)$$
(9)

式中 t ——齿轮啮合时间

由此可初步判断轮齿啮合最大几何干涉量 D 略小于 $20 \mu\text{m}$ 。按式(8)齿对最大综合修形量 $e_{max} = 35.96 \mu\text{m}$ 。

为比较不同修形曲线的减振效果，设齿轮副分别采用不同的齿对综合修形曲线，如图 4 所示。它

们对应理论设计修形齿轮($e_{it}=0$)啮合线位置的静态传动误差如图 5 所示。

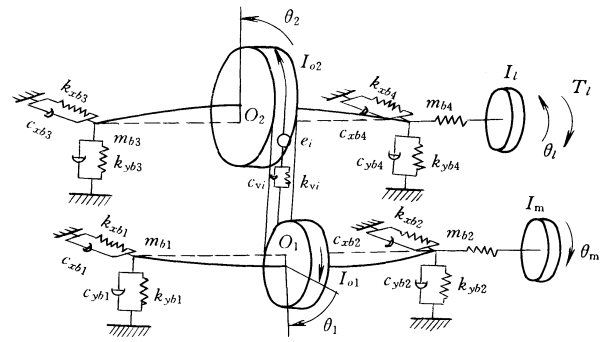


图 3 单级齿轮传动的动力学模型

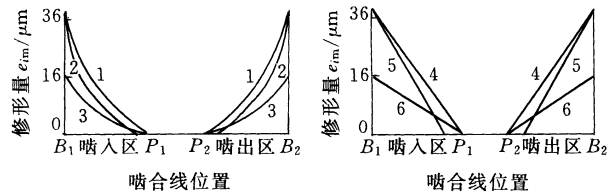


图 4 啮合线位置的齿对综合修形量

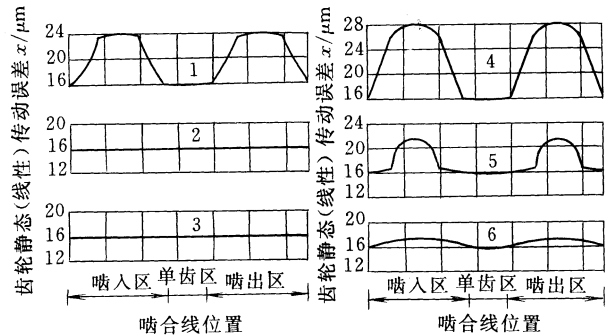


图 5 设计修形齿轮的静态传动误差

不同修形参数下系统动态响应的主要计算结果见表所示。表中数据对应于齿轮啮合历程 $0.03 \sim 0.09 \text{ s}$ (主动齿轮旋转两周)的范围。其中 α_{max} 为被动齿轮转角加速度绝对值的最大值

$$F(\alpha) = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{[\alpha(i)]^2}{n} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

式中 $\alpha(i)$ ——绝对值最大和较大的齿轮转角加速度

速度

i ——计算点序列, $i=1 \sim n, n=60$

均方根值 $F(\alpha)$ 越小, 表明系统振动程度越小。

$$A_e = A_1 + \left(\sum_{i=1}^8 A_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

式中 A_1 ——线性传动误差 FFT 频谱中对应于轮齿啮合频率的幅值^[2, 4]

A_f —— 频谱中大于或等于对应传动轴旋转频率的较大幅值

A_c 越小, 表明齿轮波动幅值越小, 齿轮传动越平稳。

表 修形齿轮传动的动态指标

齿对 综合 修形 曲线	最大修 形量 $e_{\max}/\mu\text{m}$	含误差修形齿轮副			不计误差的修 形齿轮副 静态传动误差 波动范围 μm
		$\frac{f_{\max}}{(\text{rad} \cdot \text{s}^{-2})}$	$F(\frac{f_{\max}}{(\text{rad} \cdot \text{s}^{-2})})$	$A_c/\mu\text{m}$	
1	36	10 878	5 709	0.272	8.0
2	36	8 166	5 126	0.019	2.0
3	16	12 953	6 322	0.182	1.4
4	36	11 244	6 415	0.347	12.0
5	36	8 671	5 278	0.297	5.5
6	16	13 023	6 141	0.159	1.5

上表数据表明: 齿对最大综合修形量在避免轮齿啮入和啮出几何干涉后, 设计修形齿轮采用具有最小齿轮静态传动误差幅值变化的齿对综合修形曲线 2, 可获得误差条件下系统最小的动态响应。这表明, 按式(8)确定综合修形曲线的方法是正确的。

4 结论

对于定载荷条件下含制造误差的修形直齿轮传动, 作者提出了确定齿廓修形参数应遵循的原则: 理论设计修形齿轮在避免含误差齿廓轮齿在啮入和啮出位置产生几何干涉的前提下, 理论设计修形齿轮的静态传动误差应保持最小的变化幅值。

单级齿轮传动系统动态响应计算和试验^[7]表明, 按上述原则确定的含修形误差的直齿轮副, 具有良好的减振效果。

参 考 文 献

- 1 仙波正壮. 高强度齿轮设计. 任宏达, 等译. 北京: 机械工业出版社, 1981
- 2 Lin H H. Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications. Mech. Theory, 1994, 29(8): 1 115~1 129
- 3 Tavakoli M S, Houser D R. Optimum profile modifications for the minimization of static transmission errors of spur gears. ASME J. Mechanisms Transmissions and Automation

in Design, 1986, 108(3): 86~90

- 4 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学. 北京: 科学出版社, 1997
- 5 孙月海. 渐开线直齿圆柱齿轮修形减振的动力学研究: [博士学位论文]. 天津: 天津大学, 2000
- 6 孙月海, 张策, 等. 直齿圆柱齿轮传动系统振动的动力学模型. 机械工程学报, 2000, 36(8): 47~50
- 7 孙月海, 张策, 陈树勋, 等. 直齿轮齿廓修形的实验研究. 中国机械工程, 2003, 14(8): 634~636

TOOTH PROFILE MODIFICATION FOR SPUR GEARS WITH MANUFACTURING ERROR

Sun Yuehai Zhang Ce Ge Nan
(Tianjin University)

Abstract: Based on the relation between tooth deformation and the transmission load of spur gears, an equation is presented for the correlation between gear static transmission error and the total amount of profile modification of meshing teeth under a specific load. To determine the profile modification parameters for gears with manufacturing errors, a principle is put forward, that is, the maximum profile modification of meshing teeth in designing gears should enable the elimination of the meshing interference caused by manufacturing errors and the variation amount of gear static transmission error should be kept within as a narrow range as possible. Furthermore, formula is provided for determining the profile modification parameters of meshing teeth for spur gears with manufacturing error. Corresponding method for determining the parameters is also proposed. Numerical simulation of system dynamic response indicates that the approach has good effects on vibration reduction of gear transmission.

Key words: Spur gears Static transmission error

Tooth profile modification Gear transmission
Vibration

作者简介: 孙月海, 男, 1964 年出生, 工学博士, 副教授。主要从事蜗杆传动和齿轮动力学研究。发表论文 15 篇, 参加完成国家自然科学基金 2 项, 天津市基金 3 项。