

基于 NURBS 的自由曲面精确拟合方法研究*

孙玉文 吴宏基 刘 健

(大连理工大学机械工程学院 大连 116024)

摘要: 提出了一类卷曲模型的 NURBS 曲面建模新方法。借助提出的截面轮廓设计技术, 构造了点云数据的系列截面轮廓线, 并以蒙皮操作为基础得到了能反映点云基本几何特征的基面。应用参数校正技术, 给出了一种合理且比较有效的基面参数化方法, 并由此用加权最小二乘算法实现了基于迭代的 NURBS 曲面的精确拟合。实际的算例结果验证了方法的实用性及精确性, 非常适于模具型腔建模。

关键词: 曲面拟合 非均匀有理 B 样条 蒙皮 CAD/CAM

中图分类号: TP391 TH12

0 前言

复杂曲面重构在制造业中应用很多, 例如从国外承接定单, 有时只能根据提供的产品原型来进行零件加工或自行设计模具, 此时需要的就是反求工程技术^[1], 这也因此考验承接方的制造水平和能力。随着视觉扫描仪及五轴加工中心等设备的不断发展和普及, 企业的快速模具制作能力和快速反映能力得到进一步的增强。在车身和模具型腔等一类复杂曲面建模时, 非均匀有理 B 样条(NURBS)方法以其优良的整体光滑曲面拟合能力和强大的局部调控特性而受到普遍重视。但是, NURBS 曲面是典型的张量积曲面, 需要的是矩形拓扑区域, 而实际的曲面有时并没有明显的四条边界, 这给实际的建模操作带来了很大的困难。因此, 面对海量的散乱数据, 如何进行合理、均匀而有效的参数化就是首要的问题, 处理不好, 将给建模的精度和效率带来相当大的影响, 甚至有可能导致失败。

当前的 NURBS 建模方法很多^[2,3], 但基本上倾向于采用最小二乘拟合算法。在数据点的参数化方面, 尚没有一个完全的普适方法, 一般情况下要根据点集的特征做基面参数化。在操作中, 经常使用的基面是平面、柱面及双线性 Coons 曲面等简单曲面。显然, 在处理复杂曲面时, 这些基面还不能完全反映曲面的几何特征, 使得参数化结果并不十分理想。正因如此, 通过 Sphard 插值、复合 2 次函数插值等方法得到矩形阵列点进而构造出粗略 NURBS 拟合基面的方法得到广泛使用。但是, 这些插值方法还不能适用于严格的 3D 数据, 且只对

有明显的矩形拓扑边界的数据比较适宜, 对于一类更为复杂的卷曲模型, 则需要通过交互方式或者采用组合曲面建模方式才能完成。针对该类卷曲模型, 应用截面设计技术思想, 提出了一种基面参数化方法, 并由此实现了复杂曲面的精确拟合, 实际的工程验证也说明了方法的有效性和精确性。由于在反求中 NURBS 曲线曲面的权因子通常取为 1, 因此在下面的叙述中主要采用 B-spline 曲线曲面方程描述。

1 基面构造方法

总的来说, NURBS 曲面拟合方面的研究主要集中在基面构造和参数化及参数校正两个方面, 旨在提高参数化与建模的精度和效率^[4,5]。以截面设计技术为基础, 通过提取点集的边界及内部带有合理位向的截面线族, 进而采用蒙皮技术来构造基面。曲面的蒙皮操作具有计算量较小、易于操作等优点, 但精度较常规拟合方法要差些。因此, 非常适合于构造点集的基面。采用这种方法构造的基面, 能够基本反映出点集的几何特征。

1.1 点集的内部轮廓线提取方法

在 NURBS 曲面拟合中一个最关键的问题就是数据点的参数化。一般来说, 在数据点的参数化时, 通常要事先找出点集的四条边界。对于没有明显矩形边界的卷曲模型, 这里也根据边界的特征给出四条边界来, 从而为后续的参数化操作提供准备。

于是对于给定的一个点集, 不妨设定其四条边界已知。如图 1 所示, 令 $l(u), r(u)$ 和 $a(v), d(v)$ 是一个点集的四条边界曲线。其中, $a(v)$ 和 $d(v)$ 为主边界曲线, 通常要求它们为平面曲线, 如果实际的主边界曲线比较接近平面曲线, 可使用其平面投影曲线。另外, 还需要得到点集的内部截面线族。

* 国家自然科学基金 (50275017) 和辽宁省自然科学基金 (20010102087) 资助项目。20030117 收到初稿, 20030729 收到修改稿

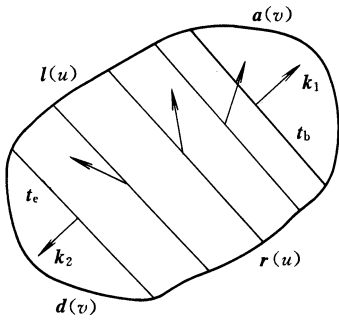


图1 基面的截平面位向选择

此时，可以应用提出的截面轮廓设计技术^[6]，提取出每条截面线。这种截面设计技术以最小距离点对的思想来提取轮廓数据，比较简单快捷，克服了单纯向截平面投影的方法所存在的不足。这样，在得到四条边界曲线后，其内部截面线间隔按等参数值划分。例如在 u 方向 $u \in [0,1]$ 区间内， $u=0$ 对应的是 $a(v)$ ， $u=1$ 对应的是 $d(v)$ ，则其余内部截面线按参数 u 均匀划分给出，且每个截面的位向根据首末截平面的位向计算得到。设 $a(v)$ 在其和 $r(u)$ 交点处的单位切矢为 k_1 ， $d(v)$ 在其与 $l(u)$ 交点处的单位切矢为 k_2 。如果 k_1 和 k_2 分别与其对应的 u 方向线构成的平面平行，则说明在 $l(u)$ 和 $r(u)$ 上每个 u 参数上所对应的截面位向是相同的。反之，如果含 k_1 和 k_2 的截面位向不同，则说明参数 u 在从 0 向 1 变化的过程中，其截形位向也是变化的，并逐渐由 k_1 所对应的截面位向 e_{nb} 过渡到 k_2 所对应的截面位向 e_{ne} 。且

$$\begin{cases} e_{nb} = (k_1 \times t_b) / |k_1 \times t_b| \\ e_{ne} = (k_2 \times t_c) / |k_2 \times t_c| \end{cases} \quad (1)$$

式中 e_{nb} —— 初始截平面单位法向矢量
 e_{ne} —— 终止截平面单位法向矢量

起始轮廓线端点连线矢量 $t_b = l(0) - r(0)$

终止轮廓线端点连线矢量 $t_c = l(1) - r(1)$

在计算内部截平面位向时，每个参数值 u 上的合理截平面位向可按线性变化得到，即

$$e_{nu} = (1-u)e_{nb} + ue_{ne}, e_{nu} = e_{nu} / |e_{nu}| \quad (2)$$

式中 e_{nu} —— u 参数线所在截平面的单位法向矢量

这样给定了每个截平面的位向及某一通过点，就能应用截面轮廓设计技术提取出点集的内部截面线来。

依据给出的方法，进行了实际的截面轮廓提取测试。为便于同前文对应，采用的数据点云模型仍为自行车座模型，具体可参见参考文献^[6]，这里不再给出。在该点云中，那些位于平面上的点是测量参考平面点，在建模中不予考虑，故点集的边界也要通过自动提取给出。一般来说，采用截面设计技

术提取的轮廓数据点的分布比较均匀，其密度与实际采样密度相差无几。图 2 给出了实际提取的边界及内部截面线族，可以看出效果很好，为进一步的曲面蒙皮操作打下了基础。

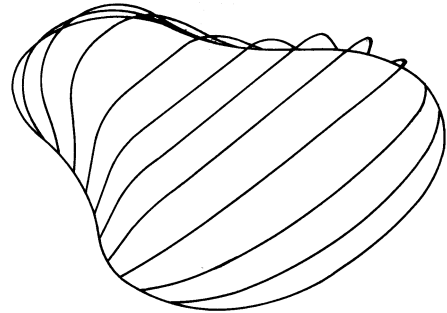


图2 提取的边界及内部截面线族

1.2 基面的蒙皮构造方法

给定了主边界 $a(v)$ 、 $d(v)$ 和内部的截面线族后，有多种方法可以构造出基面来。由于曲面的蒙皮操作将曲面建模问题转化为两步曲线的拟合或插值问题，使问题得以简化，所以这里采用该方法来构造基面。由此可知，基面的构造可分为两步：① 截面数据的 NURBS 曲线拟合。② 截面线族的蒙皮操作。

1.2.1 截面数据的曲线拟合方法

在数学上，一条 B-spline 曲线^[7]被定义为

$$C(v) = \sum_{i=0}^n B_i N_{i,k}(v) \quad (3)$$

式中 B_i —— 第 i 个控制点

$n+1$ —— 控制点个数

$N_{i,k}(v)$ 是 B-spline 曲线的基函数，其定义如下

$$N_{i,k}(v) = \frac{v-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_{i,k-1}(v) + \frac{t_{i+k+1}-v}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(v) \quad (4)$$

且

$$N_{i,0}(v) = \begin{cases} 1 & t_i \leq v < t_{i+1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

式中 $U = [t_0, \dots, t_{n+k+1}]$ —— 节点矢量

k —— 样条基的次数

对于给定的某一内部截面轮廓点集合

$$Q_i = [x_i, y_i, z_i]^T \quad i = 0, \dots, m$$

要给出其一条拟合 B-spline 曲线，必须首先确定数据点的位置参数 $\{v_i\}_0^m$ ，次数 k ，控制点数 $n+1$ 和节点矢量 U 。待求变量为控制点矢量。在计算数据点的位置参数时，可采用如下参数化公式

$$v_0 = 0, v_i = v_{i-1} + \frac{\|Q_i - Q_{i-1}\|^a}{\sum_{j=1}^m \|Q_j - Q_{j-1}\|^a} \quad i = 1, \dots, m \quad (5)$$

其中参数 a 可取为 0、0.5 或 1，分别对应着均匀、向心和累加弦长参数化。此外，节点矢量 \mathbf{U} 也应根据位置参数 $\{v_i\}_0^m$ 和控制点数来加以确定^[8]。由于这里的曲线拟合操作面向的是基面构造，因此控制点数不会过多，节点矢量可按均匀分布的方式给出。

当没有约束条件时，控制点的解矢量可由下面最小二乘误差 E 的最小化方法得到

$$\min E = \sum_{i=0}^m \|C(v_i) - Q_i\|^2 \quad (6)$$

在原理上，该最小二乘问题等同于一个线性系统，其解矢量用矩阵形式可表示为

$$\mathbf{P} = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{Q} \quad (7)$$

式中 $\mathbf{N} \in \mathbf{R}^{(m+1) \times (n+1)}$

$$\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{(n+1) \times 3}$$

$$\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{(m+1) \times 3}$$

1.2.2 曲面的蒙皮操作

得到边界及内部截面轮廓的 B-spline 拟合曲线后，还要过这些曲线用蒙皮技术^[9,10]构造出基面来。由于存在曲线相容性问题，因此在拟合主边界及内部截面轮廓线时，要采用相同的控制点数和统一的节点矢量。不妨设得到的蒙皮曲面为

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^n \mathbf{B}_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,k}(v) \quad (8)$$

式中， $N_{i,k}(u)$ 被定义的节点矢量区间为

$$\mathbf{U} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{k+1}, \mu_{k+1}, \dots, \mu_r, \underbrace{1, \dots, 1}_{k+1} \right\}$$

$N_{j,k}(v)$ 被定义的节点矢量区间为

$$\mathbf{V} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{k+1}, v_{k+1}, \dots, v_n, \underbrace{1, \dots, 1}_{k+1} \right\}$$

此时，还需要确定曲面的 $(r+1) \times (n+1)$ 个控制点 $\mathbf{B}_{i,j}$ 。既然所有的截面轮廓和主边界被定义在统一的节点矢量上，可令这些曲线为

$$C_j(v) = \sum_{i=1}^n d_{i,j} N_{i,k}(v) \quad j=1, \dots, h \quad (9)$$

式中 h ——拟合曲线的个数

由此，蒙皮曲面的控制点 $\{\mathbf{B}_{i,j}\}_{i=0}^r, j=0, \dots, n$ 可通过再次对曲线族式(9)的第 i 列控制点 $\{d_{i,j}\}_{j=1}^h$ 进行 B-spline 曲线拟合得到。由图 3 给出的两条主边界和 10 条内部截面线，进行了基面的蒙皮操作。曲面的控制点网格为 8×8 网格。图 4 给出了所构造的蒙皮曲面的等参数线网格图。可以看出，得到的基面参数线比较规则，没有剧烈的扭曲情况，基本反

映了点集的几何特征，由此获得了较好的数据参数化效果。

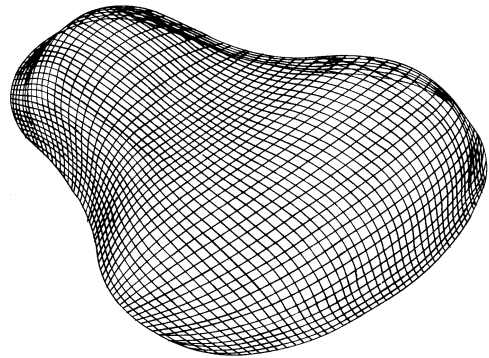


图 3 由蒙皮操作得到的基面

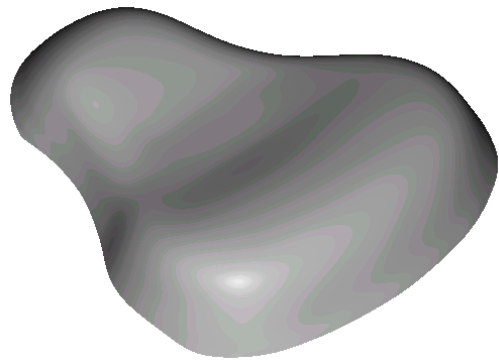


图 4 精确拟合曲面的明暗图显示

2 点集的精确曲面拟合方法

可以看到，采用这种截面构造方法得到的曲面是开曲面。一般基面的控制点数可以不必取得过高，通常用 6×6 控制点列的曲面就可以满足需要。在精确曲面拟合中，所需要的操作也分为两部分：①数据点的参数化。②曲面的迭代拟合。用基面进行数据点的参数化，可以获得很高的精度。但不管采用何种参数化方法，其原则是保证曲面在节点向量的每个区间内都应有数据点，即参数化是均匀的，从而避免奇异情况的发生。

2.1 数据点的参数化

在 NURBS 曲面拟合中，一个好的参数化不仅会提高曲面的重构精度，而且也可以使数值计算过程稳定。在采用基面参数化方法时，通常取数据点在基面上的投影点所对应的参数值作为该数据点的参数值。一般这个投影点最好取为数据点距曲面的最小距离点。可见，这种映射是个迭代求解的过程，即数据点和曲面之间必须满足

$$[\mathbf{J}\mathbf{S}(u, v)|_{u=u_i, v=v_i}]^T [\mathbf{S}(u_i, v_i) - \mathbf{P}_i] = 0$$

式中 \mathbf{J} ——曲面的雅可比矩阵

该式一般要通过牛顿迭代给出，在迭代初始一

般要首先给定一个迭代初始值。迭代初始值的具体确定方法是, 首先将基面依照用户给定的分辨率, 例如 20×20 网格, 划分成等参数线网格, 得到每个网格节点的坐标值和对应的参数值^[7]。对于给定的某一个数据点, 找到距其最近的网格节点, 并以该节点参数值作为这个数据点的迭代初始值。当然, 也可以针对具体的曲面的特点, 给出适宜于该曲面的简单初始值确定方法, 例如按柱面、球面方式映射等。这样, 在给出了所有点的迭代初始参数值后, 就可以应用当前成熟的迭代搜索方法, 进行精确对应点的计算。

2.2 LSQ 拟合曲面的理论基础

做最小二乘曲面拟合时, 一般要首先给定待拟合曲面的控制点数、样条基的阶数和两个节点向量。曲面的控制点数越多, 计算越复杂, 但一般来说精度也就越高, 也更容易出现奇异现象。因此在满足精度的前提下, 要尽量使用较少的控制点。不妨取曲面的控制点集合为 $(m+1) \times (n+1)$ 列, 即控制点 $S_{i,j} (i=0, \dots, m; j=0, \dots, n)$, 令样条基的阶数为 k , 则曲面的基函数可由 DeBoor-Cox 公式确定。设两节点矢量分别为 $U = [u_0, u_1, \dots, u_{m+k+1}]$ 和 $V = [v_0, v_1, \dots, v_{n+k+1}]$ 。于是可得待拟合的 B-spline 曲面方程为

$$R(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n S_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,k}(v) \quad (10)$$

假定有 g 个数据点 $P_i (i=1, \dots, g)$, 其对应的参数值为 $\{(u_i, v_i) | i=1, \dots, g\}$, 则对于点 $\{P_i\}_{i=1}^g$ 的逼近问题就等同于下面的非线性最小二乘问题

$$\min E(S_{ij}) = \sum_{h=1}^g w_h^2 \|R(u_h, v_h) - P_h\|^2 = \|D(NS - P)\|^2 \quad (11)$$

式中 D ——数据点权因子阵

$$D = \text{diag}(w_1, \dots, w_g) \in \mathbf{R}^{g \times g}$$

$$N = (N_{i,k}(u_h) N_{j,k}(v_h))_{h,i,j} \in \mathbf{R}^{g \times (m+1)(n+1)}$$

P ——数据点阵

$$P = (P_1, \dots, P_g)^T \in \mathbf{R}^{g \times 3}$$

S ——控制点阵

$$S = (S_{ij}) \in \mathbf{R}^{(m+1)(n+1) \times 3}$$

采用矩阵形式, 该加权最小二乘问题可被转化为如下线性系统^[3]

$$(DN)^T (DN)S = (DN)^T (DP) \quad (12)$$

式(12)所示的方程组, 一般是一个超定线性方程组, 需要列满秩。为了保证系数矩阵各行元素线性不相关, 在建立超定线性方程组时, 要保证没有重复点, 此时可采用 Householder 变换法来求解。

对于拟合中的加权因子同样可取为 1, 也可以根据数据点的精度和重要性赋予相应的权值。

采用上述算法, 进行了自行车座数据点云的曲面重构。提取的边界曲线及其内部轮廓线已由前面图 2 给出。构造的点集的蒙皮基面如图 3 所示, 为 8×8 控制网格。当最终拟合曲面采用 15×15 控制网格时, 数据点的平均拟合误差和最大拟合误差分别为 0.039 mm 和 0.281 mm; 当采用 20×20 控制网格时, 其相应的误差分别为 0.022 mm 和 0.215 mm。图 4 给出了控制网格为 15×15 时最终拟合曲面的明暗图形显示。可以看出曲面的光顺性较好, 拟合的精度也较高。如果对拟合结果仍然不够满意, 且不希望通过增加控制点数来提高精度, 此时可以对最终拟合曲面的参数进行再次校正, 实现曲面的精确迭代。这里不在详细给出, 一般曲面在迭代 1 至 2 次时的精度提高效果比较明显。

3 结论

(1) 基于提出的截面轮廓设计技术, 给出了一种基面参数化方法。它以主边界和内部截面轮廓族为基础, 采用蒙皮技术构造基面, 能够基本反映点集的几何特征, 有效解决了一类卷曲模型的参数化问题, 精度较高, 满足了工程实际的需要。

(2) 采用相同的控制点数和统一的节点矢量进行截面线族的 B-spline 曲线拟合, 避免了蒙皮操作时的节点相容性问题。较之采用节点插入算法来避免相容性, 计算简单, 且拟合曲线较插值曲线光滑。

(3) 以数据点距基面的最小距离点所对应的参数作为数据点的位置参数, 并采用加权的最小二乘拟合算法, 强调了关键数据点的作用, 且可以实现自由曲面的精确迭代拟合。

(4) 如果实际操作中对曲面的边界要求十分严格, 此时可用该边界的实际拟合曲线方程作为约束, 从而构成约束最小二乘曲面拟合; 当然, 也可通过增大边界点的拟合权因子值来完成。两种方法在实现上并不困难。

参 考 文 献

- 1 Varady T, Martin R R, Cox J. Reverse engineering of geometric models—an introduction. Computer Aided Design, 1997, 29(4): 255~268
- 2 Rogers D F, Fog N G. Constrained B-spline curve and surface fitting. Computer Aided Design, 1989, 21(10): 641~648
- 3 Weiss V, Andor L. Advanced surface fitting techniques.

- Computer Aided Geometric Design, 2002, 19(1): 19~42
- 4 Weiyin Ma, Kruth J P. Parameterization of randomly measured points for least squares fitting of B-spline curves and surfaces. Computer Aided Design, 1995, 27(9): 663~675
- 5 Piegl L A, Tiller W. Parametrization for surface fitting in reverse engineering. Computer Aided Design, 2001, 33(8): 593~603
- 6 孙玉文, 贾振元, 王越超, 等. 基于自由曲面点云的快速原型制作技术研究. 机械工程学报, 2003, 39(1): 56~59, 83
- 7 Piegl L A, Tiller W. The NURBS Book. Second Edition. Springer, 1997
- 8 Park H, Kim K, Lee S C. A method for approximate NURBS curve compatibility based on multiple curves re-fitting. Computer Aided Design, 2000, 32(2): 237~252
- 9 Park H. An approximate lofting approach for B-spline surface fitting to functional surfaces. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2001, 18(7): 474~482
- 10 Woodward C D. Skinning techniques for interactive

B-spline surface interpolation. Computer Aided Design, 1988, 20(8): 441~451

RESEARCH ON THE METHOD OF ACCURATE NURBS SURFACE FITTING TO SCATTERED POINTS

Sun Yuwen Wu Hongji Liu Jian
(Dalian University of Technology)

Abstract: A NURBS surface fitting method with tight tolerance for wrap-around models is presented. Using the sectional design technique, two primary boundaries and some interior sectional curves are extracted. Then a base surface is constructed by skinning these curves. By means of the method of base surface parameterization, an accurate and smooth fitting surface is finally implemented. The practical example demonstrated the feasibility of the proposed method.

Key words: Surface fitting Non-uniform rational B-spline Skinning CAD/CAM

作者简介: 孙玉文, 男, 1971 年出生, 博士, 讲师。主要研究方向为快速制造技术、反求工程以及 CAD/CAM 等, 发表论文 10 余篇。



展会信息

中国机械工程学会将举办专业物流大展

即将于 2004 年 6 月 8~11 日召开的“第九届中国国际物料搬运与物流技术展览会”及“第二届中国国际传动及控制技术展览会”的筹备工作已全面展开。目前已有百余家国内外企业报名参展, 展品涉及物料搬运与物流技术、物流服务、传动及控制技术等各个方面。

在进一步丰富物料搬运设备种类的同时, 更加重视物流的信息化、自动化、网络化、智能化和柔性化等特点, 将以更加丰满的专业技术内容推出展会新的亮点。来自欧美、特别是亚洲近邻的海外展团将为中国大陆乃至周边国家的专业观众、用户提供提供一个一流的专业交流交易平台。

部分已报名参展厂商如北京富士通系统工程有限公司、瑞士卡迪斯系统公司、住友重机械工业株式会社和 KEB—德国科比有限公司的参展无疑将使展会大为增色。

主办单位中国机械工程学会将遵守更好地服务于企业的信念, 随时报告展会的新动向, 介绍参展企业, 同时也敦请已报名和将要报名的展商及时提供各自的信息, 以更加完整的企业形象, 热情参与第九届中国国际物料搬运与物流技术展览会的各项活动!

欢迎登陆网站 www.cmes.org.cn 浏览展会信息。展会咨询热线: 021-54661052; 021-54661063; 021-54661079。