

DOI: 10.3901/JME.2009.04.025

3-RRR 3 自由度球面并联机构静刚度分析*

周玉林^{1,2} 高峰^{1,2}

1. 燕山大学机械工程学院 秦皇岛 066004;
2. 上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室 上海 200030)

摘要: 3 自由度球面并联机构是重要的少自由度机构之一, 各支链的构件为球面上的弧杆, 其刚度计算十分复杂。基于此, 采用计算杆件变形的办法, 利用小变形叠加原理, 推得机构动平台的角位移、球心点线位移与各支链两构件上力的关系。利用机构静力学分析的结果, 即支链两构件上的力与动平台上的外力关系, 建立机构动平台、球心点位移与外力的关系。进而得到机构的整体柔度、刚度矩阵。采用正交变换方法, 得到机构的 6 个主刚度指标, 最大、最小刚度及所在的方向。研究结果表明, 机构的主刚度及主方向随着机构运动位姿的变化而变化, 远离零点逐渐增大, 其中 3 个主刚度(即扭转刚度)较大, 另 3 个主刚度(线位移刚度)较小, 两者差距巨大。研究成果为该机构的工程设计和应用提供了理论基础。

关键词: 球面并联机构 静刚度 正交变换 线位移 角位移

中图分类号: TP24

Stiffness Analysis of Spherical Parallel Mechanism 3-RRR with 3-DOF

ZHOU Yulin^{1,2} GAO Feng^{1,2}

- (1. School of Mechanical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004;
2. State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030)

Abstract: The spherical parallel mechanism 3-RRR with 3-DOF rotations is one of the most important less-mobility mechanisms and it is very complicated and difficult to calculate the stiffness of 3-RRR mechanism where the bars in each branch are arc-shaped. Based on this, the angle displacement of mobile platform and line displacement of spherical center of the mechanism are derived by means of calculating deformation and superposition principle at small strain—the relationship between the displacements and forces acted on the members in each branch. And then the relationship between outer loads and the line displacement, the angle displacement of (spherical center) vertex of mobile platform is set up based on the result of static analysis—the relationship between external wrenches and forces acted on the members in each branch. Finally the flexibility, stiffness matrix are obtained. The 6 principal stiffness and directions of the mechanism are achieved by orthogonal transformation. The results show that the principal stiffness and directions are varied with the pose-position of the mechanism in which the principal stiffness is gradually enlarged away from the origin where 3 principal stiffness (torsional stiffness) are much greater and the others(line deformation stiffness) are smaller, the difference between the two parts are giant. This research is the important theoretical foundation and support for engineering design and application of 3-RRR mechanism in practice.

Key words: Spherical parallel mechanism Static stiffness Orthogonal transformation Line displacement Angle displacement

0 前言

3 自由度球面并联机构是重要的少自由度并联机

构之一, 可实现 3 自由度转动, 在卫星跟踪随动装置、灵巧眼、数控回转台^[1]等中得到应用, 还可用于人形机器人并联转动关节, 如肩、腰、髋关节等。具有广泛的应用前景。

对并联机构静刚度的研究已取得进展: GOSSELIN^[2]研究了平面 3 自由度并联、空间 6 自由度机构的刚度及图谱; EI-KHASAWNEH 等^[3]研

* 国家自然科学基金(60534020)和国家重点基础研究发展计划(973 计划, 2006CB705400)资助项目。20080911 收到初稿, 20081207 收到修改稿

究了多杆空间并联机构的刚度,最大、最小刚度及出现的方向,机构任意方向刚度的计算;HUANG等^[4-5]考虑构件的变形,利用虚功、线性叠加原理获得机床整体刚度模型并对模型进行了分析;SVININ等^[6]分析了 Stewart 平台的刚度矩阵不对称时,参数不均衡对系统稳定性的影响;HAN等^[7]考虑铰链及杆件弹性变形时,应用螺旋理论建立一种少自由度空间并联机构的驱动刚度矩阵与约束刚度矩阵及机构的整体刚度矩阵;YOON等^[8-9]提出考虑构件弹性变形并联机构的刚度分析方法,并依据该方法设计了具有平衡刚度的 Delta 机构;PIGOSKI等^[10]研究了在不同参考坐标系下的刚度映射矩阵之间的关系;CECCARELLI等^[11]对 3 自由度 CASSINO 并联机构做了刚度分析、以刚度性能指标为依据对该机构进行了特别设计;NABIL等^[12]应用了几何变量多项式与矩阵特征值多项式转换的方法,解决了双平面并联机构几何变量的刚度综合问题;LONCARIC等^[13]应用李群,选择特殊的坐标系方法,将一般弹性体的刚度矩阵化成标准型;RODNEY^[14]利用弹簧并联,实现受控于空间阻抗的任意确定的刚度方法;GIUSEPPE等^[15]分析了 WABIAN-RIV 的刚度特性,提出了用于推导刚度矩阵的基本模型,并进行了刚度性能的数值评估。韩书葵等^[16]采用螺旋理论推导出了 4 自由度并联机器人的刚度计算公式并进行了分析。陈俊等^[17]建立了支链、机架子系统与整机刚度模型,对机床的刚度进行分析。相关研究结果还有很多。然而,到目前为止,3 自由度球面并联机构(3-RRR)的刚度问题还没有报道。

本文考虑构件的弹性,利用求变形的办法,依次求出第 i 支链各杆件的变形。依据小变形叠加原理,推得动平台的角位移及球心点的线位移。结合静力分析的结果,即各力与动平台上载荷的关系,建立机构的变形与动平台上外载荷的关系,推得机构的柔度、刚度矩阵。通过对刚度矩阵正交变换,完成刚度矩阵对角化,进而得到机构在 6 个方向上主刚度指标及最大、最小刚度出现的方向。本文研究为该机构的工程设计和应用奠定了基础。

1 动平台角位移及球心点线位移

3 自由度球面并联机构如图 1 所示。机构的参数包括: α_1 、 α_2 、 β_1 、 β_2 、 η_i 、 η_{2i} ($i=1,2,3$)、球半径 r , 其中 η_i ($i=1,2,3$) 分别为 z_{i1} 在下平台的投影与 z_{i1} 投影所成的角度; η_{2i} ($i=1,2,3$) 分别为 z_{i3} 在上平台的投影与 z_{i3} 投影所成的角度。

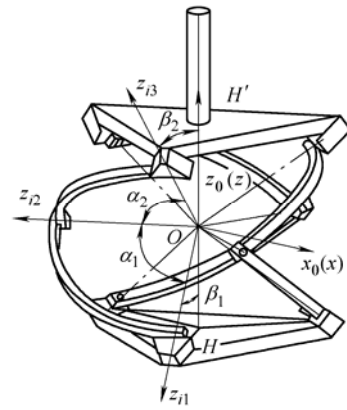


图 1 3 自由度球面并联机构

取球心 O 为各坐标系的中心;按照 D-H 连杆坐标系规定的一般方法^[18]建立坐标系 $Ox_0y_0z_0$ 、 $Oxyz$ 和 $Ox_{ij}y_{ij}z_{ij}$ ($i, j=1,2,3$ 表示第 i 分支的第 j 转动副)。

u_i 、 w_i 、 v_i ($i=1,2,3$) 分别表示坐标轴 z_{i1} 、 z_{i2} 、 z_{i3} ($i=1,2,3$) 在静坐标系下单位矢量; o_{i3} 、 q_{i3} 、 o'_{i2} 、 q'_{i2} 为上、下连杆的上端点在固定坐标系中的单位矢量,其中 o_{i3} 位于上连杆平面内且垂直 v_i , 有

$$\begin{cases} o_{i3} = v_i + n_i w_i \\ o_{i3} \cdot v_i = |o_{i3}| \cos 90^\circ \\ o_{i3} = o_{i3} / |o_{i3}| \end{cases}$$

q_{i3} 垂直于上连杆平面,由单位方向矢量 o_{i3} 、 v_i 按右手螺旋法则确定

$$Q_{i3} = o_{i3} \times v_i \quad i=1,2,3$$

从而得

$$q_{i3} = Q_{i3} / |Q_{i3}|$$

o'_{i2} 位于下连杆平面内且垂直于 w_i , 确定方法同 o_{i3} ; q'_{i2} 垂直于连杆平面,由单位方向矢量 o'_{i2} 、 w_i 按右手螺旋法则确定(方法同上)。

为了便于计算现做如下假设。

(1) 连续性假设:认为组成固体的物质毫无空隙地充满了固体的几何空间。

(2) 均匀性假设:认为从构件内任取一部分,不论体积大小如何,其力学性能完全相同。

(3) 各向同性假设:认为固体在各个方向上的力学性能完全相同。

(4) 弹性小变形条件:固体因外力作用而引起的变形,限于变形的大小远远小于构件原始尺寸的情况,且在外力解除后又可恢复原状。

(5) 不考虑各转动副处的变形和间隙。

(6) 动平台比各支链杆的尺寸大得多,其变形远远小于杆的变形,为计算动平台上中心点变形及协调关系,假定动平台为刚体。

虽然杆件为弧形杆,但对无限小的单元体,仍

然符合对直杆变形分析时的结论。

杆件在轴向压缩(拉伸)变形和垂直方向的剪切变形相对于扭转和弯曲变形较小可忽略不计。

为了便于描述构件变形, 引入新的坐标系: 设曲杆轴线方向为 s 方向, 曲杆的曲率半径方向为 y 方向, 垂直于曲杆平面的方向为 z 方向。

1.1 第 i 支链的下连杆的变形

下连杆下端点存在 6 个约束, 简化为固定端, 上端点受 3 个力 F''_{i2} 、 R''_{i2} 、 P''_{i2} 和两个力矩 M''_{ir2} 、 M''_{ip2} , 其模为 f'_{i2} 、 r'_{i2} 、 p'_{i2} 、 M'_{ir2} 及 M'_{ip2} , 如图 2 所示。

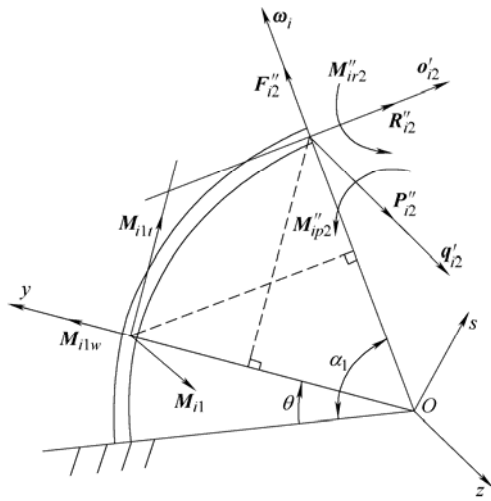


图 2 下连杆简化模型

杆件任意断面 θ 处力矩为

$$\begin{cases} M_{i1}(\theta) = f'_{i2}r \sin(\alpha_1 - \theta) - r'_{i2}r(1 - \cos(\alpha_1 - \theta)) + M'_{ip2} \\ M_{iltr}(\theta) = M'_{ir2} \cos(\alpha_1 - \theta) - r(1 - \cos(\alpha_1 - \theta))p'_{i2} \\ M_{ilw}(\theta) = -(M'_{ir2} + rp'_{i2}) \sin(\alpha_1 - \theta) \end{cases} \quad (1)$$

弯矩 $M_{i1}(\theta)$ 引起的平面内的弯曲变形如下。

转角

$$\theta_{i1z} = \int \frac{M_{i1}(\theta)}{EI_z} ds + C_1$$

挠度

$$v_{i1h} = \int \theta_{i1z} ds + D_1$$

式中, EI_z 为抗弯刚度, E 为材料弹性模量, I_z 为横断面对中性轴的惯性矩, 对于矩形断面, 沿 z 轴长度为 h 、 y 轴为 b , 则 $I_z = hb^3/12$; C_1 、 D_1 为积分常数。当 $\theta=0$ 时, $\theta_{i1z}=0$ 、 $v_{i1h}=0$, 则 $C_1 = -r^2(f'_{i2} \cos \alpha_1 - r'_{i2} \sin \alpha_1)/EI$, $D_1 = r^3(f'_{i2} \sin \alpha_1 + r'_{i2} \cos \alpha_1)/EI_z$ 。

当 $\theta = \alpha_1$ 时, 经整理得 $m_{i1}(\theta)$ 引起的下连杆上

端点的转角和挠度为

$$\begin{cases} \theta'_{i1z} = r[r(1 - \cos \alpha_1)f'_{i2} + \alpha_1 M'_{ip2} + \\ r(\sin \alpha_1 - \alpha_1)r'_{i2}]/EI_z \\ v'_{i1h} = r^2[r(\sin \alpha_1 - \alpha_1 \cos \alpha_1)f'_{i2} + \\ \alpha_1^2 M'_{ip2}/2 - r(\alpha_1^2/2 + 1 - \alpha_1 \times \\ \sin \alpha_1 - \cos \alpha_1)r'_{i2}]/EI_z \end{cases} \quad (2)$$

扭矩 $M_{iltr}(\theta)$ (取 s 方向的扭矩为正) 引起的下连杆末端的扭转角为

$$\Phi_{i1} = \int_0^{\alpha_1} [M_{iltr}(\theta)/G\beta hb^3] rd\theta = r[r(\sin \alpha_1 - \alpha_1)p'_{i2} + \sin \alpha_1 m'_{ir2}]/G\beta hb^3 \quad (3)$$

弯矩 $M_{ilw}(\theta)$ (取 y 方向的弯矩为正方向) 引起的垂直弯杆的弯曲变形如下。

转角

$$\theta_{i1y} = \int (M_{ilw}(\theta)/EI_y) rd\theta + C_2$$

挠度

$$v_{i1v} = \int \theta_{i1y} ds + D_2$$

式中, I_y 为横断面对中性轴的惯性矩, 对于矩形截面 $I_y = h^3b/12$ 。当 $\theta=0$ 时, $\theta_{i1y}=0$ 、 $v_{i1v}=0$, 则积分常数 $C_2 = r(M'_{ir2} + p'_{i2}r) \cos \alpha_1 / EI_y$ 、 $D_2 = -r^2 \times (M'_{ir2} + p'_{i2}r) \sin \alpha_1 / EI_y$ 。

当 $\theta = \alpha_1$ 时, $M_{ilw}(\theta)$ 引起的下连杆上端的转角和挠度为

$$\begin{cases} \theta'_{i1y} = r(M'_{ir2} + rp'_{i2})(\cos \alpha_1 - 1)/EI_y \\ v'_{i1v} = r^2(M'_{ir2} + p'_{i2}r)(\alpha_1 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1)/EI_y \end{cases} \quad (4)$$

在变形中 θ'_{i1z} 位于 q'_{i2} 正方向, 可传到上连杆; v'_{i1h} 沿 ω_i 正方向; Φ_{i1} 沿 α'_{i2} 正方向, 可传到上连杆; v'_{i1v} 沿 q'_{i2} 正方向; 而 θ'_{i1y} 沿 ω_i 正方向, 在转动副处被释放而不能传到上连杆。

由以上分析, 上连杆上端点的线位移及可传递到上连杆的角位移分别为

$$\begin{cases} \Delta_{i11} = v'_{i1h} \cdot \omega_i - v'_{i1v} \cdot q'_{i2} \\ \delta'_{i11} = \theta'_{i1z} \cdot q'_{i2} + \Phi_{i1} \cdot \alpha'_{i2} \end{cases} \quad (5)$$

尽管 θ'_{i1y} 位于 ω_i 正方向在转动副处被释放了, 但是, 3 个下连杆的变形使上连杆及上平台产生微小的位姿调整, 因此, 上连杆相对下连杆沿 ω_i 方向存在一个刚性的牵联轴位移, 用 χ_i 表示。则上连杆的下端点实际角位移应该为

$$\delta_{i11} = \delta'_{i11} + \chi_i \cdot \omega_i = \theta'_{i1z} \cdot q'_{i2} + \Phi_{i1} \cdot \alpha'_{i2} + \chi_i \cdot \omega_i \quad (6)$$

该角位移引起的上连杆上端点的牵联轴位移为

$$\Delta_{i12} = \delta_{i11} \times r(\mathbf{v}_i - \boldsymbol{\omega}_i) \quad (7)$$

1.2 第 i 支链的上连杆的变形

上连杆下端点有 5 项约束, 与下连杆由转动副连接, 上端点处存在力 F_{i3} 、 R_{i3} 、 P_{i3} 和两个力矩 M_{ir3} 、 M_{ip3} , 其模为 f_{i3} 、 r_{i3} 、 p_{i3} 、 M_{ir3} 及 M_{ip3} 。如图 3 所示。

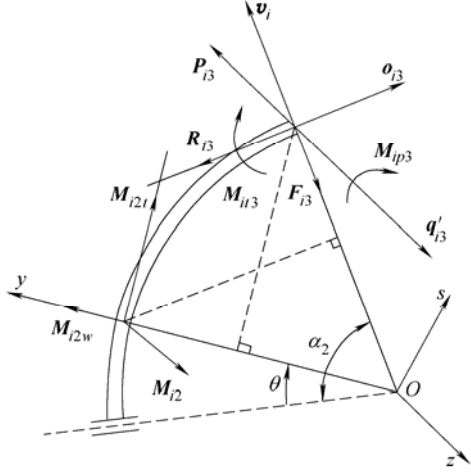


图 3 上连杆简化模型

连杆上任意断面 θ 处力矩

$$\begin{cases} M_{i2}(\theta) = r[1 - \cos(\alpha_2 - \theta)]r_{i3} - r\sin(\alpha_2 - \theta)f_{i3} - M_{ip3} \\ M_{i2l}(\theta) = rp_{i3} - \cos(\alpha_2 - \theta)(M_{ir3} + p_{i3}r) = rp_{i3} \\ M_{i2w}(\theta) = (M_{ir3} + p_{i3}r)\sin(\alpha_2 - \theta) \equiv 0 \end{cases}$$

弯矩 $M_{i2}(\theta)$ 引起的变形如下。

转角

$$\theta_{i2z} = \int \frac{M_{i2}(\theta)}{EI_z} ds + C_3$$

挠度

$$\begin{aligned} v_{i2h} &= \int \theta_{i2z} ds + D_3 = \\ & r^2 \left\{ r[\sin(\alpha_2 - \theta) + \theta \cos \alpha_2]f_{i3} - M_{ip3}\theta^2/2 + \right. \\ & \left. r[\theta^2/2 + \cos(\alpha_2 - \theta) - \theta \sin \alpha_2]r_{i3} \right\} / EI_z + D_3 \end{aligned}$$

当 $\theta = 0$ 时, $\theta_{i2z} = 0$ 、 $v_{i2h} = 0$, 积分常数 $C_3 = r^2(\cos \alpha_2 \cdot f_{i3} - \sin \alpha_2 \cdot r_{i3})/EI_z$ 、 $D_3 = -r^3(\sin \alpha_2 \cdot f_{i3} + \cos \alpha_2 \cdot r_{i3})/EI_z$ 。

当 $\theta = \alpha_2$ 时, 上连杆上端 C 的转角和挠度为

$$\begin{cases} \theta'_{i2z} = r[r(\cos \alpha_2 - 1)f_{i3} + r(\alpha_2 - \sin \alpha_2)r_{i3} - M_{ip3}\alpha_2]/EI_z \\ v'_{i2h} = r^2[r(\alpha_2 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2)f_{i3} + r(\alpha_2^2/2 + 1 - \\ \alpha_2 \sin \alpha_2 - \cos \alpha_2)r_{i3} - M_{ip3}\alpha_2^2/2]/EI_z \end{cases} \quad (8)$$

转矩 $M_{i2l}(\theta)$ 引起的连杆末端的转角

$$\Phi_{i2} = \int_0^{\alpha_2} (M_{i2l}(\theta)/G\beta hb^3) r d\theta = \alpha_2 r^2 p_{i3}/G\beta hb^3 \quad (9)$$

弯矩 $M_{i2w}(\theta)$ 在整个圆弧上恒等于零, 引起的

变形 θ'_{i2y} 、 v'_{i1V} 均为零。

根据以上分析, 上连杆的上端点线位移与角位移分别为

$$\begin{cases} \Delta_{i22} = v'_{i2h} \cdot v_i \\ \delta'_{i22} = \theta'_{i2z} \cdot q_{i3} + \Phi_{i2} \cdot o_{i3} \end{cases} \quad (10)$$

根据小变形叠加原理, 将上、下连杆的变形相加得上连杆上端点的总线位移、角位移

$$\Delta_i = \Delta_{i11} + \Delta_{i12} + \Delta_{i22} = v'_{i1h} \cdot \omega_i - v'_{i1V} \cdot q'_{i2} + v'_{i2h} \cdot v_i + \delta'_{i11} \times (r(v_i - \omega_i)) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \delta_i &= \delta'_{i11} + \delta'_{i22} = \theta'_{i1z} \cdot q'_{i2} + \Phi_{i1} \cdot o'_{i2} + \\ & \chi_i \cdot \omega_i + \theta'_{i2z} \cdot q_{i3} + \Phi_{i2} \cdot o_{i3} \end{aligned} \quad (12)$$

1.3 上平台角位移与球心点线位移

第 i 支链上连杆的上端线位移中包含未知的上连杆牵联轴位移 χ_i , 将式(11)整理得

$$\begin{aligned} \Delta_i &= A_{i3} \cdot f_{i3} + B_{i3} \cdot r_{i3} + C_{i3} \cdot p_{i3} + \\ & D_{i3} \cdot M_{ip3} + r \cdot \chi_i \cdot (\omega_i \times v_i) \\ & i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (13)$$

式中, A_{i3} 、 B_{i3} 、 C_{i3} 、 D_{i3} 为矢量, 是机构参数与位姿的函数。

根据假设(6)机构的上平台为刚体, 变形前后三棱锥的 3 个底边长度不变, 即 3 顶(铰链)点的线位移在 3 条底边投影分别相等, 有方程

$$\begin{cases} \Delta_1 \cdot r(v_1 - v_2) = \Delta_2 \cdot r(v_1 - v_2) \\ \Delta_1 \cdot r(v_1 - v_3) = \Delta_3 \cdot r(v_1 - v_3) \\ \Delta_2 \cdot r(v_2 - v_3) = \Delta_3 \cdot r(v_2 - v_3) \end{cases} \quad (14)$$

将式(13)代入式(14)解得

$$\begin{aligned} \chi_i &= \xi_{i01}f_{i3} + \xi_{i02}f_{i3} + \xi_{i03}f_{i3} + \xi_{i04}r_{i3} + \\ & \xi_{i05}r_{i3} + \xi_{i06}r_{i3} + \xi_{i07}p_{i3} + \xi_{i08}p_{i3} + \\ & \xi_{i09}p_{i3} + \xi_{i10}m_{ip3} + \xi_{i11}m_{ip3} + \xi_{i12}m_{ip3} \\ & i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (15)$$

式中, ξ_{i01} 、 ξ_{i02} 、 \dots 、 ξ_{i12} 为标量系数, 是机构参数与位姿函数。

上连杆的上端与动平台以转动副连接, 转轴为 v_i , 因此, 支链的总的角位移在 v_i 轴上投影被释放了, 转移到上平台的角位移则由 o_{i3} 、 q_{i3} 方向的分量组成

$$\delta'_{oi} = (\delta_i \cdot o_{i3})o_{i3} + (\delta_i \cdot q_{i3})q_{i3} \quad i = 1, 2, 3 \quad (16)$$

将式(15)整理得

$$\begin{aligned} \delta'_{oi} &= A'_{i3} \cdot f_{i3} + B'_{i3} \cdot r_{i3} + C'_{i3} \cdot p_{i3} + \\ & D'_{i3} \cdot M_{ip3} + \chi_i \cdot (\omega_i \cdot o_{i3})o_{i3} \end{aligned}$$

式中, A'_{i3} 、 B'_{i3} 、 C'_{i3} 、 D'_{i3} 为矢量, 是机构参数与位姿的函数。

事实上, δ'_{oi} 不是上平台全部角位移, 当上平台的 3 个铰链点具有不同的线位移时, 必然存在一绕 v_i 轴的角位移, 假设为 ψ_i , 则上平台的角位移为

$$\begin{aligned} \delta_{0i} &= \delta'_{0i} + \psi_i \cdot \mathbf{v}_i = \\ &(\delta_i \cdot \mathbf{o}_{i3})\mathbf{o}_{i3} + (\delta_i \cdot \mathbf{q}_{i3})\mathbf{q}_{i3} + \psi_i \cdot \mathbf{v}_i \\ &i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (17)$$

由假设(6)上平台为刚体, 其上的每一点都具有相同的角位移 δ_0 , 即用上平台上的3个铰链点分别表达的上平台的角位移彼此相等。即存在关系

$$\delta_0 = \delta'_{01} + \psi_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \delta'_{02} + \psi_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \delta'_{03} + \psi_3 \cdot \mathbf{v}_3 \quad (18)$$

可解得

$$\begin{aligned} \psi_i &= A_{i01}f_{13} + A_{i02}f_{23} + A_{i03}f_{33} + A_{i04}r_{13} + \\ &A_{i05}r_{23} + A_{i06}r_{33} + A_{i07}p_{13} + A_{i08}p_{23} + \\ &A_{i09}p_{33} + A_{i10}m_{1p3} + A_{i11}m_{2p3} + A_{i12}m_{3p3} \end{aligned}$$

式中, A_{i01} 、 A_{i02} 、 \dots 、 A_{i12} ($i=1, 2, 3$)为标量系数, 是机构参数与位姿函数。

同理, 上平台为刚体, 球心点的线位移 \mathbf{A}_0 是唯一的。可由静定条件(3个铰链点的线位移与球心点的线位移在上平台的三棱锥的3条棱边上的投影相等)确定; 也可用过约束条件求得, 即用第*i*支链上连杆的上端点线位移与上平台的角位移表达

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_{0i} = \mathbf{A}_i + \delta_{0i} \times (-r\mathbf{v}_i) \quad i = 1, 2, 3 \quad (19)$$

经整理得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_{0i} &= \mathbf{a}_{if}f_{13} + \mathbf{a}_{ir}r_{i3} + \mathbf{a}_{ip}p_{i3} + \mathbf{a}_{im}M_{ip3} \\ &i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (20)$$

式中, \mathbf{a}_{if} 、 \mathbf{a}_{ir} 、 \mathbf{a}_{ip} 、 \mathbf{a}_{im} 为矢量系数, 是机构参数与位姿函数。

2 机构的刚度矩阵

机构动平台上载荷 \mathbf{F} 、 \mathbf{M} , 动平台产生角位移 δ 、球心的线位移 \mathbf{A} , 则

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \mathbf{k} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \delta \end{pmatrix} \quad (21)$$

式中, \mathbf{k} 为机构整体静刚度矩阵。

由式(19)取*i*=1, 经整理得

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{G}_{11}\mathbf{C}_{11}\mathbf{F}_g \quad (22)$$

式中, $\mathbf{F}_g = (\mathbf{F} \quad \mathbf{M})^T$ 为作用在上平台的外力; \mathbf{C}_{11} 为4×6系数矩阵, 由静力学求得, 其中的每一项元素均为机构参数与位姿的函数。

$\mathbf{G}_{11} = (\mathbf{a}_{1f} \quad \mathbf{a}_{1r} \quad \mathbf{a}_{1p} \quad \mathbf{a}_{1m})$ 为3×4系数矩阵,

式中

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{1f} = \mathbf{A}_{13} - r(\mathbf{A}'_{13} \times \mathbf{v}_1) \\ \mathbf{a}_{1r} = \mathbf{B}_{13} - r(\mathbf{B}'_{13} \times \mathbf{v}_1) \\ \mathbf{a}_{1p} = \mathbf{C}_{13} - r(\mathbf{C}'_{13} \times \mathbf{v}_1) \\ \mathbf{a}_{1m} = \mathbf{D}_{13} - r(\mathbf{D}'_{13} \times \mathbf{v}_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{13} = \mathbf{b}_{f13} + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{b}_{r12} - (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{v}_1 \mathbf{b}_{p12} - \\ \quad r[(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{u}_1] \mathbf{b}_{m1r2} + r[(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1)] \mathbf{b}_{m1p2} \\ \mathbf{B}_{13} = \mathbf{b}_{r13} + \mathbf{b}_{f12} + r[(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{u}_1] \mathbf{b}_{m1r2} - \\ \quad r[(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1)] \mathbf{b}_{m1p2} \\ \mathbf{C}_{13} = (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1) \mathbf{b}_{p12} - (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{u}_1 \mathbf{b}_{r12} - \\ \quad r(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{b}_{m1p2} + r[(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{v}_1] \mathbf{b}_{m1p2} \\ \mathbf{D}_{13} = \mathbf{b}_{m1p3} + [(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1)] \mathbf{b}_{m1p2} - \\ \quad (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{u}_1 \mathbf{b}_{m1r2} \\ \mathbf{b}_{f12} = r^3 [(\boldsymbol{\omega}_1 + (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1) \times \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1)] / EI_z \\ \mathbf{b}_{r12} = r^3 (1 - \pi/2) [(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1) \times \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1] / EI_z - r^3 \times \\ \quad [(\pi/2)^2/2 + 1 - \pi/2] \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{b}_{p12} = r^3 (1 - \pi/2) [(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{u}_1) - (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1)] / G\beta hb^3 + \\ \quad r^3 (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1) / EI_y \\ \mathbf{b}_{m1r2} = r^2 [(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{u}_1) - (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1)] / (G\beta hb^3) + r^2 \times \\ \quad (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1) / EI_y \\ \mathbf{b}_{m1p2} = r^2 \{ (\pi/2)^2/2 + \pi [(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1) \times \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1] / 2 \} / EI_z \\ \mathbf{b}_{f13} = -r^3 \mathbf{v}_1 / EI_z \\ \mathbf{b}_{r13} = r^3 [(\pi/2)^2/2 + 1 - \pi/2] \mathbf{v}_1 / EI_z \\ \mathbf{b}_{m1p2} = -r^2 (\pi/2)^2 \times \mathbf{v}_1 / 2EI_z \end{cases}$$

而

$$\begin{cases} \mathbf{A}'_{13} = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_1) \mathbf{a}_{r12} - (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{v}_1 \mathbf{a}_{p12} + r[(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \times \\ \quad (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1)] \mathbf{a}_{m1p2} - r[(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{u}_1] \mathbf{a}_{m1r2} + \mathbf{a}_{f13} \\ \mathbf{B}'_{13} = r[(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{u}_1] \mathbf{a}_{m1r2} + \mathbf{a}_{r13} + \mathbf{a}_{f12} - \\ \quad r[(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1)] \mathbf{a}_{m1p2} \\ \mathbf{C}'_{13} = \mathbf{a}_{p13} + (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1) \mathbf{a}_{p12} + \\ \quad r[(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{v}_1] \mathbf{a}_{m1p2} - r(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_1) \times \\ \quad \mathbf{a}_{m1r2} - (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{u}_1 \mathbf{a}_{r12} \\ \mathbf{D}'_{13} = \mathbf{a}_{m1p3} + (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1) \mathbf{a}_{m1p2} - \\ \quad (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{u}_1 \mathbf{a}_{m1r2} \\ \mathbf{a}_{f12} = r^2 [(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1) \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1)] (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) / EI_z \\ \mathbf{a}_{r12} = (1 - \pi/2) (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1) \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) r^2 / EI_z \\ \mathbf{a}_{p12} = r^2 (\pi/2 - 1) (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{u}_1 (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) / G\beta hb^3 \\ \mathbf{a}_{m1r2} = -r [(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{u}_1] (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) / G\beta hb^3 \\ \mathbf{a}_{m1p2} = r\pi [(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u}_1) \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1)] (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) / 2EI_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{f13} = r^2 (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) / EI_z \\ \mathbf{a}_{r13} = r^2 (1 - \pi/2) (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) / EI_z \\ \mathbf{a}_{p13} = -r^2 \pi \boldsymbol{\omega}_1 / 2G\beta hb^3 \\ \mathbf{a}_{m1p3} = r\pi (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{v}_1) / 2EI_z \end{cases}$$

由式(17)取*i*=1 经整理得

$$\delta_0 = \mathbf{G}_{12}\mathbf{C}_{12}\mathbf{F}_g \quad (23)$$

式中, \mathbf{C}_{12} 为12×6系数矩阵, 由静力学求得。其中的每一项元素均为机构参数与位姿的函数。

$G_{12} = (G_{101} \ G_{102} \ G_{103} \ G_{104} \ G_{105} \ G_{106} \ G_{107} \ G_{108} \ G_{109} \ G_{110} \ G_{111} \ G_{112})$ 为 3×12 系数矩阵, 其中

$$\begin{cases} G_{101} = A'_{13} + A_{101}v_1 + \xi_{101}\omega_1 \\ G_{102} = A_{102}v_1 + \xi_{102}\omega_1 \\ G_{103} = A_{103}v_1 + \xi_{103}\omega_1 \\ G_{104} = B'_{13} + A_{104}v_1 + \xi_{104}\omega_1 \\ G_{105} = A_{105}v_1 + \xi_{105}\omega_1 \\ G_{106} = A_{106}v_1 + \xi_{106}\omega_1 \\ G_{107} = C'_{13} + A_{107}v_1 + \xi_{107}\omega_1 \\ G_{108} = A_{108}v_1 + \xi_{108}\omega_1 \\ G_{109} = A_{109}v_1 + \xi_{109}\omega_1 \\ G_{110} = D'_{13} + A_{110}v_1 + \xi_{110}\omega_1 \\ G_{111} = A_{111}v_1 + \xi_{111}\omega_1 \\ G_{112} = A_{112}v_1 + \xi_{112}\omega_1 \end{cases}$$

$$A_{101} = \{A'_{13}[(v_1 \cdot v_2)v_2 - v_1] + \xi_{201}(\omega_2 \cdot v_1) + \xi_{101}(\omega_1 \cdot v_2)(v_1 \cdot v_2)\} / [1 - (v_1 \cdot v_2)^2]$$

$$A_{102} = \{-A'_{23}[(v_1 \cdot v_2)v_2 - v_1] + \xi_{202}(\omega_2 \cdot v_1) + \xi_{102}(\omega_1 \cdot v_2)(v_1 \cdot v_2)\} / [1 - (v_1 \cdot v_2)^2]$$

$$A_{103} = [\xi_{103}(\omega_1 \cdot v_2)(v_1 \cdot v_2) + \xi_{203}(\omega_2 \cdot v_1)] / [1 - (v_1 \cdot v_2)^2]$$

$$A_{104} = \{B'_{13}[(v_1 \cdot v_2)v_2 - v_1] + \xi_{204}(\omega_2 \cdot v_1) + \xi_{104}(\omega_1 \cdot v_2)(v_1 \cdot v_2)\} / [1 - (v_1 \cdot v_2)^2]$$

$$A_{105} = \{-B'_{23}[(v_1 \cdot v_2)v_2 - v_1] + \xi_{205}(\omega_2 \cdot v_1) + \xi_{105}(\omega_1 \cdot v_2)(v_1 \cdot v_2)\} / [1 - (v_1 \cdot v_2)^2]$$

$$A_{106} = [\xi_{106}(\omega_1 \cdot v_2)(v_1 \cdot v_2) + \xi_{206}(\omega_2 \cdot v_1)] / [1 - (v_1 \cdot v_2)^2]$$

$$A_{107} = \{C'_{13}[(v_1 \cdot v_2)v_2 - v_1] + \xi_{207}(\omega_2 \cdot v_1) + \xi_{107}(\omega_1 \cdot v_2)(v_1 \cdot v_2)\} / [1 - (v_1 \cdot v_2)^2]$$

$$A_{108} = \{-C'_{23}[(v_1 \cdot v_2)v_2 - v_1] + \xi_{208}(\omega_2 \cdot v_1) + \xi_{108}(\omega_1 \cdot v_2)(v_1 \cdot v_2)\} / [1 - (v_1 \cdot v_2)^2]$$

$$A_{109} = [\xi_{109}(\omega_1 \cdot v_2)(v_1 \cdot v_2) + \xi_{209}(\omega_2 \cdot v_1)] / [1 - (v_1 \cdot v_2)^2]$$

$$A_{110} = \{D'_{13}[(v_1 \cdot v_2)v_2 - v_1] + \xi_{210}(\omega_2 \cdot v_1) + \xi_{110}(\omega_1 \cdot v_2)(v_1 \cdot v_2)\} / [1 - (v_1 \cdot v_2)^2]$$

$$A_{111} = \{-D'_{23}[(v_1 \cdot v_2)v_2 - v_1] + \xi_{211}(\omega_2 \cdot v_1) + \xi_{111}(\omega_1 \cdot v_2)(v_1 \cdot v_2)\} / [1 - (v_1 \cdot v_2)^2]$$

$$A_{112} = [\xi_{112}(\omega_1 \cdot v_2)(v_1 \cdot v_2) + \xi_{212}(\omega_2 \cdot v_1)] / [1 - (v_1 \cdot v_2)^2]$$

动平台的位移与外载荷的关系为

$$\begin{pmatrix} \Delta_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11}C_{11} \\ G_{12}C_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} \quad (24)$$

其中机构的柔度矩阵为

$$\Xi = \begin{pmatrix} G_{11}C_{11} \\ G_{12}C_{12} \end{pmatrix}$$

当矩阵非奇异时, 将式(23)整理得

$$\begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = \Xi^{-1} \begin{pmatrix} \Delta_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

与式(21)比较, 得机构的静刚度矩阵

$$k = \Xi^{-1} \quad (26)$$

3 机构的主刚度及方向

事实上, 机构的整体刚度与许多因素有关, 如机构的构型、机构中各构件的材料特性、构件的几何尺寸参数、机构运动位姿、过约束条件等。

为了建立机构的刚度指标与机构的参数及运动位姿之间的关系, 采用坐标变换, 即正交变换使刚度矩阵对角化, 从而求得机构 6 主刚度指标及所在方向, 为建立机构的刚度与参数设计关系打下基础。

设 $\lambda_1 \sim \lambda_6$ 为刚度矩阵的特征值; $x_1 \sim x_6$ 为矩阵的特征矢量。经正交化得正交矢量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$, 从而得变换矩阵

$$P = (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4 \ \beta_5 \ \beta_6)$$

式中, P 为 6×6 的可逆矩阵。由式(24)得

$$\begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = P \Lambda P^{-1} \begin{pmatrix} \Delta_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

令

$$\begin{pmatrix} F' \\ M' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Delta' \\ \delta' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \Delta_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix}$$

上式为新坐标系 $O'x'_1x'_2x'_3x'_4x'_5x'_6$ 下的力与变形。

从而有

$$\begin{pmatrix} F' \\ M' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Delta' \\ \delta' \end{pmatrix} \quad (28)$$

此时, 刚度矩阵变为

$$A = \text{diag}(k'_{11}, k'_{22}, \dots, k'_{66})$$

式中, $K'_{11}, K'_{22}, K'_{33}, K'_{44}, K'_{55}, K'_{66}$ 为机构的 6 个主刚度指标, 均与机构位姿有关。

取新坐标系的坐标轴的单位矢量

$$\begin{cases} x'_1 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \\ x'_2 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \\ x'_3 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \\ x'_4 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)^T \\ x'_5 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T \\ x'_6 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T \end{cases}$$

对应原坐标系下矢量 $X_i'' = \beta_i$, $i = (1, 2, \dots, 6)$, 机构主刚度所在的方向为 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 。

4 机构刚度数值计算

机构的参数: $\alpha_1 = 90^\circ$ 、 $\alpha_2 = 90^\circ$ 、 $\beta_1 = 60^\circ$ 、 $\beta_2 = 45^\circ$; 上、下平台分别为等边三角形, 即

$\eta_{11} = \eta_{21} = 0$ 、 $\eta_{12} = \eta_{22} = 2\pi/3$ 、 $\eta_{13} = \eta_{23} = 4\pi/3$, 球面机构半径 $r = 80 \text{ mm}$ 。

各连杆均采用为 45 钢(切变模量 $G = 80 \text{ GPa}$ 、弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$), 断面尺寸 $h = 10 \text{ mm}$ 、 $b = 10 \text{ mm}$ 、 $\beta = 0.141$ 。

任意选择上平台的 3 个输出位姿, 计算机构的柔度矩阵、刚度矩阵; 正交变换使刚度矩阵对角化, 得机构的主刚度及主方向见下表。

表 部分位姿下的机构的主刚度及主方向

输出位姿角		主刚度值	主方向
$\varphi_z = 0$	角位移刚度	40 503 948.72	(0.003 056 42, 0.006 065 17, -0.003 885 71, -0.043 748 81, 0.056 828 40, 0.997 394 28) ^T
	$k_1/(N \cdot mm \cdot rad^{-1})$	1 824 867.274	(-0.000 102 94, 0.009 775 34, 0.005 943 85, -0.973 405 96, 0.221 981 77, -0.055 380 54) ^T
		1 490 772.842	(0.016 559 96, -0.001 811 48, -0.000 504 62, 0.224 520 92, 0.973 256 90, -0.045 646 53) ^T
$\varphi_x = \pi/12$	拉/压或线位移刚度 $k_2/(N \cdot mm^{-1})$	585.805 553 4	(-0.006 971 17, -0.984 257 34, -0.176 192 57, -0.011 012 58, 0.000 960 12, 0.004 782 92) ^T
		542.796 87	(0.997 779 51, 0.004 455 02, -0.064 273 19, -0.004 000 54, -0.016 200 72, -0.002 587 49) ^T
		269.513 797	(0.064 061 46, -0.176 300 93, 0.982 229 33, 0.003 595 54, -0.001 506 35, 0.004 946 02) ^T
$\varphi_z = \pi/12$	角位移刚度	5 840 523.175	(-0.001 484 66, -0.009 134 74, 0.003 641 47, -0.152 869 39, -0.019 372 36, -0.988 006 45) ^T
	$k_1/(N \cdot mm \cdot rad^{-1})$	2 325 718.039	(-0.004 510 07, 0.003 978 96, 0.010 177 10, -0.987 456 02, -0.035 136 25, 0.153 480 66) ^T
		1 458 703.170	(0.017 645 46, -0.000 259 19, -0.000 847 14, -0.037 778 99, 0.999 035 02, -0.013 770 49) ^T
$\varphi_x = \pi/6$	拉/压或线位移刚度 $k_2/(N \cdot mm^{-1})$	652.591 744 9	(-0.093 230 51, -0.950 018 67, -0.297 776 13, -0.005 171 85, 0.001 070 74, 0.008 605 33) ^T
		584.709 543 7	(0.942 330 51, 0.012 201 95, -0.333 935 83, -0.007 285 09, -0.017 217 25, -0.001 294 85) ^T
		273.320 643	(0.320 916 41, -0.311 795 29, 0.894 258 74, 0.007 381 86, -0.004 647 61, 0.004 645 43) ^T
$\varphi_z = \pi/12$	角位移刚度	14 102 054.08	(0.005 583 71, -0.007 813 76, -0.004 663 30, -0.332 555 95, 0.402 236 65, -0.852 935 07) ^T
	$k_1/(N \cdot mm \cdot rad^{-1})$	3 733 411.987	(-0.012 684 20, -0.003 253 96, 0.002 280 72, 0.153 212 59, -0.869 297 80, -0.469 755 84) ^T
		1 381 353.822	(0.007 576 65, 0.002 518 02, -0.025 530 32, 0.930 281 87, 0.286 641 19, -0.227 369 58) ^T
$\varphi_x = \pi/6$	拉/压或线位移刚度 $k_2/(N \cdot mm^{-1})$	820.746 419 3	(0.688 339 03, 0.723 138 78, 0.055 711 66, -0.004 235 33, -0.010 307 18, -0.005 632 54) ^T
		623.126 202 4	(0.601 669 79, -0.526 711 73, -0.600 054 18, -0.012 738 37, -0.015 794 60, 0.009 562 78) ^T
		286.849 862 8	(0.404 886 85, -0.446 729 33, 0.797 591 65, 0.018 107 50, 0.002 849 87, -0.003 333 71) ^T

计算结果表明, 机构的主刚度在 3 个方向较大、另 3 个方向较小而且差距巨大, 表现为机构线位移刚度远远低于角位移刚度。

主刚度的值与方向随着机构的位姿变化而变化, 当位姿远离零点 ($\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$) 位置时机构的刚度明显增大。

5 结论

(1) 3-RRR 球面并联机构的整体静刚度除与机构的构型、机构中各构件的材料性能、机构参数、几何尺寸、机构运动位姿有关外, 还受过约束条件影响。

(2) 机构的主刚度值在 3 个方向较大, 另 3 个方向较小, 而且差值巨大。表现为机构线位移刚度远远低于角位移刚度。该特性不利于机构的直接应用; 机构的主刚度及主方向随位姿变化而变化, 当位姿远离零点 ($\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$) 位置时, 机构的刚度明显增大, 说明机构的灵活性有明显降低。

(3) 本文研究成果对机构的工程设计、选择机

构最佳刚度工作区域、提高机构精度、改进机构设计等有重要意义。

参 考 文 献

[1] 曾宪菁, 黄田, 曾子平, 等. 基于三自由度球面并联机构数控回转台的机械设计[J]. 机器人技术与应用, 2000, 4: 23-26.
ZENG Xianjing, HUANG Tian, ZENG Ziping, et al. Design of NC rotary table based on spherical parallel mechanism with 3-DOF[J]. Robot Technique and Application, 2000, 4: 23-26.

[2] GOSSSELIN C. Stiffness mapping for parallel manipulator [J]. IEEE Transaction on Robotics and Automation, 1990, 6(3): 377-382.

[3] EI-KHASAWNEH B S, FERREIR P M. Computation of stiffness and stiffness bounds for parallel link manipulator [J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 1999, 39(2): 321-342.

[4] HUANG T, MEI J P, ZHAO X Y, et al. Stiffness estimation of a Tripod-based parallel kinematics machine[C]//Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics &

- Automation, May 21-26, 2001, Seoul, South Korea. USA: IEEE, 2001: 3 280-3 285.
- [5] LI Y W, WANG J S, WANG L P. Stiffness analysis of a Stewart platform based parallel kinematics machine [C]//Proc. of 19th IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, May 11-15, 2002, Washington D.C..USA: IEEE, 2002: 3 672-3 677.
- [6] SVININ M M, HOSOE S, UCHIYANA M. On the stiffness and stability of Gough-Stewart platforms [C]//Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, May 21-26, 2001, Seoul, South Korea. USA: IEEE, 2001: 3 268-3 273.
- [7] HAN S, CHANG-ROKSHIN, JIN-HO K, et al. Stiffness analysis of a low-DOF parallel manipulator including the elastic deformations of both joints and links[C]//Proceedings of ICCAS 2005, June 2-5, 2005, Gyeonggi-Do, South Korea, 2005: 510.
- [8] YOON W K, SUEHIRO T, TSUMAKI Y. Stiffness analysis and design of a compact modified delta parallel mechanism [J]. *Robotics*, 2004, 22: 463-475.
- [9] YOON W K, SUEHIRO T, TSUMAKI Y, et al. A method for analyzing parallel mechanism stiffness including elastic deformations in structure[C]//Proceedings of the 2002 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Sep. 30-Oct. 4, 2002, Lausanne, Switzerland. USA: IEEE, 2002: 2 875-2 880.
- [10] PIGOSKI T, GRIFFIS M, DUFFY J. Stiffness mapping employing different frames of reference[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1998, 33(6): 825-838.
- [11] CECCARELLI M, CARBONE G. A Stiffness analysis for CaPaMan (Cassino Parallel Manipulator)[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2002, 37: 427-439.
- [12] NABIL S, MOSHE S. Stiffness synthesis of a variable geometry six-degrees-of-freedom double planar parallel robot[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 2003, 22(9): 757-775.
- [13] LONCARIC J. Normal forms of stiffness and compliance matrices[J]. *IEEE J. Robotics and Automation*, 1987, 3: 567-572.
- [14] RODNEY G R. Minimal realization of a spatial stiffness matrix with simple springs connected in parallel[C]//Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation, May 10-15, 1999, Detroit, Michigan. USA: IEEE, 1999: 2 153-2 158.
- [15] GIUSEPPE C, HUN-OK L, MACRCO C, et al. Stiffness analysis of the humanoid robot WABIAN-RIV : Modeling[C]//Proceedings of 20th IEEE International Conference on Robotics and Automations, Sep. 14-19, 2003, Taipei, Taiwan, China. USA: IEEE, 2003: 3 654-3 659.
- [16] 韩书葵, 方跃法, 槐创峰. 4自由度并联机器人刚度分析[J]. *机械工程学报*, 2006, 42(5): 31-34.
HAN Shukui, FANG Yuefa, HUAI Chuangfeng. Stiffness analysis of four degrees parallel manipulator[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006, 42(5): 31-34.
- [17] 陈俊, 王立平, 张华, 等. 平面2自由度并联构型静刚度分析和设计[J]. *机械工程学报*, 2005, 41(7): 158-163.
CHEN Jun, WANG Liping, ZHANG Hua, et al. Stiffness analysis and design of 2-DOF parallel manipulator[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2005, 41(7): 158-163.
- [18] 熊有伦, 丁汉, 刘恩沧. 机器人学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1993.
XIONG Youlun, DING Han, LIU Encang. *Robotics*[M]. Beijing: China Machine Press, 1993.

作者简介: 周玉林, 男, 1961 年出生, 博士研究生。主要研究方向为人形机器人、并联机器人。

E-mail: zyl@ysu.edu.cn

高峰, 男, 1956 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为并联机器人。

E-mail: fengg@sjtu.edu.cn