

用拓扑优化方法进行热传导散热体的结构优化设计*

左孔天 陈立平 张云清 王书亭

(华中科技大学机械学院 CAD 中心 武汉 430074)

摘要: 分析了拓扑优化中的材料密度方法和优化准则数值求解算法, 将结构力学中的拓扑优化方法应用到热传导结构的优化设计中, 建立了热传导结构的拓扑优化数学模型, 以设计具有最佳散热效果情况下的结构拓扑分布, 为传热体的结构优化设计提供了一种有效的新思路和方法。

关键词: 拓扑优化 热传导 最佳散热设计

中图分类号: TH11

0 前言

拓扑优化研究的内容有: 材料插值方法、优化算法研究、数值计算不稳定性的消除方法、拓扑优化在工程中的应用等。其中工程应用研究是一个重要研究内容。

拓扑优化的应用包括: 体积约束下的最小柔度问题, 柔性机构拓扑优化设计问题、MEMS 拓扑优化设计问题、多物理场拓扑优化设计问题等。目前拓扑优化方法一般基于有限元分析, 理论上而言, 一般的统一场的结构优化设计问题均可考虑用拓扑优化方法加以解决, 前提是必须先建立优化问题的计算模型。

传热结构体的散热设计在有些情况下非常重要, 如计算机芯片散热装置的设计等。传统散热装置的设计一般是通过热力学计算来进行。然而不同拓扑结构形式散热器的散热效果显然不同, 如何寻找物体的最佳散热拓扑结构, 是一个很重要的问题。用拓扑优化方法来对结构的最佳散热拓扑结构进行设计是一种新的尝试。其方法是: 设定结构的散热弱度为目标函数, 通过优化计算结构在一定约束下的最小散热弱度, 得到结构在最佳散热效果情况下拓扑分布, 然后可根据优化结果设计产品构形, 或在优化拓扑结果的相应位置上安装散热片和散热装置, 以加强结构的散热。

详细分析了基于材料密度方法的拓扑优化模型和算法, 将拓扑优化算法应用于热传导结构的优化设计中, 建立了热传导问题的拓扑优化数学模型,

通过几个二维数值算例验证了理论和思想的正确性, 为研究散热装置的结构优化设计提供了一种新的思路和方法。

1 基于 SIMP 方法的热传导结构拓扑优化模型的建立和理论分析

1.1 基于 SIMP 方法拓扑优化问题的表达形式

材料密度方法又称为 SIMP(Solid isotropic material with penalization model)方法, 是目前在拓扑优化中广泛应用的材料插值方法。SIMP 方法最初由 Bendsoe、Mlejnek 等^[1]提出, 后来经过 Sigmund 等^[2-5]的研究得到了进一步发展。

以结构的最小柔度设计问题为例, 其拓扑优化模型可表示为式(1)

$$\begin{aligned} \min \quad & C = F^T U \\ \text{s.t.} \quad & V = fV_0 \quad V^* \\ & F = kU \\ & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (1)$$

式中 C ——结构的总体柔度

F ——力矢量

U ——位移列阵

k ——结构总刚度矩阵

V_0 ——整个设计域的初始体积

V ——优化后的结构体积

f ——优化体积比

设计约束包括: 体积约束、结构平衡方程约束、设计变量约束。

在基于 SIMP 方法的拓扑优化中存在关系式: $E = (x^e)^p E_0$, E_0 和 E 分别为单元初始弹性模量和优化后弹性模量。同样设 k_0 和 k^e 分别是结构单元初

* 国家重点基础研究发展规划(2003CB716207)和国家 863 计划引导项目(2003AA001031)资助项目。20040711 收到初稿, 20041222 收到修改稿

始刚阵和优化后的刚阵, 则可推得关系式: $k^e = (x^e)^p k_0$, p 为惩罚权因子, 选择惩罚因子的目的是: 对中间密度单元项进行惩罚, 以尽量减少结构中间密度单元的数目, 使结构单元密度尽可能趋近于 0 或 1。

在 SIMP 方法中每个单元只包含一个设计变量, 设计变量的数目相对较少, 同时单元相对密度变化后, 对应的材料属性可表示为初始材料属性和单元相对密度的指数函数关系, 简化了计算求解过程。

有限元结构中存在关系式: $V = fV_0 = \sum_{e=1}^N x^e v^e$, v^e 为优化后的单元体积。在 SIMP 方法前提下, 拓扑优化模型式(1)可变化为下式(2)

$$\begin{aligned} \min C &= \mathbf{U}^T \mathbf{k} \mathbf{U} = \sum_{e=1}^N \mathbf{u}^e \mathbf{k}^e \mathbf{u}^e = \sum_{e=1}^N (x^e)^p \mathbf{u}^e \mathbf{k}_0 \mathbf{u}^e \\ \text{s.t. } V &= fV_0 = \sum_{e=1}^N x^e v^e \quad V^* \\ & \mathbf{F} = \mathbf{k} \mathbf{U} \\ & 0 < x_{\min} \quad x^e \quad x_{\max} \end{aligned} \quad (2)$$

其中设计变量是单元相对密度 x^e 。 x_{\min} 和 x_{\max} 分别是单元相对密度的最小极限值和最大极限值。 \mathbf{u}^e 是单元位移列矢量。 N 为结构离散单元总数目。

拓扑优化中的优化算法一般情况下采用优化准则法。它是由目标函数和约束条件构成的拉格朗日函数, 在满足 Kuhn-Tucker 条件下推导出相应的迭代求解公式。在综合考虑设计变量上下限的情况下, 可推得问题式(2)的优化准则法求解公式如下

$$\begin{aligned} C_k^e &= \frac{p(x^e)^{p-1} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_0 \mathbf{u}^e}{I_1 v^e} \\ x_{k+1}^e &= (C_k^e)^h x_k^e \quad \text{当 } x_{\min} < (C_k^e)^h x_k^e < x_{\max} \\ x_{k+1}^e &= x_{\min} \quad \text{当 } (C_k^e)^h x_k^e < x_{\min} \\ x_{k+1}^e &= x_{\max} \quad \text{当 } (C_k^e)^h x_k^e > x_{\max} \end{aligned} \quad (3)$$

式中 h —— 阻尼系数

引入 h 的目的是为了确保数值计算的稳定性和收敛性, 有关 h 取值范围的讨论详见参考文献[6]。

1.2 热传导结构拓扑优化模型的建立和理论分析

为了简洁表示热传导情况下的结构拓扑优化过程, 需要对模型进行一些简化。

物体导热系数为 l , 固定区域均匀加热, 内部有强度为 q 的内热源, 其单位时间内生成的热量: $dQ_1 = q dx dy dz$ 。物体单位时间内由于温度升高所需的热量: $dQ_2 = c_p \mathbf{r} \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$, c_p 和 \mathbf{r} 分别为材料的定压比热和密度。假设换热过程只有热传导, 无

对流和辐射换热, 物体由各向同性导热材料构成, 则有: $l_x = l_y = l_z = l$, 建立热传导的平衡方程有

$$l \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q = C_p \mathbf{r} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4)$$

考虑稳态热传导问题有

$$l \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q = 0 \quad (5)$$

热传导的初始条件

$$T|_{t=t_0} = T(x, y, z) \quad (6)$$

边界条件 这里给定 S_1 边界上第一类边界条件, 即 $T(M, t)|_{M \in S_1} = j(M, t)$, 通过给定 S_1 边界上的温度自由度来设定。

这里假设无第二类边界条件, 所以有

$$k_n \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{M \in S_2} = q_{s_2}(M, t) = 0 \quad (7)$$

假设无第三类边界条件, 则 $q_{s_c} = q_{s_r} = 0$ 单元热外载荷 \mathbf{p}^e 由 \mathbf{R}_B^e , \mathbf{R}_S^e 构成, 其中 $\mathbf{R}_B^e = \int_{V_e} N^T q dV$ 为

内热源产生的节点热流矢量, $\mathbf{R}_S^e = \int_{S_2} N^T q_{s_2} dS$ 为热传导边界 S_2 上由于传导产生的热流矢量, N 为单元形函数。当不存在第二类边界条件时, 节点热负荷

$$\mathbf{p}^e = \mathbf{R}_B^e + \mathbf{R}_S^e = \mathbf{R}_B^e + 0 = \int_{V_e} N^T q dV \quad (8)$$

由控制方程、边界条件和初始条件, 构造温度场的范函表达式, 然后变分求解。在求解区域上离散单元, 选取插值函数, 经过单元分析和组装, 即可得到传热结构的有限元表达式

$$\mathbf{k} \mathbf{T} = \mathbf{P} \quad (9)$$

式中 \mathbf{P} —— 由 \mathbf{p}^e 组成的列矢量

相应地可以建立热传导结构的拓扑优化数学模型为

$$\begin{aligned} \min C &= \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} = \sum_{e=1}^N t^e \mathbf{k}^e t^e = \sum_{e=1}^N (x^e)^p t^e \mathbf{k}_0 t^e \\ \text{s.t. } V &= fV_0 = \sum_{e=1}^N x^e v^e \quad V^* \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathbf{k} \mathbf{T} = \mathbf{P}$$

$$0 < x_{\min} \quad x^e \quad x_{\max}$$

式中 \mathbf{k}_0 —— 材料密度为 1 的单元热刚度矩阵

\mathbf{k} —— 结构总体热刚度矩阵

x^e —— 第 e 个结构单元的相对密度

t^e —— 第 e 个结构单元的温度

\mathbf{T} —— 由 t^e 组成的列矢量

在没有对流和辐射情况下 $\mathbf{k}_0 = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{B} dV$, \mathbf{B} 为单元热应变矩阵。在各向同性热传导中有

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

\bar{K} 为单元导热系数矩阵。这里设定：单元材料密度为 0 时，单元材料的导热系数为 0，单元材料密度为 1 时，单元材料的导热系数为 I ，中间密度单元的导热系数 $I' = (x^e)^p I$ 。则由单元热刚度矩阵计算公式，中间密度单元的单元热刚度矩阵可写为： $k^e = (x^e)^p k_0$ 。

$C = T^T k T = T^T P$ ，定义为结构的散热弱度。最小散热弱度等于最大散热强度，最小散热弱度要求表明：在相同热外载荷 P 作用下，结构有最低的温度分布。结构的散热弱度越小，对应于结构的散热强度越大，表明结构有越大的可散热性，散热效果越好。通过最小结构的散热弱度，来确定有最佳散热效果情况下的结构拓扑分布。

2 二维数值算例

以方形平板传热问题为例，计算了在不同的初始边界条件时，传热结构具有最佳散热效果情况下的结构拓扑分布。热结构拓扑优化计算网格模型如图 1 所示。

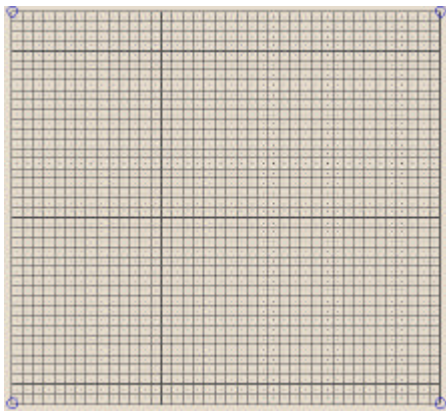


图 1 结构优化模型示意图

定义目标函数为结构的最小散热弱度(即最大散热强度)，50%体积约束。

为了消除拓扑优化数值计算中的棋盘格和网格依赖现象，在算法中采用了惩罚项，取惩罚因子 $p=3.0$ ，加入了阻力项，取阻力系数 $h=0.5$ ，采用了局部敏度过滤算法^[5]。模型离散为 40×40 四节点四边形单元。

算例模型 1：整块板均匀加热，四周边界给定温度 $T=0$ 。计算出最优散热效果情况下的结构拓扑分布如图 2 所示。

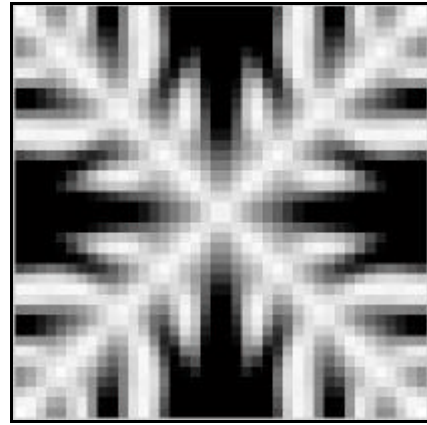


图 2 均匀加热，四周边界给定温度 $T=0$

算例模型 2：整块板均匀加热，左右边界给定温度 $T=0$ ，上下边界为绝热边界。计算出最优散热效果情况下的结构拓扑分布如图 3 所示。

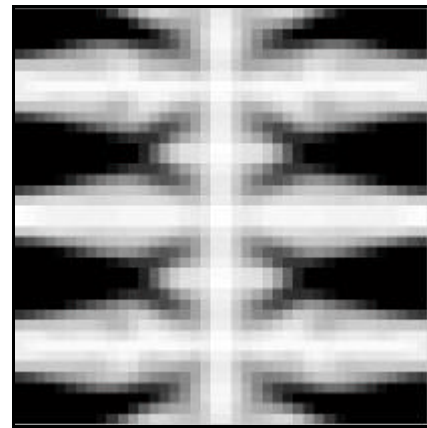


图 3 均匀加热，左右边界给定温度 $T=0$

算例模型 3：整块板均匀加热，左边界给定温度 $T=0$ ，其余边界为绝热边界。计算出最优散热效果情况下的结构拓扑分布如图 4 所示。



图 4 均匀加热，左边界给定温度 $T=0$

算例模型 4：整块板均匀加热，左边界中心处给定温度 $T=0$ ，其余边界为绝热边界。计算出最优散热效果情况下的结构拓扑分布如图 5 所示。

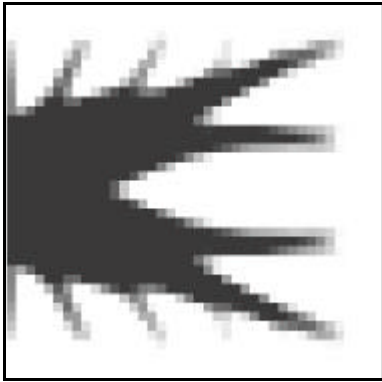


图 5 均匀加热, 左边界中点给定温度 $T=0$

算例模型 5: 板的中心加热, 四周边界给定温度 $T=0$ 。计算出最优散热效果情况下的结构拓扑分布如图 6 所示。

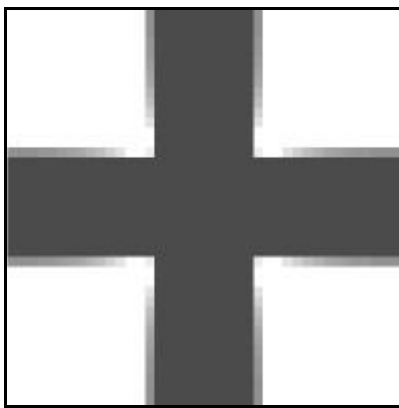


图 6 中心加热, 四周边界给定温度 $T=0$

算例模型 6: 板的中心加热, 四角边界处给定温度 $T=0$, 其余边界为绝热边界。计算出最优散热效果情况下的结构拓扑分布如图 7 所示。

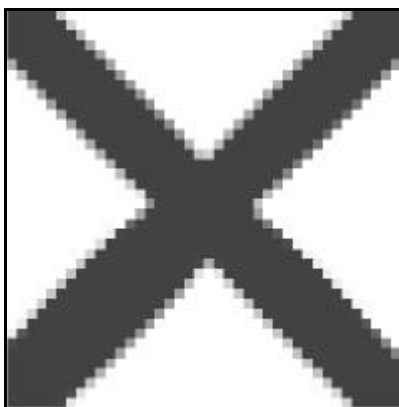


图 7 中心加热, 四角边界给定温度 $T=0$

算例模型 7: 板的中心加热, 左右边界给定温度 $T=0$, 其余边界为绝热边界。计算出最优散热效果情况下的结构拓扑分布如图 8 所示。

算例模型 8: 板的中心加热, 左边界处给定温度 $T=0$, 其余边界为绝热边界。计算出最优散热效果情况下的结构拓扑分布如图 9 所示。

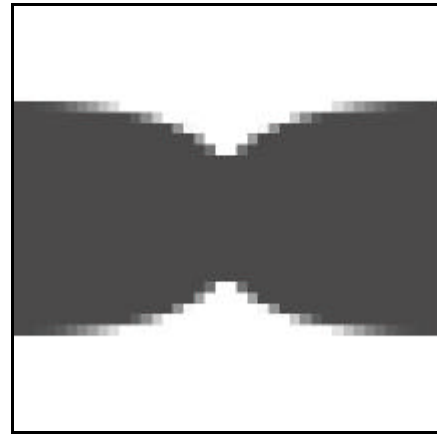


图 8 中心加热, 左右边界给定温度 $T=0$

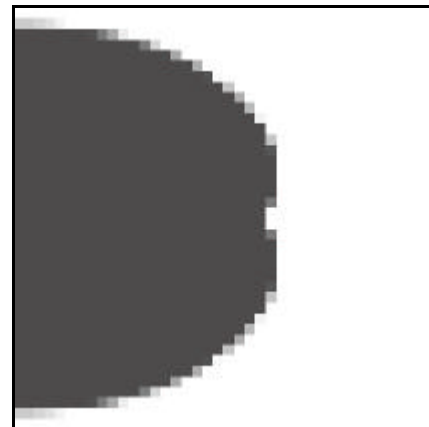


图 9 中心加热, 左边界给定温度 $T=0$

这里只考虑了稳态热传导, 及其第一类边界条件下的散热结构拓扑优化问题, 由本文原理, 可较容易将该思想和算法扩展到: 有热对流、热辐射等复杂边界条件下的优化问题, 瞬态热传导问题, 以及电磁场、渗流场的结构拓扑优化问题等, 不同的问题需建立各自不同的拓扑优化数学模型。

3 结论

将拓扑优化方法应用于热传导结构的优化设计是一种新的思想和方法。该方法能够设计出具有最佳散热效果情况下的传热结构拓扑分布, 为改进和加强结构的散热设计提供依据。

参 考 文 献

- 1 Mlejnek H P, Schirmacher R. An engineering approach to optimal material distribution and shape finding. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1993, 106: 1~26
- 2 Sigmund O. Design of material structures using topology optimization: [PhD Dissertation]. Department of Solid

(下转第 21 页)