

# 基于离散傅里叶变换与谐波平衡法的行星 齿轮系统非线性动力学分析

孙 涛 胡海岩

(南京航空航天大学振动工程研究所 南京 210016)

摘要: 研究了多间隙作用下行星齿轮系统的强非线性动力学行为。考虑齿轮啮合误差和时变啮合刚度, 建立了 2K-H 型行星齿轮传动的弯扭耦合非线性动力学模型。利用离散 Fourier 变换(DFT)及其逆变换(IDFT)处理方程中非线性恢复力与位移坐标之间的函数关系, 发展了一种可以求解多阶谐波响应的数值谐波平衡法, 并用 Broyden 方法求解其形成的代数平衡方程组。用该方法分析齿轮非线性动力学稳态解时, 啮合刚度与激励可以是任意的周期函数形式, 不仅可以包含多次谐波响应, 而且还可以求解系统的次谐波响应。克服了传统的解析谐波平衡法基于描述函数进行而难以求解一般周期响应和次谐波响应的缺点。作为算例, 用该方法分析了行星齿轮传动的非线性频响特性, 并与相应的线性系统进行了比较。

关键词: 行星齿轮传动 非线性振动 齿轮动力学 谐波平衡法 离散傅里叶变换

中图分类号: TH113

## 0 前言

行星齿轮传动是一种广泛应用的齿轮传动形式。众所周知, 出于润滑的需要和便于安装等方面的考虑, 以及制造、加工、安装等过程中出现的误差和齿轮传动过程中的磨损, 使得齿轮啮合不可避免地存在齿侧间隙。已有的研究表明, 齿轮副的间隙非线性对单对齿轮啮合振动有显著影响<sup>[1-3]</sup>。而近来有关行星齿轮系统间隙非线性动力学的研究亦开始受到重视<sup>[4-7]</sup>。文献[7] 从非线性动力学的角度出发, 采用谐波平衡法研究了行星齿轮系统的建模与求解, 揭示了间隙作用下的行星系统的非线性动力学特性。但经典的解析谐波平衡法无法处理超谐、次谐波响应。本文发展了一种借助离散 Fourier 变换的数值谐波平衡法(简称 DFT 谐波平衡法), 不仅可以求解多次谐波稳态响应, 而且还可以求解出次谐波响应。并据此对 2K-H 行星齿轮系统的非线性稳态响应进行分析。

## 1 DFT 谐波平衡法

以一般的 2K-H 型行星齿轮传动系统作为分析对象, 考虑输入部分、输出部分、太阳轮、行星架和三个行星轮的回转自由度以及太阳轮中心在两个方向的移动自由度。采用集中质量法建立行星系

统的弯扭耦合非线性动力学模型与方程。

进行量纲一化处理, 可得到 2K-H 行星齿轮传动的非线性动力学方程如下<sup>[6]</sup>

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kf(q) = p \quad (1)$$

式中  $m$ ——系统的质量矩阵  
 $c$ ——系统的阻尼矩阵  
 $k$ ——系统的刚度矩阵  
 $p$ ——载荷列矢量  
 $f$ ——间隙非线性函数列矢量

具体的行星系统结构及其动力学模型与方程建立过程可参见文献[6]。

函数列矢量  $f$  中的所有元素具有下面的统一形式<sup>[6]</sup>

$$f_i = f(q_i) = \begin{cases} q_i - b_i, & q_i > b_i \\ 0, & -b_i \leq q_i \leq b_i \\ q_i + b_i, & q_i < -b_i \end{cases} \quad (2)$$

式(1)是一个多间隙多自由度的非线性二阶微分方程组, 但与单自由度齿轮副间隙非线性动力学方程在形式上完全相同。

### 1.1 Fourier 级数展开

一般情况下, 式(1)中的载荷列矢量  $p$  与刚度矩阵  $k$  都是周期为  $T$ 、频率为  $\Omega$  的周期函数, 因而可以展开成 Fourier 级数形式。

将  $p$  与  $k$  中各个元素分别展开成 Fourier 级数, 即可得到矩阵  $p$  与  $k$  的 Fourier 级数表达式

$$k(\tau) = k_1 + \sum_{k=1}^K [k_{2k} \cos(k\eta\theta) + k_{2k+1} \sin(k\eta\theta)] \quad (3)$$

$$p(\tau) = p_1 + \sum_{l=1}^L [p_{2l} \cos(l\eta\theta) + p_{2l+1} \sin(l\eta\theta)] \quad (4)$$

这里,为求解周期为 $\eta T$ ( $\eta$ 是正整数, $\eta=1$ 时得到周期为 $T$ 的解)的稳态解,引入了一个量纲一时间变量 $\theta = \frac{1}{\eta} \Omega \tau$ 。

对周期解 $q$ 进行关于 $\theta$ 的Fourier级数展开

$$q(\theta) = u_1 + \sum_{r=1}^R [u_{2r} \cos(r\theta) + u_{2r+1} \sin(r\theta)] \quad (5)$$

由于 $q(\theta) = q(\theta + \eta T)$ ,故 $f(\theta) = f(\theta + \eta T)$ ,周期函数 $f(q)$ 亦可进行Fourier级数展开

$$f(q(\theta)) = f_1 + \sum_{r=1}^R [f_{2r} \cos(r\theta) + f_{2r+1} \sin(r\theta)] \quad (6)$$

## 1.2 谐波平衡方程

把式(3)~(6)代入微分方程式(1)中,分别令方程两边的常数项、各次正弦谐波、余弦谐波的系数相等,得到由 $(2R+1)N$ 个方程组构成的代数方程组 $s_r = 0$ 。

$$s_1 = k_1 f_1 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^R (k_{2l} f_{2l\eta} + k_{2l+1} f_{2l\eta+1}) - p_1 \quad (7a)$$

$$s_{2r} = -(r\Omega/\eta)^2 m u_{2r} + (2r\Omega/\eta) c u_{2r+1} + k_{2r/\eta} f_1 + k_1 f_{2r} - p_{2r/\eta} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^R k_{2l} (f_{2(l\eta-r)+1} + f_{2(l\eta+r)+1} - f_{2(r-l\eta)}) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^R k_{2l+1} (f_{2(l\eta-r)} + f_{2(l\eta+r)} - f_{2(r-l\eta)}) \quad r=1, 2, \dots, R \quad (7b)$$

$$s_{2r+1} = -(r\Omega/\eta)^2 m u_{2r+1} - (2r\Omega/\eta) c u_{2r} + k_{2r/\eta+1} f_1 + k_1 f_{2r+1} - p_{2r/\eta+1} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^R k_{2l} (-f_{2(l\eta-r)+1} + f_{2(l\eta+r)+1} + f_{2(r-l\eta+1)}) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^R k_{2l+1} (f_{2(l\eta-r)} - f_{2(l\eta+r)} + f_{2(r-l\eta)}) \quad r=1, 2, \dots, R \quad (7c)$$

## 1.3 离散傅里叶变换与逆变换

在方程组(7)中,稳态响应 $q$ 的Fourier级数各项系数 $u_r$ 是待求的未知量,由于 $f(q)$ 是 $q$ 的函数,函数 $f(q)$ 的Fourier级数各次谐波系数 $f_r$ 也是未知量 $u_r$ 的函数,求解之前必须把 $f_r$ 用 $u_r$ 来表达。由于 $f_r$ 和 $u_r$ 是各自函数的Fourier级数系数,可以采用Fourier变换和逆变换来实现两者之间的联系,步骤如下。

(1) 离散傅里叶逆变换(IDFT): 给定变量 $q$ 的Fourier系数 $u_r$ ,通过离散Fourier变换的逆变换,得到 $q$ 在时域一个周期之内的离散时间序列 $q_n$

$$q_n = u_1 + \sum_{r=1}^R [u_{2r} \cos(\frac{2\pi r n}{N}) + u_{2r+1} \sin(\frac{2\pi r n}{N})] \quad n \in [0, N-1] \quad (8a)$$

由 $q$ 的时间序列 $q_n$ 确定 $f(q)$ 的时间序列 $g_n$

$$g_n = f(q_n) \quad n \in [0, N-1] \quad (8b)$$

(2) 离散傅里叶变换(DFT): 对 $g_n$ 进行Fourier变换,得到频域内 $f(q)$ 的Fourier系数 $f_r$

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g_n \\ f_{2r} = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g_n \cos(\frac{2\pi r n}{N}) \\ f_{2r+1} = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g_n \sin(\frac{2\pi r n}{N}) \end{cases} \quad r \in [1, R] \quad (9)$$

这样,式(7)只是关于未知变量 $u_i$ ( $i=1, 2, \dots, 2R+1$ )的非线性代数方程组。只有在极为特殊的情况下,非线性方程组才有可能直接求解,对大部分问题要依靠数值计算的迭代法。Newton法是该领域中几乎所有算法的基础,为了改善Newton法的不足,产生了若干变形的算法。本文采用拟牛顿法中的Broyden方法求解非线性代数方程组。给出 $u_i$ 一组初值,用迭代方法求解方程组式(7)即可得到系统的稳态响应。

## 3 算例分析

本文仍采用文献[7]中的计算模型,2K-H行星传动的基本参数为:齿数 $z_s=15$ , $z_p=24$ , $z_r=63$ ;模数 $m=2.5$  mm;压力角 $\alpha=20^\circ$ ;变位系数 $x_s=0.3835$ , $x_p=0.161$ , $x_r=0.7056$ ;齿宽 $b=14$  mm;额定负载 $T=50$  N·m。

由于方程自由度很多,为计算简单,方程组式(7)中取 $R=1$ ,即只考虑平均分量与基频分量。位移标称尺度取为 $b_0=0.01$  mm。量纲一化的误差幅值和齿侧间隙值分别取 $e=2$ , $b=5$ 。

计算得出的基频分量幅值频响曲线如图1~3所示。 $x_{sp1}$ 、 $x_{rp1}$ 和 $x_{hs}$ 分别表示太阳轮和行星轮副,行星轮和内齿轮副以及输入轴和太阳轮之间的振动。为了对比分析,图1~3中还同时给出了间隙为0时的线性系统的频响曲线。

由图1~3可见:由于间隙带来的强非线性,在线性共振频率附近出现了幅值跳跃和多值解的典型非线性特征。而多值解则表明齿轮副的振动可以出现不脱齿啮合与脱齿啮合两种形式;由于系统的耦合,当齿轮副的振动幅值产生突跳时,会连带输入

轴等其他非间隙构件也产生幅值不连续的问题。

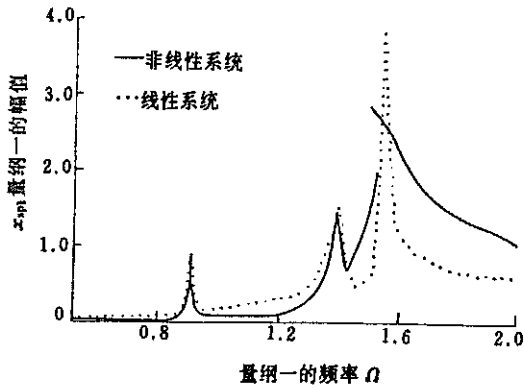


图 1  $x_{sp1}$  交变幅值的频响曲线

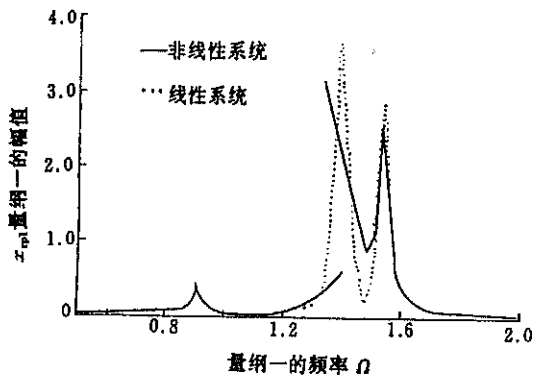


图 2  $x_{sp1}$  交变幅值的频响曲线

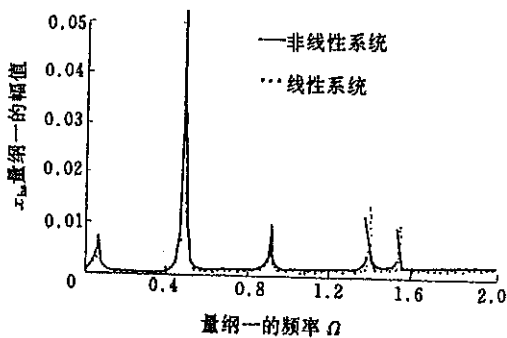


图 3  $x_{hs}$  交变幅值的频响曲线

但是,多自由度的行星齿轮系统中,不是每个共振频率附近都能激发出非线性振动,只有在对齿轮副啮合振动敏感的共振点附近,才出现了冲击和幅值跳跃的非线性动力学特征。而在低频段时,非线性模型与线性模型的频响曲线几乎没什么差别。

另外,作者业已在文献[5]中就本文的分析方法与传统谐波平衡法以及数值积分的结果进行过比较,对比表明,应用本文所给方法计算行星传动的非线性动态特性,结果是可信的。

#### 4 结论

本文建立了间隙作用下 2K—H 型行星齿轮传动的非线性动力学模型,借助离散 Fourier 变换和

逆变换,给出了求解多自由度非线性微分方程的数值谐波平衡法。用这种方法求解了 2K—H 行星齿轮机构的稳态响应。分析表明:考虑间隙时,行星齿轮系统的动态特性具有明显的非线性特征,出现了幅值跳跃和多值解,而且由于多自由度系统中的耦合,齿轮副以外的其他无间隙构件的振动也可以呈现非线性动力学行为。但在频率较低的前三阶共振范围内,系统几乎不受间隙非线性的影响。

#### 参 考 文 献

- 1 Kahraman A, Singh R. Nonlinear dynamics of a spur gear pair. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 142(1): 49~75
- 2 Ozguven H N. A non-linear mathematical model for dynamic analysis of spur gears including shaft and bearing dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 145 (2): 239~260
- 3 Kahraman A, Singh R. Nonlinear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearances. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 144(1): 469~506
- 4 Kahraman A. Load sharing characteristics of planetary transmission. *Mechanism and Machine Theory*, 1994, 29(8): 1 151~1 165
- 5 孙涛. 行星齿轮系统非线性动力学研究: [博士学位论文]. 西安: 西北工业大学, 2000
- 6 孙涛, 沈允文, 孙智民, 等. 行星齿轮系统非线性动力学模型与方程. *机械工程学报*, 2002, 38(3): 6~10
- 7 孙涛, 沈允文, 孙智民, 等. 行星齿轮传动非线性动力学方程求解与动态特性分析. *机械工程学报*, 2002, 38(3): 11~15

### NONLINEAR DYNAMICS OF PLANETARY GEAR TRANSMISSION BY HARMONIC BALANCE METHOD BASED ON DFT

Sun Tao Hu Haiyan

(Nanjing University of Aeronautics and Astronautics)

**Abstract:** Gear transmission is bound to have some backlash (clearance), which may be either designed to provide better lubrication or due to manufacturing errors and wear, while nonlinear dynamics studies on planetary gear system subjected to clearances are very limited. A lateral-torsional coupled nonlinear dynamic model of a planetary gear system with multiple backlash, time-varying mesh stiffness, error excitation and sun-gear shaft compliance is constructed. To solve the resulted

equations, a numerical harmonic balance method is developed based on discrete Fourier transform (DFT) and inverse discrete Fourier transform (IDFT). This method is applicable for general periodic steady responses of time-varying periodic systems with multiple harmonic, even superharmonic and subharmonic solutions included. As an example, nonlinear frequency response characteristics of a 2K-H planetary gear system is obtained by employing the developed method. Some typical nonlinear phenomena such as jump discontinuities and multi-valued solutions

are observed. The study yields some guidelines to be instrumental to further nonlinear studies of planetary transmission.

**Key words:** Planetary gear drive

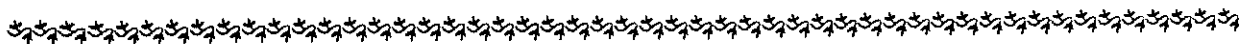
Non-linear vibration

Gear dynamics

Method of harmonic balancing

Discrete Fourier transform

作者简介:孙涛,男,1972年出生,博士后。研究方向为机械系统动力学、振动与噪声控制、车辆动力学、机电一体化,发表学术论文15篇。



## 2002年中国机械工程学会年会准备就绪

主题为“制造业未来中国”的2002年中国机械工程学会年会已准备就绪,将于2002年12月5日至8日在北京召开。

大会将由全国政协副主席、中国工程院主席团名誉主席宋健院士和中国机械工程学会理事长、中国科学院院长路甬祥院士在人民大会堂做主题报告拉开序幕。宋健院士的主题报告题目为《制造业与现代化》,路甬祥院士的主题报告题目为《团结奋斗 开拓创新 建设制造强国》。近万机械工程界的专家、学者将汇聚一堂,聆听大会主题报告。

年会的其他组成单元还有:中国机械工程学会青年学术会议,主题是“青年/面向信息时代的制造技术与装备/WTO”;中国机械工程学会生产工程学术会议,主题是“高速、高效、高精度——面向新世纪提高制造业竞争力的技术与装备”;中国机械工程学会机械工业自动化学术会议,主题是“以信息化带动工业化,用高新技术改造传统产业,以实现制造业跨越式发展”;中国机械工程学会成组技术学术会议,主题是“创新设计与制造过程的集成技术”;第三届企业家论坛,主题是“企业文化建设与人力资源开发”;中国工业工程师论坛,主题是“工业工程在中国创造新的财富”;此外,还有中国机械工程学会理化检验学术会议和制造业信息资源研讨会。

同期举办的还有“数控机床通讯、网络化的开发与应用”,“成形与模具制造技术”,“ISO9000、14000、OHSAS18000标准实用知识讲座”,“工业设计”等实用技术培训。

本次大会的论文集已由《机械工程学报》编辑,机械工业出版社正式出版(详情见第83页)。