

# 有误差的螺旋锥齿轮传动接触分析\*

唐进元 卢延峰 周超

(中南大学现代复杂装备设计与极端制造教育部重点实验室 长沙 410083)

**摘要:** 以多体系统误差建模理论和齿轮啮合原理为基础, 提出含有机床运动几何误差以及齿轮副安装误差的螺旋锥齿轮齿面接触分析(Error tooth contact analysis, ETCA)方法。以 SGM 法(大轮展成法加工, 小轮变形法加工)加工的弧齿锥齿轮为例, 通过 ETCA 分析, 得到机床运动误差和安装误差对螺旋锥齿轮齿面加工质量影响的定量关系, 对 ETCA 和 TCA 的结果进行对比分析, 结果表明机床运动误差和安装误差对螺旋锥齿轮的齿面接触质量有较大的影响, 为了通过齿面接触分析达到更准确的反调加工参数的目的, 采用 ETCA 的分析结果指导加工参数反调更为合理。

**关键词:** 齿面接触分析 螺旋锥齿轮 机床运动几何误差 多体系统误差建模

**中图分类号:** TH132.4

## Error Tooth Contact Analysis of Spiral Bevel Gears Transmission

TANG Jinyuan LU Yanfeng ZHOU Chao

(Key Laboratory of Modern Complex Equipment Design and Extreme Manufacturing,  
Ministry of Education, Central South University, Changsha 410083)

**Abstract:** Based on the multi-body error-modeling system and the theory of gear engagement, the spiral bevel gear tooth contact analysis including the kinematical and geometrical errors of machine tool and the installation error of gear pair (Error tooth contact analysis, ETCA) is put forward. With an example of a pair of spiral bevel gears processed by SGM method (gear processed by generation, pinion processed by modified roll method), the quantitative relation between the spiral bevel gear tooth contact quality and the said kinematical & geometrical errors and installation error are found by ETCA. Through analyzing the results of TCA and ETCA, the comparison outcomes indicate that the said kinematical and geometrical errors and installation error can significantly influence the spiral bevel gears tooth contact quality. In order to adjust the gear processing parameters through the tooth contact analysis, using the analysis results of ETCA is more reasonable than TCA.

**Key words:** Tooth contact analysis Spiral bevel gear Kinematical and geometrical errors of machine tool  
Multi-body system error modeling

## 0 前言

齿面接触分析(Tooth contact analysis, TCA)是设计螺旋锥齿轮和检验齿轮接触质量的重要手段。国内外的学者对此进行了深入的研究。根据齿面接触分析中的锥齿轮模型可以把相关文献分为两类: 第一类, LITVIN<sup>[1]</sup>、西北工业大学方宗德等<sup>[2]</sup>的锥齿轮研究模型, 根据理论的齿面加工参数建立的数学模型, 然后再根据理论的齿面接触轨迹图以及运动曲线图对齿面加工参数进行优化, 这些理论模型没有考虑齿面加工过程中的加工误差的影响; 第二类, 王军<sup>[3]</sup>、王延忠<sup>[4]</sup>和李小清<sup>[5]</sup>研究中使用的锥齿

轮模型, 这些模型的建模方法是由齿轮测量机进行齿面采点, 然后通过数学拟合方法对齿面离散点进行拟合而成新的齿面, 再进行齿面接触分析。

实际齿面的生成与机床运动几何误差是相关的, 过去的机械式螺旋锥齿轮加工机床对机床运动几何误差的反馈调整很困难。传统 TCA 分析中并没有包括机床运动几何误差, 这是与机械式螺旋锥齿轮加工机床特征相符的。传统 TCA 分析中没有包括机床运动几何误差, 依据传统 TCA 的结果对齿面进行反调修形时也就没有直接计及机床运动几何误差的影响。

对五轴联动全数控加工机床而言, 其数控系统和现有的数控技术对机床运动几何误差的反馈调整从技术上已没有障碍, 只要给出合适的反馈调整数学模型和方法, 就可实现对机床运动几何误差的反

\* 国家重点基础研究发展计划资助项目(973 计划, 2005CB724100)。20070703 收到初稿, 20080228 收到修改稿

馈调整。因此，现有的 TCA 方法相对于五轴联动全数控加工机床的高性能背景而言存在有待改进与完善的地方。国内外已有学者开始研究包含误差在内的齿面接触质量分析方法，但一般只是包含齿轮副的安装误差的分析模型<sup>[6-7]</sup>。

本文以多体系统误差建模理论和齿轮啮合原理为基础，以五轴联动螺旋锥齿轮加工机床为对象，提出了含有机床运动误差以及齿轮副安装误差的螺旋锥齿轮齿面接触分析方法，并以弧齿锥齿轮为例，详细介绍了 ETCA 的计算过程。

### 1 五轴运动误差的机床几何运动误差建模

利用多体动力学理论对复杂机械系统进行建模的研究方法已在五轴加工中心的误差补偿中得到了广泛、成功的应用<sup>[8-11]</sup>。本文以图 1 所示五轴联动螺旋锥齿轮磨齿机床为研究对象，利用多体动力学系统误差建模理论建立该机床运动误差模型。

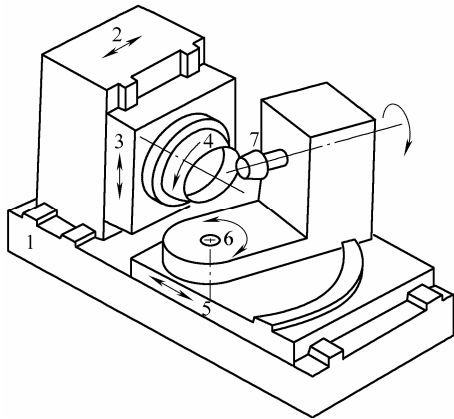


图 1 五轴联动螺旋锥齿轮磨齿机结构简图  
1. 床身 2. x 方向工作台 3. y 方向工作台 4. 砂轮  
5. z 方向工作台 6. 轮坯旋转台 7. 轮坯

#### 1.1 机床多体系统的典型体确定

图 2 为图 1 所示的五轴联动螺旋锥齿轮磨齿机多体系统拓扑结构图。本文将五轴联动螺旋锥齿轮磨齿机分成两个分支，一个是刀具分支：砂轮( $B_4$ )— $y$  轴工作台( $B_3$ )— $x$  轴工作台( $B_2$ )—床身( $B_1$ )—大地( $B_0$ )；二为工件分支：齿轮轮坯( $B_7$ )— $B$  轴旋转工作台( $B_6$ )— $z$  轴工作台( $B_5$ )—床身( $B_1$ )—大地( $B_0$ )。

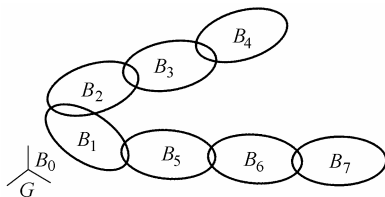


图 2 五轴联动螺旋锥齿轮磨齿机多体系统拓扑图

图 2 所示数控磨齿机多体系统拓扑图中，每个物体都有 1 个相邻的较低序号物体。为编制算法，需要为系统中每个物体的较低序号体制定一个表格，用  $L(K)$  表示，成为较低序号体阵列，简称低序体阵列。表 1 为图 1 机床多体系统拓扑关系表。

表 1 图 1 机床多体系统拓扑关系表

序列体	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$B_7$
$L^1(K)$	$B_0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_1$	$B_5$	$B_6$
$L^2(K)$	—	$B_0$	$B_1$	$B_2$	$B_0$	$B_1$	$B_5$
$L^3(K)$	—	—	$B_0$	$B_1$	—	$B_0$	$B_1$
$L^4(K)$	—	—	—	$B_0$	—	—	$B_0$

#### 1.2 多体系统几何运动误差分析模型

根据文献[9-10]，引入误差变换矩阵及误差矢量，可得典型体  $B_k$  及其相邻低序体  $B_j$  间的误差模型(图 3)。当典型体  $B_k$  位移为零时，误差为零。此时  $O_k$  与  $Q_k$  重合， $q_k$  表示  $B_j$  原点  $O_j$  与  $B_k$  原点  $O_k$  间位置矢量， $q_{ke}$  表示位置误差矢量，含载荷变形热变形等误差。 $s_k$  是表示  $B_k$  相对  $B_j$  的位移矢量。 $s_{ke}$  表示位移误差矢量，含几何和运动误差。

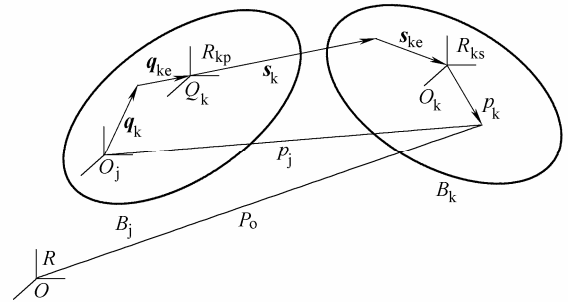


图 3 有误差时多体系统中典型体与其相邻低序体位置图

根据文献[9]，可以用  $4 \times 4$  阶 Denavit-Hartenberg 齐次变换矩阵描述多体系统。本文设两个相邻的机床运动构件存在典型体位置误差矢量  $q_{ke}$  以及运动误差  $s_{ke}$  时，这两个相邻体间的变换矩阵为

$$V_{AS} = V_{ASp} V_{ASpe} V_{ASs} V_{ASse} \quad (1)$$

式中  $V_{ASp}$  用于描述理想情况下，低序体分支中任意体的位置坐标系相对于其低序体运动坐标系的变换矩阵。本文中在绝大多数坐标系设置中，为简便运算，设  $V_{ASp} = I$ ，即任意体位置坐标系与其低序体运动坐标系重合。 $V_{ASs}$  用于描述理想情况下，低序体分支中任意体运动坐标系相对于其位置坐标系的变换矩阵。 $V_{ASpe}$  用于描述任意体位置误差变换矩阵。 $V_{ASse}$  用于描述任意体运动误差变换矩阵。 $V_{AS}$  中矩阵的具体形式在文献[9-10]中已有详细说明，本文就不赘述。

#### 1.3 五轴联动螺旋锥齿轮磨齿机几何运动误差模型

根据多体系统几何运动误差分析模型，本文建

立五轴联动螺旋锥齿轮磨齿机几何运动误差模型如下。

(1) 砂轮与  $y$  向工作台之间的转换矩阵

$$\mathbf{V}_{AS34} = \mathbf{V}_{ASpe34} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_{4pz} & \varepsilon_{4py} & \delta_{4px} + \Delta s_{4x}(T) \\ \varepsilon_{4pz} & 1 & -\varepsilon_{4px} & \delta_{4py} + \Delta s_{4y}(T) \\ -\varepsilon_{4py} & \varepsilon_{4px} & 1 & \delta_{4pz} + \Delta s_{4z}(T) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中  $\varepsilon_{4px}$ 、 $\varepsilon_{4py}$ 、 $\varepsilon_{4pz}$  是砂轮主轴与  $y$  向工作台的坐标轴之间垂直度误差，本文中设为 0； $\delta_{4px}$ 、 $\delta_{4py}$ 、 $\delta_{4pz}$  是砂轮主轴沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴三个方向的直线偏差， $\Delta s_{4x}(T)$ 、 $\Delta s_{4y}(T)$ 、 $\Delta s_{4z}(T)$  是砂轮沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的热漂移误差。

(2) 沿  $y$  向工作台移动变换矩阵。实现垂直刀位

$$\mathbf{V}_{AS23} = \mathbf{V}_{ASpe23} \mathbf{V}_{Ass23} \mathbf{V}_{ASse23} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_{3pz} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{3pz} & 1 & -\varepsilon_{3px} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{3px} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & S_2 \sin q_{02} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_{3sz} & \varepsilon_{3sy} & \delta_{3sx} + \Delta y_{3x}(T) \\ \varepsilon_{3sz} & 1 & -\varepsilon_{3sx} & \delta_{3sy} + \Delta y_{3y}(T) \\ -\varepsilon_{3sy} & \varepsilon_{3sx} & 1 & \delta_{3sz} + \Delta y_{3z}(T) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

式中  $S_2$  是径向刀位， $q_{02}$  是刀位角。 $\varepsilon_{3px}$ 、 $\varepsilon_{3pz}$  是  $y$ - $x$  平面、 $y$ - $z$  平面垂直度误差， $\varepsilon_{3sx}$ 、 $\varepsilon_{3sy}$ 、 $\varepsilon_{3sz}$  分别是  $y$  向工作台移动时引起的角度误差分量； $\varepsilon_{3sx}$ 、 $\varepsilon_{3sz}$ 、 $\varepsilon_{3sy}$  分别是  $y$  向工作台移动引起的  $x$ 、 $z$  方向直线度偏差以及  $y$  向的定位误差； $\Delta y_{3x}(T)$ 、 $\Delta y_{3y}(T)$ 、 $\Delta y_{3z}(T)$  是  $y$  向工作台沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的热漂移误差。

(3) 沿  $x$  向工作台移动变换矩阵。实现水平刀位

$$\mathbf{V}_{AS12} = \mathbf{V}_{ASpe12} \mathbf{V}_{ASs12} \mathbf{V}_{ASse12} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_{2py} & \varepsilon_{2pz} & 0 \\ -\varepsilon_{2py} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon_{2pz} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & S_2 \cos q_{02} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_{2sz} & \varepsilon_{2sy} & \delta_{2sx} + \Delta x_{2x}(T) \\ \varepsilon_{2sz} & 1 & -\varepsilon_{2sx} & \delta_{2sy} + \Delta x_{2x}(T) \\ -\varepsilon_{2sy} & \varepsilon_{2sx} & 1 & \delta_{2sz} + \Delta x_{2x}(T) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

式中  $\varepsilon_{2pz}$ 、 $\varepsilon_{2py}$  是  $z$ - $x$ 、 $y$ - $x$  平面垂直度误差， $\varepsilon_{2sx}$ 、 $\varepsilon_{2sy}$ 、 $\varepsilon_{2sz}$  分别是  $x$  向工作台移动时引起的角度误差分量； $\varepsilon_{2sy}$ 、 $\varepsilon_{2sx}$ 、 $\varepsilon_{2sz}$  分别是移动引起的位移误差以及直线

度偏差； $\Delta x_{2x}(T)$ 、 $\Delta x_{2y}(T)$ 、 $\Delta x_{2z}(T)$  是  $x$  向工作台沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的热漂移误差。

(4) 沿  $z$  向工作台移动变换矩阵。实现床位

$$\mathbf{V}_{AS51} = \mathbf{V}_{ASs51} \mathbf{V}_{ASse51} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x_{B2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_{5sz} & \varepsilon_{5sy} & \delta_{5sx} + \Delta z_{3x}(T) \\ \varepsilon_{5sz} & 1 & -\varepsilon_{5sx} & \delta_{5sy} + \Delta z_{3y}(T) \\ -\varepsilon_{5sy} & \varepsilon_{5sx} & 1 & \delta_{5sz} + \Delta z_{3z}(T) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

式中  $x_{B2}$  是床位， $\varepsilon_{5sx}$ 、 $\varepsilon_{5sy}$ 、 $\varepsilon_{5sz}$  分别是  $z$  向工作台移动时引起的角度误差分量； $\delta_{5sx}$ 、 $\delta_{5sy}$ 、 $\delta_{5sz}$  分别是移动引起的直线度偏差以及位移误差； $\Delta z_{3x}(T)$ 、 $\Delta z_{3y}(T)$ 、 $\Delta z_{3z}(T)$  是  $z$  向工作台沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的热漂移误差。

(5) 沿轮坯调整轴  $B$  轴转动变换矩阵。实现轮坯安装角  $\alpha$  安装

$$\mathbf{V}_{AS65} = \mathbf{V}_{ASs65} \mathbf{V}_{ASse65} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & -x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_{6sz} & \varepsilon_{6sy} & \delta_{6sx} + \Delta B_{6x}(T) \\ \varepsilon_{6sz} & 1 & -\varepsilon_{6sx} & \delta_{6sy} + \Delta B_{6y}(T) \\ -\varepsilon_{6sy} & \varepsilon_{6sx} & 1 & \delta_{6sz} + \Delta B_{6z}(T) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

式中  $x_2$  是轴向轮位， $\varepsilon_{6sx}$ 、 $\varepsilon_{6sy}$ 、 $\varepsilon_{6sz}$  是轴旋转引起的角误差分量； $\delta_{6sx}$ 、 $\delta_{6sy}$ 、 $\delta_{6sz}$  是旋转引起的轴位置  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向位移偏差分量； $\Delta B_{6x}(T)$ 、 $\Delta B_{6y}(T)$ 、 $\Delta B_{6z}(T)$  是由温度引起的  $B$  轴沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的热漂移误差。

(6) 沿轮坯安装  $A$  轴旋转变换矩阵。实现轮坯自转以及轮坯垂直轮位安装

$$\mathbf{V}_{AS76} = \mathbf{V}_{ASp76} \mathbf{V}_{ASpe76} \mathbf{V}_{ASs76} \mathbf{V}_{ASse76} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -E_{02} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_{7px} & \varepsilon_{7py} & \delta_{7px} \\ \varepsilon_{7px} & 1 & -\varepsilon_{7pz} & \delta_{7py} \\ -\varepsilon_{7py} & \varepsilon_{7pz} & 1 & \delta_{7pz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_{7sz} & \varepsilon_{7sy} & \delta_{7sx} + \Delta A_{7x}(T) \\ \varepsilon_{7sz} & 1 & -\varepsilon_{7sx} & \delta_{7sy} + \Delta A_{7y}(T) \\ -\varepsilon_{7sy} & \varepsilon_{7sx} & 1 & \delta_{7sz} + \Delta A_{7z}(T) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

式中  $E_{02}$  是垂直轮位,  $\varepsilon_{7px}$ 、 $\varepsilon_{7py}$ 、 $\varepsilon_{7pz}$  是工件安装轴  $A$  轴与  $z$  向工作台的坐标轴之间垂直度误差;  $\delta_{7px}$ 、 $\delta_{7py}$ 、 $\delta_{7pz}$  是工件安装轴  $A$  轴沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴三个方向的直线位置偏差, 包含热漂移误差, 立柱变形误差等。  $\varepsilon_{7sx}$ 、 $\varepsilon_{7sy}$ 、 $\varepsilon_{7sz}$  是轴旋转引起的角误差分量;  $\delta_{7sx}$ 、 $\delta_{7sy}$ 、 $\delta_{7sz}$  是旋转引起的轴位置  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向位移偏差分量;  $\Delta A_{7x}(T)$ 、 $\Delta A_{7y}(T)$ 、 $\Delta A_{7z}(T)$  是由温度引起的  $A$  轴沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的热漂移误差。

(7) 机床床身与大地惯性坐标转换矩阵

$$V_{AS} = I \quad (8)$$

## 2 ETCA 算法的建立

### 2.1 含机床几何运动误差的大小轮齿面方程的建立

以大轮凸面加工为例, 建立大轮多体系统加工误差模型。

大轮加工过程中刀具和工件的位置如图 4a、4b 所示。  $O$  是机床床身中心(与惯性坐标系  $G$  重合),  $O_c$  是刀具坐标系中心,  $O_g$  是齿轮坐标系中心,  $O_n$  是机床过渡坐标系,  $O_d$  是摇台坐标系,  $O_g$  是轮坯坐标系。

由图 4a 可知, 在砂轮坐标系内砂轮理论切削点  $M$  矢径  $R_c$ 、法线方程  $N_c$  如式(9)、(10)所示

$$R_c = \begin{cases} (r_{02} - s_2 \sin c_2) \cos b \\ -(r_{02} - s_2 \sin c_2) \sin b \\ -s_2 \cos c_2 \end{cases} \quad (9)$$

$$N_c = \begin{cases} \cos c_2 \cos b \\ -\cos c_2 \sin b \\ -\sin c_2 \end{cases} \quad (10)$$

根据上述多体系统有误差情况下的描述方法, 设刀具坐标系中砂轮上的点的理论位置矢量为  $R_c$ , 工件坐标系内工件上相应加工点的理论位置矢量为  $R_g$ 。没有误差的情况下两矢量应该相等; 在有误差存在的情况下, 齿面方程推导过程如下。

在刀具分支中, 切削面方程  $R_c$ 、 $N_c$  相对于机床坐标系  $G$  的表达式为

$$R_{cG} = V_{AS01} V_{AS12} V_{AS23} V_{AS34} R_c \quad (11)$$

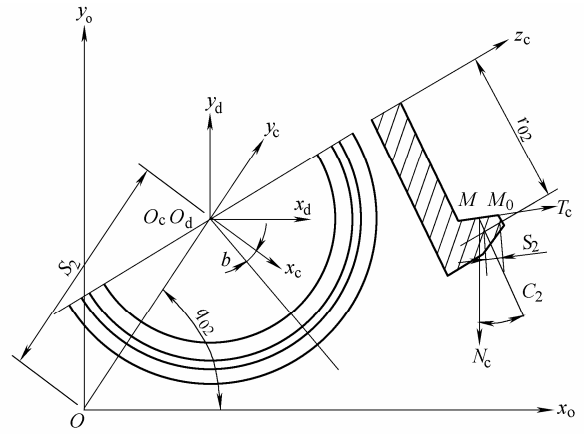
$$N_{cG} = V_{AS01} V_{AS12} V_{AS23} V_{AS34} N_c \quad (12)$$

则含有误差的齿轮面方程

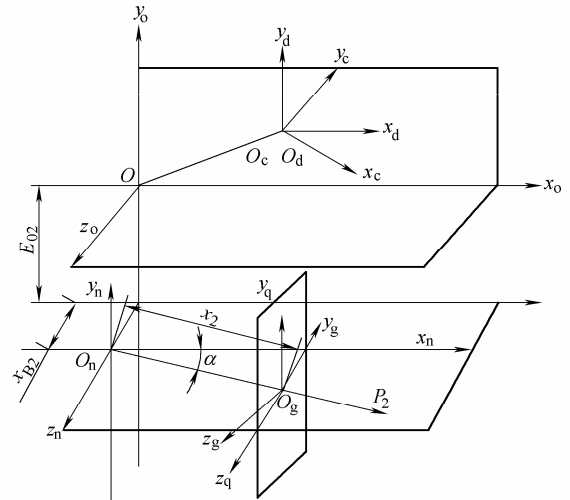
$$R_{be} = V_{AS65} V_{AS51} V_{AS10} R_{cG} \quad (13)$$

$$N_{be} = V_{AS65} V_{AS51} V_{AS10} N_{cG} \quad (14)$$

根据文献[12-13]以及啮合原理即可求出大小轮含有加工误差的齿面方程。



(a) 大轮加工中刀具坐标系位置示意图



(b) 大轮加工中机床和工件坐标系位置示意图

图4 大轮加工情况示意图

大小轮的加工过程中, 应满足啮合原理, 据此可求出齿面参数  $s_2 = s_2(\Delta q_2, \theta_2)$  即

$$\begin{cases} N_{bc} \cdot V_b = 0 \\ N_{sc} \cdot V_s = 0 \end{cases} \quad (15)$$

式中  $V_b$ ,  $V_s$  分别是大小轮与产形轮在切削点处的相对运动速度。

大轮方程为

$$R_{be} = R_{be}(\Delta q_2, \theta_2) \quad (16)$$

法线方程为

$$N_{be} = N_{be}(\Delta q_2, \theta_2) \quad (17)$$

小轮齿面为

$$R_{se} = R_{se}(\Delta q_1, \theta_1) \quad (18)$$

小轮法线为

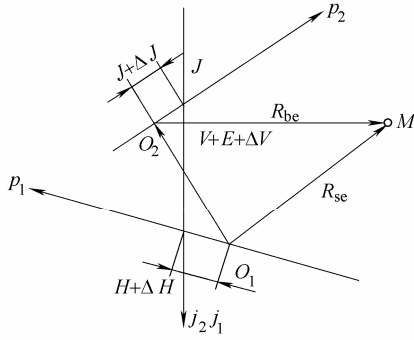
$$N_{se} = N_{se}(\Delta q_1, \theta_1) \quad (19)$$

$\Delta q, \theta$  分别是齿轮加工中角向刀位的变化量、砂轮刀盘相位角。

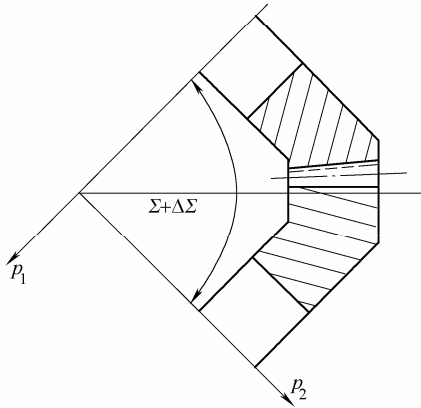
## 2.2 含有安装误差的齿轮副装配

把加工好的大小轮按照设计要求装配在一起,即按照设计的轴交角  $\Sigma$ 、安装距  $E$ 、以及  $V/H$  值进行安装检验。

$H$  是小轮安装距改变量,  $J$  是大轮安装距改变量,  $V$  是小轮偏置距的改变量。引入安装误差  $\Delta\Sigma$ 、 $\Delta V$ 、 $\Delta H$ 、 $\Delta J$ , 使得齿轮副在  $\Sigma + \Delta\Sigma$ 、 $V + \Delta V$ 、 $H + \Delta H$ 、 $J + \Delta J$  的有误差安装条件下进行安装, 如图 5a、5b 所示。



(a) 大轮、小轮安装距、小轮偏置距及其误差示意图



(b) 轴交角及其误差示意图

图 5 齿轮副的实际安装示意图

设在此安装条件下, 当大轮绕  $p_2$  轴旋转  $\eta_2$  角, 小轮绕  $p_1$  旋转  $\eta_1$  角时, 大轮上的  $M$  点就会和小轮上的  $M$  点共轭接触, 则在接触位置小轮齿面方程和法矢变为

$$\begin{cases} \mathbf{R}_s = (\mathbf{R}_{se} \cdot \mathbf{p}_1) \mathbf{p}_1 + (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{R}_{se}) \times \mathbf{p}_1 \cos \eta_1 + (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{R}_{se}) \sin \eta_1 \\ \mathbf{N}_s = (\mathbf{N}_{se} \cdot \mathbf{p}_1) \mathbf{p}_1 + (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{N}_{se}) \times \mathbf{p}_1 \cos \eta_1 + (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{N}_{se}) \sin \eta_1 \end{cases} \quad (20)$$

大轮齿面方程和法矢变为

$$\begin{cases} \mathbf{R}_b = (\mathbf{R}_{be} \cdot \mathbf{p}_2) \mathbf{p}_2 + (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{R}_{be}) \times \mathbf{p}_2 \cos \eta_2 + (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{R}_{be}) \sin \eta_2 \\ \mathbf{N}_b = (\mathbf{N}_{be} \cdot \mathbf{p}_2) \mathbf{p}_2 + (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{N}_{be}) \times \mathbf{p}_2 \cos \eta_2 + (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{N}_{be}) \sin \eta_2 \end{cases} \quad (21)$$

根据齿面啮合原理  $\mathbf{R}_s$ 、 $\mathbf{R}_b$ 、 $\mathbf{N}_s$ 、 $\mathbf{N}_b$  应满足方程式(22)

$$\begin{cases} \mathbf{R}_b = \mathbf{l}_{O_2 O_1} + \mathbf{R}_s \\ \mathbf{N}_b = \mathbf{N}_s \end{cases} \quad (22)$$

此时理论接触点的理论传动比

$$i(t) = \frac{(\mathbf{p}_2, \mathbf{R}_b, \mathbf{N}_b)}{(\mathbf{p}_1, \mathbf{R}_s, \mathbf{N}_s)} = \frac{(\mathbf{p}_2, \mathbf{R}_{be}, \mathbf{N}_{be})}{(\mathbf{p}_1, \mathbf{R}_{se}, \mathbf{N}_{se})} \quad (23)$$

在给定的一组齿面参数  $\Delta q_2$ 、 $\theta_2$ 、 $\Delta q_1$ 、 $\theta_1$  之后, 可以求出接触点的位置矢量  $\mathbf{R}_s$ 、 $\mathbf{R}_b$ , 则两交叉点位置矢量  $\mathbf{l}_{O_2 O_1}$  为

$$\mathbf{l}_{O_2 O_1} = \mathbf{R}_s - \mathbf{R}_b \quad (24)$$

设小轮的安装距改变量是  $H$ , 大轮的安装距的改变量是  $J$ , 小轮的偏置距是  $V$ , 计算公式如下

$$\begin{cases} H = -\frac{(\mathbf{l}_{O_2 O_1}, \mathbf{p}_2, \mathbf{j})}{\sin \Sigma} \\ V = -E + \mathbf{l}_{O_2 O_1} \cdot \mathbf{j} \\ J = -\frac{(\mathbf{l}_{O_2 O_1}, \mathbf{p}_1, \mathbf{j})}{\sin \Sigma} \end{cases} \quad (25)$$

## 2.3 ETCA 算法

ETCA 算法步骤如下。

(1) 在大轮上指定一个起始点(即给定这点到大轮轴线的半径  $r_{20}$ , 以及此点在大轮轴线上的投影到交叉点  $O_2$  的距离  $L_{20}$ )。

(2) 用二元迭代法求解方程组式(26), 求解出与大轮起始点相对应的大轮齿面参数  $\Delta q_2$ 、 $\theta_2$

$$\begin{cases} r_{20} = |\mathbf{R}_{be} \times \mathbf{p}_2| \\ L_{20} = \mathbf{R}_{be} \cdot \mathbf{p}_2 \end{cases} \quad (26)$$

(3) 用二元迭代法求解方程组式(27), 求得在与理论安装位置上的大轮起始点相匹配的小轮的接触初始点的齿面参数  $\Delta q_2$ 、 $\theta_1$ 。这点的传动比等于理论值为  $z_2/z_1$

$$\begin{cases} J = 0 \\ i(t) = z_2 / z_1 \end{cases} \quad (27)$$

(4) 由这一组齿面参数  $\Delta q_1$ 、 $\theta_1$ 、 $\Delta q_2$ 、 $\theta_2$ , 就可以确定  $\mathbf{R}_s$ 、 $\mathbf{R}_b$ 、 $\mathbf{l}_{O_2 O_1}$ , 再由式(25)确定与之对应的  $V$ 、 $H$  值。此  $V$ 、 $H$  值就是理论安装位置的安装调整值。

(5) 在大轮齿面上指定齿面外端、内端、中部的一点, 按式(25)求解  $V$ 、 $H$  值, 加上安装误差值即可求出三个点的实际安装调整值。在实际调整值安装条件下, 用三元迭代法求解矢量方程式(28), 就可以求解出下一个接触点, 按一定的步长增加或减少  $\Delta q_2$ , 求出下一接触点, 直至超出大轮齿面的范围

$$\mathbf{R}_b = \mathbf{l}_{O_2 O_1} + \mathbf{R}_s \quad (28)$$

(6) 画运动曲线图。大轮和小轮在进行齿面接触仿真分析时, 只有齿面中部计算点的传动比等于

理论值  $z_2/z_1$ ，在其余各个接触点上是不一定等于传动比  $z_2/z_1$  的，因此存在传递误差。

小轮齿面上接触点的坐标在确定时，小轮已经从机床调整位置绕轴  $p_1$  轴转过了  $\varphi_1=i_{01} \Delta q_1$  角，装配之后又绕  $p_1$  轴转过了  $\eta_1$  角才进入啮合。因此，小轮从机床调整位置到啮合位置，小轮转过的角度  $\varepsilon_1=\varphi_1+\eta_1$ 。同理大轮转过的角度  $\varepsilon_2=\varphi_2+\eta_2$ 。

记第一个接触点，小轮大轮从机床调整位置到啮合位置转过的角度分别是  $\varepsilon_{10}$ 、 $\varepsilon_{20}$ ，那么齿轮从第一个接触点位置到现在接触点位置的转角是

$$\begin{cases} \Delta \varepsilon_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_{10} \\ \Delta \varepsilon_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_{20} \end{cases} \quad (29)$$

当齿轮副的传动比固定时，小轮转过  $\Delta \varepsilon_1$  时，大轮的转角应该为  $\Delta \varepsilon_2 = (z_1/z_2) \Delta \varepsilon_1$ 。但实际传动比是实时变化的，则  $\Delta \varepsilon_2 \neq (z_1/z_2) \Delta \varepsilon_1$ ，其误差为

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_2 - \frac{z_1}{z_2} \Delta \varepsilon_1 \quad (30)$$

以  $\Delta \varepsilon_2$  为横坐标， $\Delta \varepsilon$  为纵坐标所做的曲线图就是齿面接触分析的运动曲线图。其中  $\Delta \varepsilon$  可能很小，就需要放大  $10^4 \sim 10^5$  倍后再进行画图。

绘图过程可调用 MATLAB 的绘图命令 plot 得到齿轮副的传动误差图和接触轨迹线。在求解非线性方程的过程中，可直接调用 MATLAB 的 Fsolve 函数进行求解，避免用其他编程语言时需要编写复杂的程序求解非线性方程的难题，大大简化了编程工作。

### 3 ETCA 实例

#### 3.1 计算实例与计算结果

本文以弧齿锥齿轮(SGM 加工调整卡)为例，对大轮凸面与小轮凹面进行 ETCA 接触分析。

根据课题组前期工作<sup>[14]</sup>测得的机床加工误差数据，选择机床在齿面中点处的几何运动误差如表 2 所示。

表 2 齿面中点处的机床几何运动误差值

误差名称	误差值	误差名称	误差值
沿 x 轴直线运动误差		绕 B 轴转动误差	
旋转误差 $\varepsilon_{2sx} / \mu\text{rad}$	8	旋转误差 $\varepsilon_{6sx} / \mu\text{rad}$	-50
偏摆误差 $\varepsilon_{2sy} / \mu\text{rad}$	2	偏摆误差 $\varepsilon_{6sy} / \mu\text{rad}$	-2
俯仰误差 $\varepsilon_{2sz} / \mu\text{rad}$	1.5	俯仰误差 $\varepsilon_{6sz} / \mu\text{rad}$	-3
$(\delta_{2sx} + \Delta x_{2x}(T)) / \text{mm}$	0.01	$(\delta_{6sx} + \Delta B_{6x}(T)) / \text{mm}$	0.01
$(\delta_{2sy} + \Delta x_{2y}(T)) / \text{mm}$	0.004	$(\delta_{6sy} + \Delta B_{6y}(T)) / \text{mm}$	-0.05
$(\delta_{2sz} + \Delta x_{2z}(T)) / \text{mm}$	-0.005	$(\delta_{6sz} + \Delta B_{6z}(T)) / \text{mm}$	-0.06

(续)

误差名称	误差值	误差名称	误差值
沿 y 轴直线运动误差		绕 A 轴转动误差	
旋转误差 $\varepsilon_{3sx} / \mu\text{rad}$	5	旋转误差 $\varepsilon_{7px} / \mu\text{rad}$	-80
偏摆误差 $\varepsilon_{3sy} / \mu\text{rad}$	4	偏摆误差 $\varepsilon_{7py} / \mu\text{rad}$	2
俯仰误差 $\varepsilon_{3sz} / \mu\text{rad}$	3	俯仰误差 $\varepsilon_{7pz} / \mu\text{rad}$	-3
$(\delta_{3sx} + \Delta y_{3y}(T)) / \text{mm}$	0.008	$(\delta_{7sx} + \Delta A_{7x}(T)) / \text{mm}$	0.01
$(\delta_{3sy} + \Delta y_{3y}(T)) / \text{mm}$	0.04	$(\delta_{7sy} + \Delta A_{7y}(T)) / \text{mm}$	0.02
$(\delta_{3sz} + \Delta y_{3z}(T)) / \text{mm}$	-0.03	$(\delta_{7sz} + \Delta A_{7z}(T)) / \text{mm}$	0.03
沿 z 轴直线运动误差		砂轮主轴位置误差	
旋转误差 $\varepsilon_{5sx} / \mu\text{rad}$	-1	$(\delta_{4px} + \Delta S_{4x}(T)) / \text{mm}$	0.02
偏摆误差 $\varepsilon_{5sy} / \mu\text{rad}$	-1	$(\delta_{4py} + \Delta S_{4y}(T)) / \text{mm}$	0.03
俯仰误差 $\varepsilon_{5sz} / \mu\text{rad}$	-1	$(\delta_{4pz} + \Delta S_{4z}(T)) / \text{mm}$	-0.02
$(\delta_{5sx} + \Delta z_{5x}(T)) / \text{mm}$	0.05		
$(\delta_{5sy} + \Delta z_{5y}(T)) / \text{mm}$	0.04		
$(\delta_{5sz} + \Delta z_{5z}(T)) / \text{mm}$	0.01		
各轴之间垂直度误差 ( $\varepsilon_{npix}, \varepsilon_{npyy}, \varepsilon_{npz}, n=1 \sim 7$ )		A 轴位置偏差 (含立柱变形误差)	
$\varepsilon_{npix} / \mu\text{rad}$	56	$\delta_{7px} / \text{mm}$	0.03
$\varepsilon_{npyy} / \mu\text{rad}$	30	$\delta_{7py} / \text{mm}$	-0.04
$\varepsilon_{npz} / \mu\text{rad}$	45	$\delta_{7pz} / \text{mm}$	0.03
齿轮副安装误差			
轴交角误差		小轮偏置距误差	
$\Delta \Sigma / \text{rad}$	0.001	$\Delta V / \text{mm}$	0.04
大轮安装距误差		小轮安装距误差	
$\Delta J / \text{mm}$	0.080	$\Delta H / \text{mm}$	-0.05

齿轮设计以及加工调整参数如表 3、4 所示。

表 3 齿轮加工调整参数

加工参数	小轮	大轮
砂轮半径 $r_{02} / \text{mm}$	145.923	152.4
砂轮外刃角 $c_1 / (^\circ)$	18.75	18.75
砂轮内刃角 $c_2 / (^\circ)$	21.25	21.25
砂轮顶宽 $b_s / \text{mm}$	1.651	3.81
径向刀位 $S_2 / \text{mm}$	154.127	146.886
刀倾角 $i / (^\circ)$	0	0
刀转角 $j / (^\circ)$	0	0
垂直轮位 $E_{02} / \text{mm}$	-1.463	0
轮坯安装角 $\alpha' / (^\circ)$	42.728	42.728
床位 $x_{B2} / \text{mm}$	4.374	0
水平轮位 $x_2 / \text{mm}$	-6.446	0
角向刀位 $q_{02} / (^\circ)$	55.706	54.093
滚比 $i_0$	1.365	1.413

表 4 齿轮设计参数

设计参数	小轮	大轮
齿数 $z$	37	37
模数 $m$	-	8
齿面宽 $b / \text{mm}$	63	63
压力角 $\alpha_0 / (^\circ)$	20	-
轴交角 $\Sigma / (^\circ)$	90	-
齿顶高 $h_f' / \text{mm}$	6.8	6.80
齿根高 $h_a' / \text{mm}$	8.3	8.30
全齿高 $h' / \text{mm}$	15.1	15.10
节锥角 $\delta' / (^\circ)$	45	45
面锥角 $\delta_d' / (^\circ)$	47.267	47.267
根锥角 $\delta_f' / (^\circ)$	42.733	42.733
齿根角 $\theta_f' / (^\circ)$	2.267	2.267
旋向	左旋	右旋

根据 ETCA 的分析方法,可得到齿面接触轨迹、接触区、运动曲线图。限于篇幅,以大轮齿面中点接触为例,将 ETCA 和 TCA 分析结果比较如下,见图 6~12。

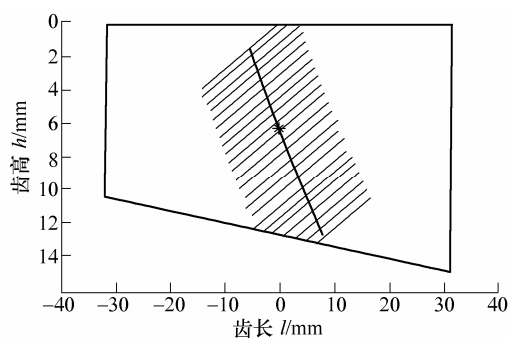


图 6 运动误差影响下 ETCA 大轮齿面中点接触区图

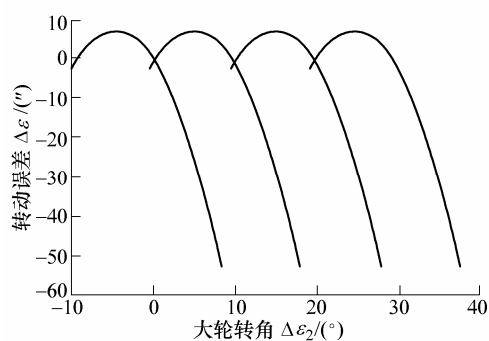


图 7 运动误差影响下 ETCA 齿面中点运动曲线图

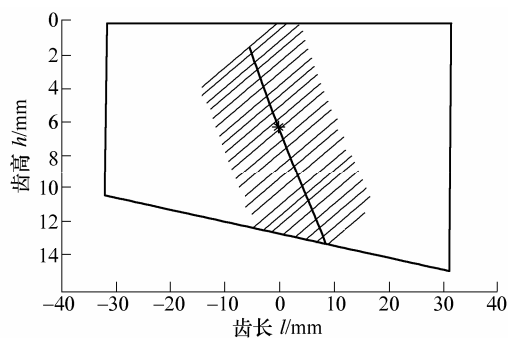


图 8 TCA 大轮齿面中点接触区图

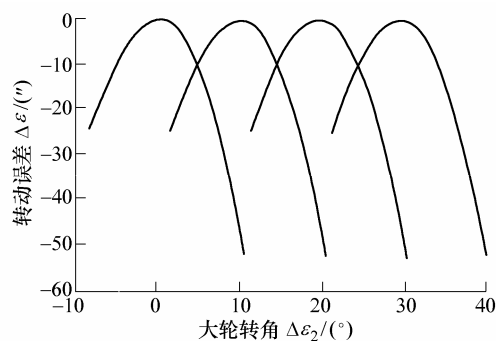


图 9 TCA 大轮齿面中点运动曲线图

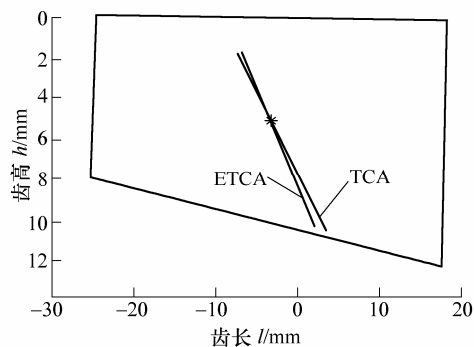


图 10 运动误差影响下接触轨迹比较图

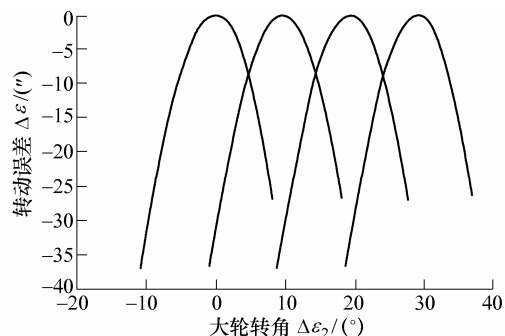


图 11 安装误差影响下大轮中点运动曲线

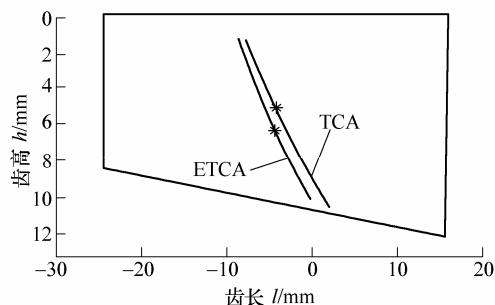


图 12 安装误差影响下的 ETCA、TCA 接触轨迹比较图

### 3.2 结果分析

从理论 TCA 与 ETCA 的分析结果(图 6~12)可以看出,机床运动误差和齿轮副的安装误差对齿面接触分析结果有着较大的影响,机床运动误差和齿轮副安装误差的影响使齿面接触区轨迹方向发生较大的偏差;机床几何运动误差的影响,使大轮齿面中点处运动误差幅值分别由原来的 $-26.929$ 、 $-37.121$ 变为 $-2.874$ 、 $-53.133$ (图 7);齿面中点处到齿轮大端的接触点的运动误差出现正值,其值范围为 $0 \sim 6.155$ 。由图 11 分析可知,安装误差也使得运动曲线幅值发生较明显的变化,运动误差幅值变为 $-25.366$ 、 $-56.686$ 。

由图 7、11 可以看出,机床运动几何误差和安装误差使得运动曲线发生了较大变化,运动曲线对称性变差,曲线幅值也产生了较大的变化,而运动曲线幅值的变化将对齿轮副加载后的振动情况产生较大的不良影响<sup>[15]</sup>;图 7 中,运动曲线甚至出现正值部分,说明大轮的回转超前于理论值,这是由于在机床运动几何误差的影响下,齿高方向没有修正

甚至高出于理论齿面。图 10、12 中, 在运动和安装误差的影响下, 齿面接触轨迹线发生了偏转的偏移。

分析说明机床运动误差和安装误差对螺旋锥齿轮的齿面接触性能有较大的影响, 为了更好地通过齿面分析结果达到更准确的反调加工参数的目的, 采用 ETCA 的接触分析结果进行反调则更为合理。

## 4 结论

(1) 基于多体系统动力学理论, 建立五轴数控磨齿机误差建模。

(2) 根据误差模型和 TCA 原理, 提出有误差的螺旋锥齿轮传动接触分析新方法, 即 ETCA。

(3) 分析发现机床运动几何误差和齿轮副安装误差对齿面接触质量影响很大, 尤其对齿面接触运动曲线和接触线轨迹有较大影响, 利用 ETCA 结果进行齿面加工参数的反调更为接近实际工况, 更为合理。

## 参 考 文 献

- [1] LITVIN FAYFOR L. Local synthesis and tooth contact analysis of face-milled spiral bevel gears[R].NASA, CR4342, 1990.
- [2] 方宗德, 刘涛. 基于传动误差设计的弧齿锥齿轮啮合分析[J]. 航空学报, 2002, 23 (3): 226-230.  
FANG Zongde, LIU Tao. Tooth contact analysis of spiral bevel gears based on the design of transmission error [J]. Journal of Aeronautics, 2002, 23 (3): 226-230.
- [3] 王军. 基于三坐标测量的弧齿锥齿轮及准双曲面齿轮齿面加工精度控制方法研究[D]. 西安: 西安交通大学, 2003.  
WANG Jun. A Study on the tooth surface geometrical precision control of spiral bevel and hypoid gears based on 3-D coordinate measuring [D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2003.
- [4] 王延忠. 螺旋锥齿轮基于离散点描述齿面接触分析研究[J]. 机械科学与技术, 2002, 21 (1): 3-9.  
WANG Yanzhong. Tooth contacting analysis of bevel gear tooth surface based on sampling points [J]. Mechanical Science and Technology, 2002, 21 (1): 3-9.
- [5] 李小清. 螺旋锥齿轮数控加工与误差修正技术研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2004.  
LI Xiaoqing. Research on the NC machining and error correcting technology for spiral bevel and hypoid gears[D].Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2004.
- [6] VILMOS Simon. Computer simulation of tooth contact analysis of mismatched spiral bevel gears [J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42 (3): 365-381.
- [7] 王三民. 弧齿锥齿轮齿及误差的轮齿接触分析[J]. 西北工业大学学报, 1994, 12 (2): 164-168.  
WANG Sanmin. Tooth contact analysis with errors of spiral bevel gears considered [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 1994, 12 (2): 164-168.
- [8] FERREIRA P M, LIU C R. Contribution to analysis and compensation of the geometric error of a machining center [J]. CIRP Annals, 1986, 35 (1): 67-88.
- [9] 赵小松. 四轴联动加工中心误差补偿技术的研究[D]. 天津: 天津大学, 1999.  
ZHAO Xiaosong. Research on the error compensation technology of four-axis machine center [D]. Tianjin: Tianjin University, 1999.
- [10] 张志飞. 多轴数控机床热误差与几何误差建模及补偿技术的研究[D]. 天津: 天津大学, 2000.  
ZHANG Zhifei. Research on the thermal error and geometrical error modeling and compensation technology of multi-axis four-axis machine center[D]. Tianjin: Tianjin University, 2000.
- [11] SRIVASTAVA A K. Modeling geometric and thermal errors in five-axis CNC machine tool[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 1995, 35 (9): 1321-1337.
- [12] 曾韬. 螺旋锥齿轮设计与加工[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1989.  
ZENG Tao. Design and manufacture of spiral bevel gears. [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 1989.
- [13] 郑昌启. 弧齿锥齿轮和准双曲面齿轮[M]. 北京: 机械工业出版社, 1988.  
ZHENG Changqi. Spiral bevel gear and hypoid gear [M]. Beijing: China Machine Press, 1988.
- [14] 刘慧玲. 数控螺旋锥齿轮机床空间位置精度检测与补偿的研究[D]. 长沙: 中南大学, 2006.  
LIU Huiling. Research on detection and compensation of NC spiral bevel gears machine's space position precision [D]. Changsha: Central South University, 2006.
- [15] 邓效忠. 高重合度弧齿锥齿轮的设计理论和实验研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2002.  
DENG Xiaozhong. Research of design theory experiments on spiral bevel gears with high contact ratio [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2002.

作者简介: 唐进元, 男, 1962 年出生, 教授。主要研究方向为复杂曲面数字化设计与制造。

E-mail: jytang@mail.csu.edu.cn