

电涡流传感器线圈阻抗计算方法*

于亚婷^{1,2} 杜平安^{1,2} 李代生³

- (1. 电子科技大学机械电子工程学院 成都 610054;
- 2. 重庆大学机械传动国家重点实验室 重庆 400044;
- 3. 中国工程物理研究院总体工程研究所 绵阳 621900)

摘要: 针对电涡流传感器的线圈阻抗值计算问题, 提出理论计算法和有限元法两种方法。以厚度为 δ 的被测体(含磁性和非磁性导体)上方正对一圆柱型线圈为求解模型, 根据传感器工作原理和电磁场理论导出线圈阻抗积分表达式, 并将其转化为更易求解的级数表达形式, 由 MathematicTM 计算线圈阻抗值。然后根据有限元建模理论建立传感器的有限元模型, 通过仿真得到传感器磁力线分布和线圈阻抗值。最后比较两种方法得到的阻抗值, 结果表明两种方法计算结果相符, 其有效性和正确性得到相互验证。

关键词: 电涡流传感器 线圈 阻抗计算 级数表达形式 有限元法

中图分类号: TM154.1 TP391.7

0 前言

电涡流传感器是 20 世纪 70 年代兴起的一种无损、非接触检测装置, 具有灵敏度高、抗干扰能力强、不受介质影响及结构简单等优点, 是大型旋转机械故障诊断与状态检测的标准配置传感器。

传感器由探头(传感头)、变换器(前置器)和连接电缆组成。在交变电流激励下, 传感器利用探头线圈和被测体间的磁场能量耦合实现对被测量的检测, 工作原理如图 1 所示。

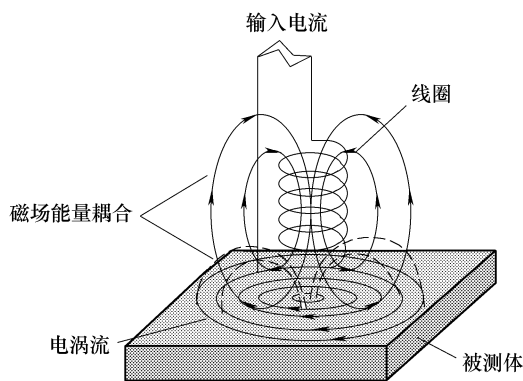


图 1 电涡流传感器的工作原理

研究表明^[1], 不同的被测体材料、提高高度、线圈尺寸和形状均可引起磁场能量发生变化, 最终导致线圈阻抗的变化, 被测量就是通过线圈阻抗的变化来体现。因此, 线圈阻抗值是涡流无损检测中一个至关重要的物理量, 研究其计算方法对解决涡

流无损检测正向和逆向问题都非常重要。

目前, 很多研究^[2-5]都利用电磁场理论推导了位于非磁性导体上方的线圈阻抗表达式, 尚无关于磁性材料导体上方的线圈阻抗理论推导的报道, 也很少有人采用有限元法求解线圈阻抗。本文根据电磁场理论和传感器结构与外界激励特点, 详细推导了作用于被测体(包括磁性和非磁性导体)上的线圈阻抗表达式, 并在偏微分方程理论的基础上, 将其转换为更易求解的级数形式, 由 MathematicTM 获取线圈阻抗值。同时采用有限元法对传感器实际工况进行数值仿真, 得到了检测系统的磁力线分布和线圈阻抗值。最后, 对理论推导方法和有限元法计算得到的线圈阻抗值进行了对比和验证。

1 线圈阻抗的理论推导

1.1 理论求解模型

线圈由细导线密绕而成, 假定线圈中的电流密度为常数^[2], 得到图 2 所示求解模型。在半无限大

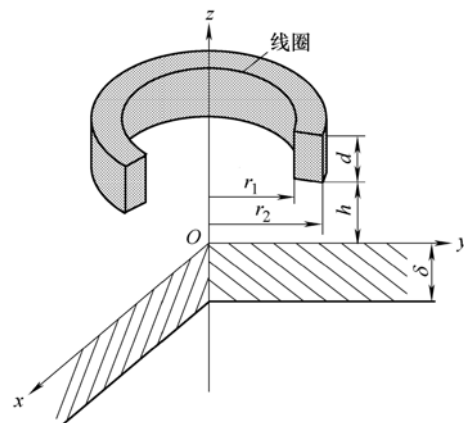


图 2 线圈阻抗求解模型

* 机械传动国家重点实验室访问学者基金资助项目。20060215 收到初稿, 20060928 收到修改稿

真空上方有一厚度为 δ 的被测平面导体，平面导体上方是半无限大真空，真空中有一通有正弦交变电流 $i(t)$ 的圆柱线圈，其对称轴和导体平面垂直。设线圈底平面与导体平面间的距离(提离高度)为 h ，线圈内外径分别为 r_1 和 r_2 ，高度为 d ，线圈中电流密度 J 的方向和 z 轴正向呈右手螺旋关系。真空的电磁参数为 σ_0 (电导率)、 μ_0 (磁导率)、 ϵ_0 (介电常数)，导体的电磁参数为 σ_2 、 μ_2 、 ϵ_2 。

1.2 电磁场基本理论

由于传感器激励频率较低，线圈匝数较少，因此探头运动速度、线圈中的涡流、位移电流及被测体电阻率的温度效应均可忽略，按似稳场处理。根据图2所示的线圈阻抗求解模型，麦克斯韦方程组可变换为如下形式

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中 \mathbf{B} —— 磁感应强度
 \mathbf{H} —— 磁场强度
 \mathbf{E} —— 电场强度
 \mathbf{J} —— 线圈电流密度
 \mathbf{D} —— 位移电流密度
 ω —— 线圈激励角频率
 电磁场中的本构关系为

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \quad (2)$$

式中 μ —— 介质磁导率
 σ —— 介质电导率

由图2可知，场中介质的边界面关于场的对称轴(z 轴)呈旋转对称，又因线圈激励为正弦交变电流，符合轴对称时谐场的定义^[2]，因此求解模型在柱坐标系(ρ, ϕ, z)下有以下性质。

- (1) 所有场量和电磁位函数均与周向坐标无关。
- (2) 在洛伦兹规范下，矢量磁位 \mathbf{A} 仅与周向分量有关，即 $\mathbf{A} = A_\phi \mathbf{e}_\phi$ ，且散度 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 。
- (3) 电场强度仅有周向分量，即 $\mathbf{E} = E_\phi \mathbf{e}_\phi$ 。
- (4) 磁场强度和磁感应强度周向分量为零，即

$$\frac{\mathbf{H}_\phi}{\mu} = \mathbf{B}_\phi = \frac{\partial}{\partial \phi} A_\phi = 0$$

1.3 阻抗推导

为求出空心圆柱线圈的阻抗，假定空心圆柱线圈由无限多个圆环线圈组成。为便于求解，可将场分成以下四个区域($\delta > 0$)。

- (1) 1区： $z < -\delta$ ，半无限大真空。
- (2) 2区： $-\delta < z < 0$ ，厚度为 δ 的导体内。

- (3) 3区： $0 < z < h$ ，导体上端与线圈下端间真空。
- (4) 4区： $z > d+h$ ，线圈上端的真空。

由于求解模型具有轴对称时谐场的性质，所以在柱坐标系下，根据式(1)和式(2)得到传感器检测系统在各个区域的电磁场约束方程为

$$\nabla^2 \mathbf{A}_{i\phi} + k_i^2 \mathbf{A}_{i\phi} = 0 \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (3)$$

式中 k_i 为电磁场中介质 i 的传播常数，其表达式为

$$k_i^2 = -j\omega\mu_i(\sigma_i + j\omega\epsilon_i) \quad i=1, 2, 3, 4$$

因传感器中传导电流密度远远大于位移电流密度，即 $\sigma_i / \omega\epsilon_i \gg 1$ ，所以式(3)中取 $k_i^2 = -j\omega\mu_i\sigma_i$ 。

因此，在图2所示求解模型中有

$$k_1^2 = k_3^2 = k_4^2 = 0 \quad k_2^2 = -j\omega\mu_2\gamma_2$$

将式(3)展开、简化，得

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_{i\phi}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{A}_{i\phi}}{\partial \rho} + \left(k_i^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) \mathbf{A}_{i\phi} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{i\phi}}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

其对应的内边界条件为

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow -\delta-0} \mathbf{A}_{1\phi} = \lim_{z \rightarrow -\delta+0} \mathbf{A}_{2\phi} \\ \lim_{z \rightarrow -\delta-0} \mu_2 \frac{\partial \mathbf{A}_{1\phi}}{\partial z} = \mu_0 \lim_{z \rightarrow -\delta+0} \frac{\partial \mathbf{A}_{2\phi}}{\partial z} \\ \lim_{z \rightarrow 0} \mathbf{A}_{2\phi} = \lim_{z \rightarrow 0} \mathbf{A}_{3\phi} \\ \lim_{z \rightarrow 0} \mu_0 \frac{\partial \mathbf{A}_{2\phi}}{\partial z} = \lim_{z \rightarrow 0} \mu_2 \frac{\partial \mathbf{A}_{3\phi}}{\partial z} \\ \lim_{z \rightarrow z'-0} \mathbf{A}_{3\phi} = \lim_{z \rightarrow z'+0} \mathbf{A}_{4\phi} \quad h \leq z' \leq h+d \\ \lim_{z \rightarrow z'-0} \frac{\partial \mathbf{A}_{3\phi}}{\partial z} - \lim_{z \rightarrow z'+0} \frac{\partial \mathbf{A}_{4\phi}}{\partial z} = \mu_0 \rho J_1(\lambda \rho) J d \rho dz \end{cases} \quad (5)$$

式中 λ 为本征函数的本征值。关于本征函数的内容可参见相关文献，本文不予论述。

无限远边界条件为

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{A}_{1\phi} = 0 \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathbf{A}_{2\phi} = 0 \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathbf{A}_{3\phi} = 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{A}_{4\phi} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

式中 r —— 坐标原点到场点的距离

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

采用分离变量法^[2]求出式(4)的通解，然后将内边界条件(5)和无限远边界条件(6)代入通解，求出待定系数，得到各个区域的磁矢量势 $\mathbf{A}_{i\phi}$ ，其中圆柱线圈中任意一点的磁矢量势 \mathbf{A} 可由 $\mathbf{A}_{3\phi}$ 和 $\mathbf{A}_{4\phi}$ 求得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\rho, z) = & \frac{1}{2} \mu_0 J \int_0^\infty U(r_1, r_2, \lambda) J_1(\lambda \rho) [2 - \\ & \exp(-\lambda(z-h)) - \exp(-\lambda(h+d-z)) + \\ & \alpha \exp(-\lambda(z+h))(1 - \exp(-\lambda d))] d\lambda \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{式中 } U(r_1, r_2, \lambda) = \frac{1}{\lambda^3} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} t J_1(t) dt$$

$J_1(t)$ ——第一类一阶贝塞尔函数

$$\alpha = \frac{(u_2^2 - \mu_r^2 \lambda^2)[1 - \exp(2u_2 \delta)]}{-(\mu_r \lambda - u_2)^2 + (u_2 + \mu_r \lambda)^2 \exp(2u_2 \delta)}$$

$$\mu_r = \mu_2 / \mu_0$$

$$u_i = \sqrt{\lambda^2 - k_i^2} \quad i = 1, 2$$

当 δ 趋于无穷, 仅存在半无限大被测体时

$$\alpha = \frac{\mu_r \lambda - u_2}{\mu_r \lambda + u_2}$$

进而将式(7)代入式(8)^[1]得线圈阻抗表达式(9)

$$\mathbf{Z}(j\omega) = j\omega n_c \int_0^{2\pi} d\phi \int_{r_1}^{r_2} \rho d\rho \int_h^{h+d} \frac{\mathbf{A}(\rho, z)}{\mathbf{I}(j\omega)} dz \quad (8)$$

$$\text{式中 } n_c = \frac{N}{d(r_2 - r_1)}$$

N ——线圈匝数

$$\mathbf{Z}(j\omega) = j\omega \pi n_c^2 \mu_0 \int_0^\infty U(r_1, r_2, \lambda)^2 [2(\lambda d + \exp(\lambda d) - 1) + \alpha \exp(-2\lambda h)(1 - \exp(-\lambda d))^2] d\lambda \quad (9)$$

线圈阻抗包含入射场阻抗和散射场阻抗。入射场阻抗是指无限大空间仅有空心圆柱线圈时的线圈阻抗, 其表达式为

$$\mathbf{Z}_m(j\omega) = 2j\omega \pi n_c^2 \mu_0 \int_0^\infty U(r_1, r_2, \lambda)^2 \times [\lambda d + \exp(-\lambda d) - 1] d\lambda \quad (10)$$

由式(10)可看出, 入射场阻抗仅为感抗, 其引起的电阻变化为零, 即此时线圈电阻为其直流电阻。

散射场阻抗是指导体中电涡流单独作用时线圈两端产生的阻抗, 其表达式为

$$\mathbf{Z}_{sc}(j\omega) = j\omega \pi n_c^2 \mu_0 \int_0^\infty \alpha U(r_1, r_2, \lambda)^2 \times \exp(-2\lambda h)[1 - \exp(-\lambda d)]^2 d\lambda \quad (11)$$

2 线圈阻抗的理论计算方法

由式(9)可看出, 线圈阻抗表达式中含有贝塞尔函数的二重广义积分, 且积分域为无限域, 求得阻抗的显式表达很困难。因此可在距离线圈一定的距离处强加磁场绝缘边界, 即第一类边界条件, 将求解域控制在一定范围内($0 < \rho < b$), 如图 3 所示。

再根据偏微分方程理论, 将线圈阻抗表达式转化为级数表达形式, 从而避免贝塞尔函数的双重积分, 加快求解速度, 此级数表达形式为

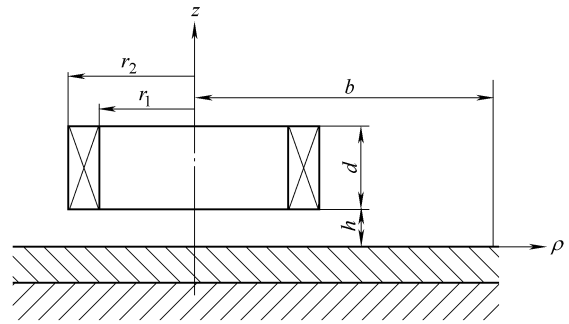


图 3 约束求解域后的求解模型

$$\mathbf{Z}_{in}(j\omega) = 2j\omega \pi \mu_0 n_c^2 \sum_{i=1}^{\infty} I_{nt}^2(r_1, r_2, \lambda_i) \times \frac{2[\lambda_i d - 1 + \exp(-\lambda_i d)]}{[(\lambda_i b) J_0(\lambda_i b)]^2 \lambda_i^5} \quad (12)$$

$$\mathbf{Z}_{sc}(j\omega) = 2j\omega \pi \mu_0 n_c^2 \sum_{i=1}^{\infty} I_{nt}^2(r_1, r_2, \lambda_i) \times \frac{2[\exp(-\lambda_i h) - \exp(-\lambda_i(h+d))]^2}{[(\lambda_i b) J_0(\lambda_i b)]^2 \lambda_i^5} \times \frac{(u_i^2 - \lambda_i^2 \mu_r^2)[1 - \exp(2u_i \delta)]}{(\lambda_i \mu_r - u_i)^2 + (\lambda_i \mu_r + u_i)^2 \exp(2u_i \delta)} \quad (13)$$

$$\mathbf{Z}_{sc}(j\omega) = 2j\omega \pi \mu_0 n_c^2 \sum_{i=1}^{\infty} I_{nt}^2(r_1, r_2, \lambda_i) \times \frac{2[\exp(-\lambda_i h) - \exp(-\lambda_i(h+d))]^2}{[(\lambda_i b) J_0(\lambda_i b)]^2 \lambda_i^5} \frac{\lambda_i \mu_r - u_i}{\lambda_i \mu_r + u_i} \quad (14)$$

$$\text{式中 } I_{nt}(r_1, r_2, \lambda_i) = \int_{\lambda_1 r_1}^{\lambda_2 r_2} t J_1(t) dt$$

离散的本征值 λ_i 由下式获得

$$J_1(x_i) = 0 \quad \lambda_i = \frac{x_i}{b}$$

式(12)为线圈入射场阻抗; 式(13)、(14)分别为当导体厚度为 δ 和 $\delta \rightarrow \infty$ 时, 线圈的散射场阻抗。

式(12)~(14)(阻抗级数表达形式)与式(10)、(11)(阻抗积分表达形式)比较, 有通过积分表达式求解线圈阻抗时无穷积分限必须被截断的优点, 但最优截断点无法预知。如果采用自动积分法且保证求解精度, 会导致求解时间不断增加, 而通过级数表达式求解阻抗只需确定强加边界到对称轴的距离 b 。由于 λ_i 比较容易确定, 且 $I_{nt}(r_1, r_2, \lambda_i)$ 只与线圈的内外径有关, 而与提高高度和材料性质无关, 所以级数表达式求解速度更快, 收敛更易控制。

本文采用阻抗级数表达式, 由 Mathematic™ 计算线圈阻抗值。在 Mathematic™ 中, 离散本征值 λ_i 的获取和 $I_{nt}(r_1, r_2, \lambda_i)$ 的求解通过以下命令实现, 其中 $I_{nt}(r_1, r_2, \lambda_i)$ 通过超几何函数 ${}_pF_q$ 求解。

$$\lambda_i = \text{BesselJZeros}[1, N_s]/h;$$

$$\text{Hyper}[x_]=x^3*\text{HypergeometricPFQ}[\{1.5\},\{2.5, 2.0\},-x^2/4.0]/6.0;$$

$$\text{IntJx}=\text{Hyper}[q*r2]-\text{Hyper}[q*r1];$$

式中 N_s ——取值点的个数

以典型的非磁性材料不锈钢和典型的磁性材料45钢为例，在表1所示的计算条件下，得到线圈的入射场阻抗和散射场阻抗如表2所示。

表1 传感器检测系统的相关参数

相关参数	参数值	相关参数	参数值
不锈钢相对磁导率 μ_r	1.01	线圈内径 r_1 / mm	0.6
不锈钢电导率 σ / (MS · m ⁻¹)	1.3333	线圈外径 r_2 / mm	2.0
45钢相对磁导率 μ_r	1496	线圈高度 D / mm	0.8
45钢电导率 σ / (MS · m ⁻¹)	7.576	被测体厚度 δ / mm	∞
检测频率 f / kHz	1000	强加边界到对称轴的距离 b / mm	$40r_2$
提高高度 h / mm	0.5		

3 线圈阻抗的有限元计算方法

有限元法作为一种数值计算方法，在研究电磁场问题中已得到广泛应用^[6]。

根据传感器的结构特征和外界激励，可将三维涡流场问题简化为二维似稳轴对称涡流场问题。在ANSYS中建立的传感器有限元模型如图4所示。

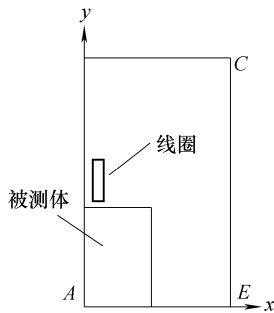


图4 简化的传感器有限元模型

图4所示模型中，传感器的电磁场约束方程为式(4)。求解域边界AB、BC、CE和EA均为Dirichlet边界条件，内部介质边界为Neumann边界条件。

式(4)对应的能量泛函为

$$F(\mathbf{A}_{i\phi}) = \iint_D \left[\frac{1}{2\mu} \left(\left| \frac{\partial \mathbf{A}_{i\phi}}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{A}_{i\phi}}{\partial \rho} + \frac{\mathbf{A}_{i\phi}}{\rho} \right|^2 \right) + \frac{j\omega\sigma}{2} |\mathbf{A}_{i\phi}|^2 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_{i\phi} \right] \rho d\rho dz$$

式中 D ——矩形求解域

具体建模过程参见文献[1]。

在表1所列计算条件下，通过对无限大真空中空心圆柱线圈的有限元仿真，得到空心圆柱线圈的磁力线分布(图5)和线圈的电阻和感抗值(表2)。

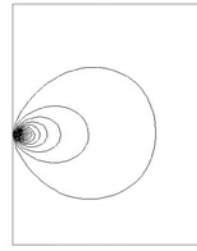
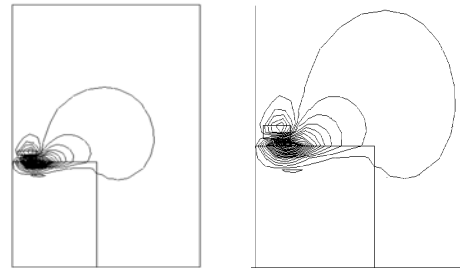


图5 空心圆柱线圈磁力线分布图

表2 探头阻抗理论方法和有限元法计算结果比较

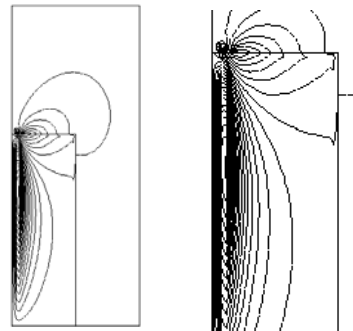
计算类别	理论计算结果	有限元法计算结果	结果误差 e/%
	空心圆柱线圈电阻 R/Ω	4.762	4.761
空心圆柱线圈感抗 X/Ω	199.026	198.578	0.23
探头线圈电阻(不锈钢) R/Ω	14.269	14.307	0.26
探头线圈感抗(不锈钢) X/Ω	174.341	173.271	0.61
探头线圈电阻(45钢) R/Ω	14.902	14.964	0.40
探头线圈感抗(45钢) X/Ω	224.715	224.483	0.10

同理，可得到半无限大不锈钢和45钢为被测体时，被测体及其上线圈组成检测系统的磁力线分布，如图6、7所示，其中不锈钢中的电涡流分布如图8所示，得到的线圈电阻和感抗列入表2。



(a) 磁力线分布全图 (b) 磁力线局部放大图

图6 不锈钢和线圈组成的检测系统的磁力线分布



(a) 磁力线分布全图 (b) 磁力线局部放大图

图7 45钢和线圈组成的检测系统的磁力线分布图

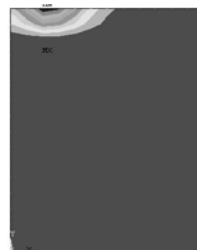


图8 不锈钢中的涡流分布图

4 结果比较

在第 2 节中采用 Mathematic™ 得到线圈在不同被测体作用下的散射场阻抗和入射场阻抗, 其中入射场阻抗为表 2 中的空心圆柱线圈阻抗; 入射场阻抗和散射场阻抗的和为表 2 中的线圈阻抗。

在第 3 节中采用有限元法分别对空心圆柱线圈的阻抗和传感器线圈的阻抗进行了计算, 结果如表 2 所示。

由表 2 可看出, 理论计算方法和有限元计算方法得出的线圈阻抗值相符, 二者的最大误差为 0.61%。两种计算方法的正确性得到了相互验证, 一方面说明建立的有限元模型是正确的, 另一方面也说明线圈阻抗理论推导过程的正确性和采用级数形式求解的精确性。

5 结论

(1) 推导了磁性被测体作用下的电涡流传感器线圈阻抗积分表达式, 并将其展开成易于求解的级数形式, 通过 Mathematic™ 求得线圈阻抗值。它不仅为进一步研究磁性/非磁性被测体作用下的电涡流传感器性能提供理论参考, 同时也有助于研究和解决其他涡流无损检测正问题和逆问题。

(2) 建立了电涡流传感器的有限元模型, 并通过有限元法得到了传感器的磁力线分布和线圈的阻抗值。

(3) 在相同计算条件下, 通过上述两种线圈阻抗计算方法得到的计算结果十分吻合。一方面说明了线圈阻抗表达式推导的正确性, 一方面也说明了建立的传感器有限元模型的合理性。

参 考 文 献

- [1] YU Yating, DU Pingan, WANG Zhenwei. Study on the electromagnetic properties eddy current sensor[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics & Automation, Niagara Falls, Canada, July, 2005: 1 970-1 975.
- [2] 雷银照. 时谐电磁场解析方法[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [3] 雷银照. 涡流线圈的阻抗计算[J]. 电工技术学报, 1996, 11(1): 17-20.
- [4] THEODOROS T, EPAMEINONDAS K. Series expansions in eddy current nondestructive evaluation models [J]. Journal of Material Processing Technology, 2005, 161(1-2): 343-347.

- [5] MARK W C. Theory for coil impedance of a conducting half space: Analytic results for eddy current analysis[J]. Journal of Applied Physics, 2001, 89(4): 2 473-2 481.
- [6] THMOS G K, MADABUSHI V K C. The application of finite element method analysis to eddy current nondestructive evaluation[J]. IEEE Transaction on Magnetics, 1979, 15(6): 1 956-1 960.

COMPUTATIONAL METHODS OF COIL IMPEDANCE OF EDDY CURRENT SENSOR

YU Yating^{1,2} DU Ping'an^{1,2} LI Daisheng³

- (1. School of Mechatronics Electronics Engineering,
University of Electronic Science
and Technology of China, Chengdu 610054;
2. State Key Laboratory of Mechanical Transmissions,
Chongqing University, Chongqing 400044;
3. Institute of Southwest Structure Engineering,
Chinese Academy of Engineering Physics,
Mianyang 621900)

Abstract: To research the computational methods about the transducer coil impedance with the magnetic and non-magnetic measured target, two computational methods, theoretic method and finite element method, are proposed. The computational model of the coil impedance is simplified as a cylindrical coil over a cylindrical measured target with the thickness δ . According to the sensor measurement principal and the electromagnetic theory, the integral expression of the coil impedance is derived, which is expanded by series in polar coordinate system in order to compute easily and feasibly. And the coil impedance value is computed by Mathematic™. Then, based on the modeling theory of finite element method, the finite element model is built. The coil impedance value and the magnetic distribution figures are obtained by finite element analysis, respectively. Finally, the results from the derivation and finite element analysis are in agreement very well by comparison, and they are given to validate the accuracy and feasibility of the derivation method with finite element method.

Key words: Eddy current sensor Transducer coil
Impedance computation Series expansions
Finite element method

作者简介: 于亚婷, 女, 1979 年出生, 博士研究生。主要从事有限元法的应用及电涡流传感器技术研究。

E-mail: sx-yyt@163.com