

DOI: 10.3901/JME.2009.02.138

大挠度后屈曲倾斜梁结构的非线性力学特性*

贾建援¹ 赵剑² 王洪喜¹

(1. 西安电子科技大学机电工程学院 西安 710071;

2. 大连理工大学汽车工程学院 大连 116024)

摘要: 基于弹性梁的几何非线性大挠度屈曲理论, 建立两端固定对称倾斜支撑梁结构的大挠度后屈曲控制微分方程, 采用几何非线性隐式变形协调关系来表达强非线性超静定边值问题, 得到描述倾斜梁大挠度后屈曲行为的精确解析解。采用数值方法求解含有第一、二类椭圆积分的强非线性微分方程, 给出不同倾角梁结构从初始屈曲到后屈曲并发生两态跳转过程中的位形曲线及非线性刚度。根据最小能量原理和挠曲线拐点个数, 分析对称屈曲模态与非对称屈曲模态之间相互跳转的内在联系及其对结构非线性刚度突变的影响, 得到了屈曲模态之间的转换条件。跳转过程的数值仿真表明, 倾斜支撑梁结构发生大挠度后屈曲时具有明显的双稳态特性且只出现低阶(1、2阶)屈曲模态, 仿真计算结果与试验结果相一致。

关键词: 几何非线性 大挠度 后屈曲 跳转 双稳态

中图分类号: O343

Large Deflection and Post-buckling Behavior of a Clamped-clamped Oblique Braced Beam

JIA Jianyuan¹ ZHAO Jian² WANG Hongxi¹

(1. School of Electro-Mechanical Engineering, Xidian University, Xi'an 710071;

2. School of Automotive Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024)

Abstract: Based on the geometrically non-linear buckling theory of large deflection elastic beams, the governing differential equations of post-buckling of a symmetrical clamped-clamped beam with oblique angles, subjected to a combined load, are established. By using the latent restraint conditions of post-buckling deformation of the elastic beam, the strong nonlinear boundary value problems are numerically solved and the exact solutions in the numerical sense are obtained directly. The non-linear transverse stiffness and the post-buckling configurations during the periods of initial buckling, post-buckling and snap-through process of the beam with different angles are presented. According to the principle of minimum energy and the number of inflexion points along the deflection curve, the inward relation of different buckling mode and its influence on the structural stiffness are analyzed systematically, and the transformation condition for the different buckling modes are obtained. While the oblique buckled beam deflects largely, the obvious bistability and the low order buckling modes (the first and the second) are shown by the numerical simulation results which are consistent with those obtained by experiments.

Key words: Geometrical nonlinearity Large deflection Post-buckling Snap-through Bistability

0 前言

屈曲梁微结构能够在运动过程中实现能量的储存与释放, 表现出良好的双稳态特性, 并且具有结构简单、变形大、易于实现微加工等优点, 在微

机械系统领域具有广泛的应用, 例如各种类型的微开关^[1]、微致动器^[2]、微位移器^[3]等。关键部件屈曲梁的大挠度力学特性分析成为研制过程中的关键问题, 越来越受到国内外学者的重视。HARTONO^[4-6]应用弹性线解分析随动载荷作用下桁架和悬臂梁的屈曲, 并研究了在假定对称和非对称屈曲模态下大挠度梁的后屈曲平衡路径。MAU^[7]基于轴线不可伸长的假设研究了弹性地基上梁初始后屈曲路径的稳

* 国家自然科学基金资助项目(10476019)。20080330收到初稿, 20081020收到修改稿

定性。FANG 等^[8]则基于小变形理论和一阶模态假设的基础上对梁的后屈曲行为进行了分析。WANG^[9]分别采用摄动法和打靶法研究了变截面弹性悬臂立柱和一端固定, 一端简支压杆的后屈曲问题。KARAMANLIDIS 等^[10]和 KITIPORNCHAI 等^[11]采用有限元法研究了薄壁杆件的前屈曲和后屈曲行为。COFFIN 等^[12]基于轴线可伸长理论并采用椭圆积分法研究了两端不可移简支梁的湿热过屈曲问题。王安稳等^[13]利用差分方法求解动力后屈曲非线性方程, 研究了弹性直杆的两类轴向碰撞屈曲问题。张清东等^[14]分析了高温带钢的局部宽度内压屈曲及后屈曲。采用有限元弧长法可以有效地求解结构的后屈曲路径, 并能实现全过程跟踪^[15]。虽然采用非线性有限元分析可以解决大部分工程和科学问题, 但对于屈曲模态跳转过程中各量之间的变化关系难以进行直观描述。

目前众多研究内容主要针对轴向载荷作用梁的位形曲线进行了分析计算, 而对于复合载荷作用大挠度后屈曲梁状态跳转行为所表现出的非线性特性研究甚少。为此, 本文以一种新型阈值加速度传感器的研制需求为背景, 深入研究了两端固支对称倾斜支撑梁结构的后屈曲行为, 得到梁跳转过程中的非线性横向刚度和位形曲线, 为大位移高可靠性传感器件的设计提供理论基础。

1 大挠度后屈曲梁结构与控制方程

1.1 屈曲梁结构模型

倾斜支撑梁结构模型如图 1 所示, 结构由长为 L 的两端固支梁支撑, 初始倾角为 α , 为使结构发生大变形时保持平衡状态, 需要施加横向力 F_v 。

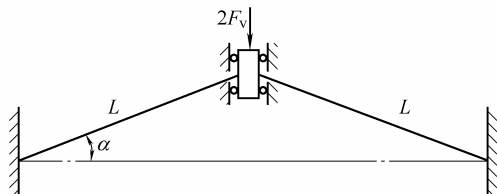


图 1 倾斜梁结构示意图

1.2 大挠度后屈曲控制方程

根据结构的对称性, 以左端梁为研究对象, 以未变形状态建立坐标系, 如图 2 所示。

当质量块产生铅垂方向的位移 δ 时, δ 以向下为正, F_p 和 F 分别为弹性合力 F_r 的轴向压力分量和剪力分量, 其中 $F_p = R \cos \varphi$, $F = F_r \sin \varphi$, 因此梁端点的位移以及任意截面处弯矩 M 表示如下

$$y_m = \delta \cos \alpha \quad x_m = L - u = L - \delta \sin \alpha \quad (1)$$

$$M = -F_r(y - y_m) \cos \varphi - F_r(x_m - x) \sin \varphi + M_1 \quad (2)$$

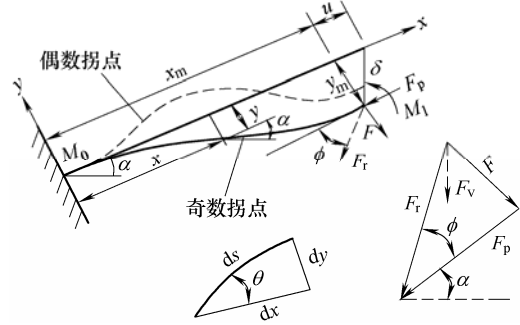


图 2 载荷作用下梁屈曲变形示意图

式中 x_m 、 y_m 分别为发生 δ 位移后的端点坐标值; φ 为弹性合力 F_r 与 x 轴的夹角; M_1 为梁固定端处的弯矩; M 为梁上任意截面处的弯矩; θ 为梁上任意截面处的转角; u 为梁端点处的轴向位移。

由式(2)得到复合载荷作用下梁的大挠度后屈曲问题的控制方程式

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{ds} = \frac{-F_r \cos \varphi (y_m - y) - F_r \sin \varphi (x_m - x) + M_1}{EI} \\ \frac{dy}{ds} = \sin \theta \\ \frac{dx}{ds} = \cos \theta \end{cases} \quad (3)$$

式中 s 为沿梁挠曲线的弧长, EI 为刚度。

利用式(3)化简弯矩平衡方程得到

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} = -\frac{F_r}{EI} \cos \varphi \sin \theta + \frac{F_r}{EI} \sin \varphi \cos \theta \quad (4)$$

将式(4)进行积分得到

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \frac{F_r}{EI} \cos \varphi \cos \theta + \frac{F_r}{EI} \sin \varphi \sin \theta + c = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \right)^2 \quad (5)$$

式中, c 为积分常数。

挠曲线拐点处有 $M=0$, 转角 $\theta=\theta^*$, 由式(5)得到积分常数 c

$$c = -\frac{F_r}{EI} \cos(\theta^* - \varphi) \quad (6)$$

利用两端固支梁大挠度后屈曲边界条件

$$\begin{cases} s = L, \theta = 0, y = -y_m, x = x_m \\ s = 0, \theta = 0, y = 0, x = 0 \end{cases} \quad (7)$$

代入式(5)得到如下关系

$$c = \frac{1}{2} \left(\frac{M_1}{EI} \right)^2 - \frac{F_r \cos \varphi}{EI} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_0}{EI} \right)^2 - \frac{F_r \cos \varphi}{EI} \quad (8)$$

由式(5)、(6)、(8)以及挠曲线的凹向关系确定不同屈曲模态梁任意截面处弯矩

$$M = \pm \sqrt{\frac{F_r}{EI} \sqrt{\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta^* - \varphi)}} \quad (9)$$

式中正、负号表示截面上弯矩的方向。

当挠曲线奇数拐点时

$$M_0 = -M_1 \quad (10)$$

式中 M_0 为梁左固定端处的弯矩。

由式(2)、(8)分别确定梁端点处的弯矩

$$M_1 = F_r \left(\frac{y_m}{2} \cos \varphi + \frac{x_m}{2} \sin \varphi \right) \quad (11)$$

由式(9)、(11)可以确定挠曲线拐点处转角 $\theta = \theta^*$ 与 φ 和 F_r 之间的关系

$$\cos(\theta^* - \varphi) = -\frac{1}{8} \frac{F_r}{EI} (y_m \cos \varphi + x_m \sin \varphi)^2 + \cos \varphi \quad (12)$$

当挠曲线偶数拐点时

$$M_0 = M_1 \quad (13)$$

由式(2)得到 φ 与 x_m 、 y_m 之间的关系

$$\tan \varphi = \frac{F}{F_p} = -\frac{y_m}{x_m} \quad (14)$$

由式(8)、(13)得到梁端点的弯矩为

$$M_1 = \sqrt{2F_r EI [\cos \varphi - \cos(\theta^* - \varphi)]} \quad (15)$$

由式(1)、(11)、(15)得出方程组式(3)并不封闭, 给定控制参数 δ 后并不能确定 x 、 y 、 θ 。因而, 还需要针对非线性超静定问题, 提供其他约束条件来确定弹性力 F_r 及其方向角 φ , 求解大挠度后屈曲微分方程组。

2 屈曲梁非线性隐式变形协调条件

2.1 梁长约束条件

根据弯矩的正负取值, 由式(9)得到挠曲线曲率方程

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm \sqrt{\frac{2F_r}{EI} \sqrt{\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta^* - \varphi)}} \quad (16)$$

式(16)中正、负号直接表明挠曲线的凹向关系, 是判断挠曲线奇、偶拐点的关键。

令 n 为拐点数, 当 n 为奇数时, 挠曲线为非对称屈曲模态; 当 n 为偶数时, 挠曲线为对称屈曲模态。以拐点和挠度峰值点为分界点将梁挠曲线分为 $2n$ 段, 对各段沿杆长方向依次积分得到屈曲梁的杆长不变约束条件, 为了便于分析计算, 令 $\beta = \theta - \varphi$, $\gamma = \theta^* - \varphi$, 进行角度变换, 引入变量 ϕ , 令

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sin \frac{\gamma}{2} \sin \phi \quad (17)$$

挠曲线偶数拐点时(n 为偶数)

$$L = \sqrt{\frac{EI}{2F_r}} \sum_{k=1}^{2n} \int_{\theta^* \sin \frac{k-1}{2}\pi}^{\theta^* \sin \frac{k}{2}\pi} \left[\sin \left(\frac{k}{2}\pi \right) - \sin \left(\frac{k+1}{2}\pi \right) \right] d\theta =$$

$$2n \sqrt{\frac{EI}{2F_r}} \int_0^\gamma \frac{d\beta}{\sqrt{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}}} \quad (18)$$

挠曲线奇数拐点时(即 n 为奇数)

$$L = \sqrt{\frac{EI}{2F_r}} \sum_{k=1}^{2n} \int_{\theta^* \sin \frac{k-1}{2}\pi}^{\theta^* \sin \frac{k}{2}\pi} \left[\sin \left(\frac{k+2}{2}\pi \right) - \sin \left(\frac{k+1}{2}\pi \right) \right] d\theta =$$

$$= \frac{EI}{2F_r} \sum_{k=1}^{2n} \int_{\theta^* \sin \frac{k-1}{2}\pi}^{\theta^* \sin \frac{k}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta^* - \varphi)}} =$$

$$= - (n+1) \sqrt{\frac{EI}{2F_r}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta^* - \varphi)}} -$$

$$= (n-1) \sqrt{\frac{EI}{2F_r}} \int_{-\theta^*}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta^* - \varphi)}} =$$

$$= -2n \sqrt{\frac{EI}{2F_r}} I_1(\theta) \quad (19)$$

$$I_1(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta^* - \varphi)}} \quad (20)$$

根据变量代换, 将式(17)代入式(20)化简得

$$I_1(\phi) = \int_0^{\theta^*} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta^* - \varphi)}} =$$

$$= \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2} d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin^2 \phi}} \quad (21)$$

当 $\theta=0$ 时, 由式(17)得

$$\sin \phi_0 = \frac{-\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \quad (22)$$

综合上述推导, 由式(18)、(19)得到挠曲线奇、偶拐点时的杆长不变约束条件表达通式

$$L = 2(-1)^n n \sqrt{\frac{EI}{2F_r}} \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2} d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin^2 \phi}} \quad (23)$$

当 n 为偶数时, $\phi_0 = 0$; 当 n 为奇数时, 由式(22)确定 ϕ_0 。

2.2 梁端位移协调关系

由式(3)、(16)得到梁上任意截面的位移 x 、 y

$$y = \int_0^\theta \sin \theta ds = \pm \sqrt{\frac{EI}{2F_r}} \int_0^\theta \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta^* - \varphi)}} \quad (24)$$

$$x = \int_0^\theta \cos \theta ds = \pm \sqrt{\frac{EI}{2F_r}} \int_0^\theta \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta^* - \varphi)}} \quad (25)$$

对式(24)、(25)沿梁长积分, 得到梁端点的位移 y_m 、 x_m

$$y_m = n(-1)^n \sqrt{\frac{2EI}{F_r}} \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\beta + \varphi) d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin^2 \phi}} \quad (26)$$

$$x_m = n(-1)^n \sqrt{\frac{2EI}{F_r}} \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\beta + \varphi) d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin^2 \phi}} \quad (27)$$

联立式(26)、(27)并化简得到屈曲梁端点位移关系方程组

$$\begin{cases} y_m = (-1)^n n \sqrt{\frac{2EI}{F_r}} [\cos \varphi I_2(\phi) + \sin \varphi I_3(\phi)] \\ x_m = (-1)^n n \sqrt{\frac{2EI}{F_r}} [\cos \varphi I_3(\phi) - \sin \varphi I_2(\phi)] \end{cases} \quad (28)$$

$$I_2(\phi) = 2\sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2} \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi = 2\sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \phi_0 \quad (29)$$

$$I_3(\phi) = \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2} \left(2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1 \right) d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin^2 \phi}} = 2\sqrt{2} \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin^2 \phi} d\phi - I_1(\phi) \quad (30)$$

当 n 为奇数时, 由式(12)、(17)、(28)求得 φ 与梁端点位移之间的关系

$$\tan \varphi = \frac{x_m}{y_m} \quad (31)$$

式(28)中有 φ 、 F_r 为未知量, 其余均为已知量, 因此求解方程组式(28)可得到挠曲线端点位移约束关系

$$x_m \cos \varphi - y_m \sin \varphi = 2n \sqrt{\frac{EI}{2F_r}} I_3 \quad (32)$$

利用梁长约束条件式(21)、(23), 由式(32)得到约束方程

$$\frac{1}{L} \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin^2 \phi}} = \frac{2}{x_m \cos \varphi - y_m \sin \varphi + L} \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin^2 \phi} d\phi \quad (33)$$

对于式(33), 可以利用第一类椭圆积分的级数展开表达式, 进行方程化简。

由式(11)、(15)得到梁端点处的弯矩 M_1 , 由约束关系式(14)、(23)、(31)、(33)得到弹性合力 F_r 及对应的方向角 φ , 即可根据给定的横向位移控制参数 δ , 数值求解后屈曲控制方程组式(3)。

3 后屈曲非线性弹性力分析

根据能量最小原理, 梁的变形使系统能量保持最小, 即出现一阶和二阶屈曲模态, 表现为在符合载荷作用下, 屈曲梁挠曲线出现单、双拐点($n=1$ 、

2)的情况。

根据梁的变形受力平衡方程得到表征横向力 F_v 的表达式

$$F_v = F_r (\cos \varphi \sin \alpha + \sin \varphi \cos \alpha) \quad (34)$$

式中 $F_r = 2EI \left(\frac{I_1(\phi)}{L} \right)^2$

可以通过式(14)、(17)、(23)、(33)联立求得 F_r , 横向力 F_v 为位移 δ 的隐式函数, 含有第一、二类椭圆积分, 具有强非线性。

当梁后屈曲后, 随着端点处横向位移的增大, 当 $\cos \varphi < \cos(\theta^* - \varphi)$ 时, 后屈曲梁发生突变分叉^[16], 挠曲线从偶拐点跳转到奇拐点, F_r 的方向角 φ 也由式(14)变为式(31), 梁端点处弯矩由式(15)转换为式(11)。此时, 梁的后屈曲弹性力由正值变为负值, 表征了后屈曲梁结构的跳转特征。

4 大挠度后屈曲数值仿真与试验

为了验证大挠度屈曲的理论推导, 设计了一套倾斜梁大挠度屈曲试验测试装置, 如图3所示。当倾斜梁的倾角 $\alpha=9^\circ$, 梁长 $L=30 \text{ mm}$, 梁宽 $b=1 \text{ mm}$, 梁厚 $\delta=0.2 \text{ mm}$ 时, 根据以上计算得到的横向力与试验结果一致, 如图4所示。

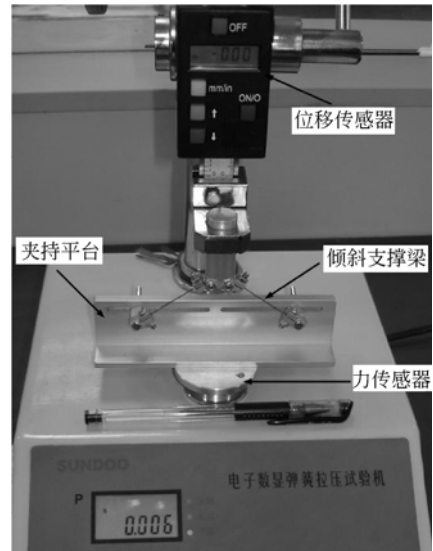


图3 大挠度屈曲试验台

对于跳转过程中梁的位形曲线, 给定梁长 $L=100 \text{ mm}$, $b=2 \text{ mm}$, $\delta=0.2 \text{ mm}$, 弹性模量 $E=160 \text{ GPa}$, 首先由式(11)、(15)得到梁端点处的弯矩 M_1 , 由约束关系式(14)、(23)、(31)、(33)得到弹性合力 F_r 及对应的方向角 φ , 代入大挠度后屈曲梁控制方程组式(3)中, 运用四阶 Runge-Kutta 积分格式和线性搜索法数值求解非线性边值问题, 得到等截面不同倾

角梁大挠度后屈曲平衡路径, 如图 5 所示。

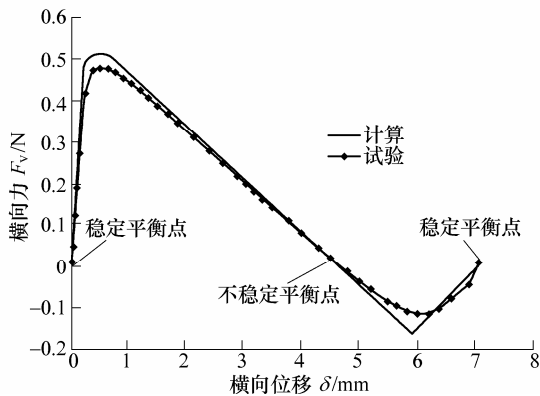


图 4 倾斜支撑梁横向力—位移关系

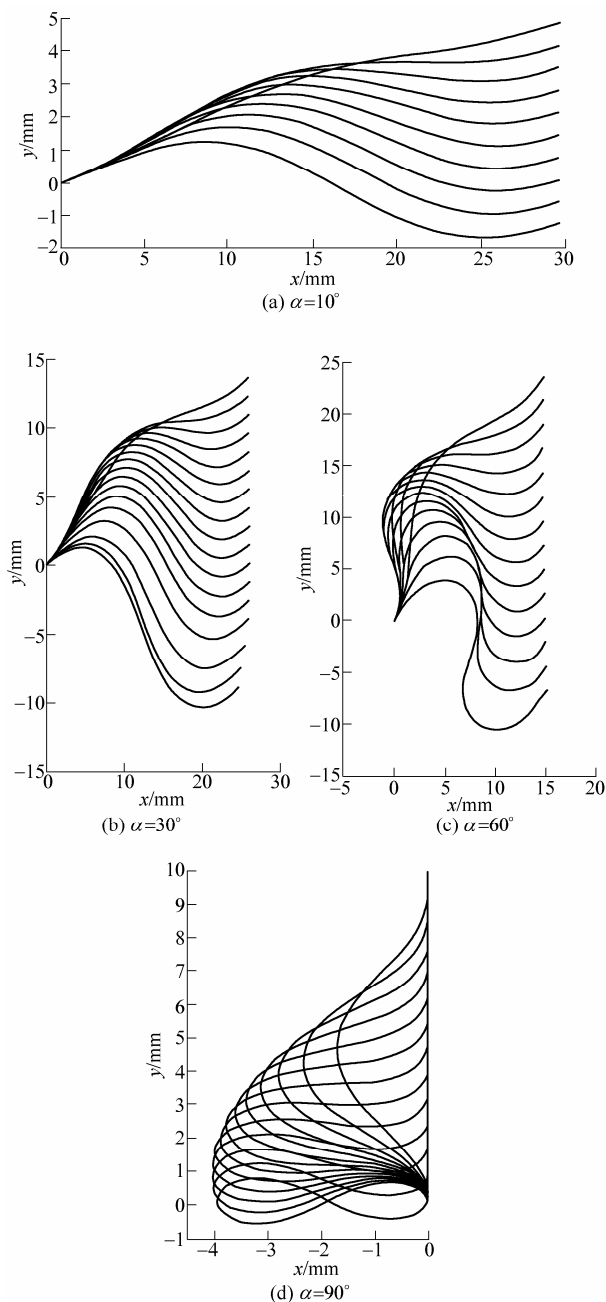


图 5 倾斜支撑梁大挠度后屈曲位形

由图 4 可以看出, 在横向力作用下倾斜支撑梁结构从初始稳定平衡位置开始运动, 横向弹性力随位移的增大而增大; 当载荷大于梁屈曲临界载荷后, 倾斜梁受轴向压力作用发生屈曲, 弹性力随位移的增大而减小, 直到弹性力出现负值, 自动跳转到第二个稳定平衡位置。倾斜支撑梁结构的刚度具有非线性, 在跳转过程中以临界屈曲点和屈曲模态转换点(最大负向力点)为界, 由正变负再变正, 与试验结果一致。结构表现出明显的双稳态跳转特性。图 5 为复合载荷作用下, 倾斜梁的倾角为 $\alpha=10^\circ$ 、 30° 、 60° 、 90° 时, 发生大挠度后屈曲时的位形曲线。从图 5 中可以看出, 在不同的角度下, 挠曲线拐点随着横向位移的增大而逐渐向左偏移, 移动到固定点时, 挠曲线屈曲模态发生突变, 实现结构的双稳态跳转, 跳转过程中并未出现高阶屈曲模态。在 $\alpha=30^\circ$ 时的仿真曲线(图 5b)与试验中所观察到的梁挠曲线变化情况吻合, 如图 6 所示。



图 6 试验得到的倾斜梁大挠度后屈曲曲线

5 结论

(1) 倾斜支撑梁结构的后屈曲跳转过程中只涉及单拐点稳态与双拐点稳态之间的转换, 并没有出现所谓的高阶模态。

(2) 在横向力作用下, 结构可以在两个稳定平衡态之间发生跳转, 结构发生平衡状态跳转的临界力随倾斜角增大而增大, 相应的临界位移也随之增大, 表现出良好的双稳态特性。

文中所建立的倾斜梁大挠度后屈曲模型及其求解方法克服了以往计算模型只能计算轴压杆件的后屈曲问题的缺陷, 可以用于分析计算任意倾角的固支梁结构的大挠度后屈曲问题, 为大挠度柔性杆件的工程应用分析提供了一种准确而有效的方法。

参 考 文 献

- [1] TSAY J, CHANG H A, SUNG C K. Design and experiments of fully compliant bistable micromechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2005,

- 40(1): 17-31.
- [2] ENIKOV E T, KEDAR S S, LAZAROV K V. Analytical model for analysis and design of V-shaped thermal microactuators[J]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2005, 14(4): 788-798.
- [3] TSAY J, SU L Q, SUNG C K. Design of a linear micro-feeding system featuring bistable mechanisms[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2005, 15(1): 63-67.
- [4] HARTONO W. Elastic nonlinear behavior of truss system under follower and non-follower forces[J]. *Computers and Structures*, 1997, 63(5): 939-949.
- [5] HARTONO W. Elastica of cantilever beam under two follower forces[J]. *Adv. Struct. Engin.*, 1997, 2(1): 139-145.
- [6] HARTONO W. On the post-buckling behavior of elastic fixed-end column with central brace[J]. *Math. Mech.*, 2001, 81(9): 605-611.
- [7] MAU S T. Buckling and post-buckling analyses of columns with discrete supports[J]. *J. Engin. Eech., ASCE*, 1989, 115(3): 721-739.
- [8] FANG W, WICKERT J A. Post-buckling of micromachined beams[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 1994, 4(3): 182-187.
- [9] WANG C Y. Post-buckling of a clamped-simply supported elastica[J]. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1997, 32(6): 1 115-1 122.
- [10] KARAMANLIDIS D, HONECHER A, KNOTHE K. Nonlinear finite element analysis in structural mechanics[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
- [11] KITIPORNCHAI S, CHAN S L. Finite element applications to thin-walled structures[M]. London: Elsevier Applied Science, 1990.
- [12] COFFIN D W, BLOOM F. Elastica solution for the hygrothermal buckling of a beam[J]. *International Journal of Non-Linear Mech.*, 1999, 34(6): 935-947.
- [13] WANG Anwen, TIAN Wenyng. Mechanism of buckling development in elastic bars subjected to axial impact[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2005, 7(2): 1-21.
- [14] 张清东, 刘赞赞, 周晓敏, 等. 高温带钢的局部宽度内压屈曲及后屈曲分析[J]. *机械工程学报*, 2005, 41(3): 102-106.
ZHANG Qingdong, LIU Zanzan, ZHOU Xiaomin, et al. Part width compressive buckling and post buckling analysis of steel strip under high temperature[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2005, 41(3): 102-106.
- [15] BELYTSCHKO T, LIU W K, MORAN B. 连续体和结构的非线性有限元[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
BELYTSCHKO T, LIU W K, MORAN B. Nonlinear finite elements for continua and structures[J]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.
- [17] 藤宁均, 苏先樾. 半无限长弹性直杆受轴向冲击载荷作用的分叉问题[J]. *力学学报*, 1989, 21(5): 591-595.
TENG Ningjun, SU Xianyue. Impact bifurcation of the semi-infinite elastic thin bars[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1989, 21(5): 591-595.

作者简介: 贾建援, 男, 1952 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为微电子机械系统, 光机电一体化。

赵剑(通信作者), 男, 1980 年出生, 博士。主要研究方向为双稳态结构的大挠度后屈曲力学特性、微惯性传感器及加速度开关。

E-mail: zhaojian0403@163.com